Programme du cours.

(I) Equations différentielles

- Equation différentielles du 1er ordre (de la forme $y' = f(y,t)$)
- Résolution de l'équation $a(t)y' + b(t)y = c(t)$ où a, b, c sont des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, I étant un intervalle ouvert, a, b, c continues et a ne s'annulle pas.
- Résolution de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ et $ay'' + by' + cy = f$ où f est une fonction ayant une forme convenable.
- Résultats d'existence et d'unicité des solutions d'une équation différentielle du 1er ou du 2nd ordre en fonction de la condition initiale.

(II) Fonctions de deux variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$.

- Norme euclidienne et norme sup sur $\mathbb{R}^2$, interprétation géométrique et équivalence des deux normes.
- Définition d'un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$
- Fonctions continue, et espace de fonctions continues,
- Dérivées partielles et applications de classe C^1, différentielle

- Différentielle de la composée de deux application de classe C^1 et pratique du calcul des dérivées partielles de fonctions composées.
- Définition du gradient pour des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
- Changement de variables dans $\mathbb{R}^2$
- Coordonnées polaires et coordonnées cylindriques.
- Changements de variables dans les calculs de dérivées partielles.
- Fonctions de classe C^k et théorème de Schwarz

Equations différentielles

1) Notion d'équation différentielle

Une équation différentielle est une équation.
- Dont l'inconnue est une fonction ~~d'un~~ intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- ~~Dont~~ laquelle apparaît la dérivée, ou plusieurs des dérivées successives, de cette fonction.

__Exemples__: Si y désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes sont des équations différentielles
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $y'(x) = y(x)$.
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $(y'(x))^2 = \sin(y(x)) + \cos(x^4)$
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x)\, y'''(x) + \sin(x^2)\, y''(x) = y(x) + 5$

Pour abréger la notation, on note $y' = y$, $(y')^2 = \sin(y) + \cos(x^4)$, $\cos(x)\, y''' + \sin(x^2)\, y'' = y + 5$, ce qui suppose implicitement que y est une fonction de la variable x.

L'expression "pour $x \in \mathbb{R}$" n'est pour l'instant pas précisée en "pour tout $x \in \mathbb{R}$" car nous verrons que parfois nous considérerons ~~ces~~ équations seulement dans des intervalles de $\mathbb{R}$ (donc "pour tout $x \in I$", I étant un intervalle)

Lorsqu'on considère une équation différentielle, le but est ~~de~~ la résoudre, c'est à dire de déterminer les fonctions qui vérifient l'égalité correspondante.

On a la définition suivante:

~~1.1)~~ __Définition__ ~~1~~: On appelle __solution__ d'une équation différentielle (E) un couple (f, I), où f est une fonction et I un intervalle tels que f vérifie (E) sur I.

On dira: f est une solution de (E) __sur I__.

Résoudre une équation différentielle sur un intervalle I, c'est trouver toutes les fonctions solutions de (E) sur I. (2)

Si aucune précision n'est donnée sur I, on considère que $I = \mathbb{R}$

2) Types d'équations différentielles

Définitions : • Une équation différentielle est dite d'ordre k (ou du k-ième ordre), si la dérivée k-ième de la fonction inconnue intervient, mais pas les dérivées d'ordre strictement supérieur à k.

~~• Une équation différentielle est dite linéaire si ~~seulement~~ la somme de deux solutions de cette équation est une solution, et tout multiple d'une solution est une solution.~~

~~• Une équation ~~linéaire~~ différentielle linéaire est à coefficients constants ssi elle est de la forme :~~ ~~$a_k y^{(k)} + a_{k-1} y^{(k-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$, où $a_0, a_1, \dots, a_k$ sont des réels (ne dépendent pas de x)~~

~~Exemples : • $y' + 4y = 0$ est linéaire du premier ordre à coefficients constants avec un second membre nul (on dit aussi : " sans second membre ")~~

~~• $y' + 4y = e^x$ est ~~linéa~~ du premier ordre, et~~

• Une équation différentielle est dite linéaire si elle est de la forme :

$$a_k(x) y^{(k)} + a_{k-1}(x) y^{(k-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x)$$

• Une équation différentielle est dite linéaire sans second membre si elle est de la forme précédente avec $f(x) = 0$, et avec second membre si $f(x) \neq 0$.

• Une équation différentielle linéaire est à coefficients constants si et seulement si dans l'égalité précédente, $a_0(x), \dots, a_k(x)$ ne dépendent pas de x.

Exemples : . $y'+4y=0$ est linéaire du premier ordre, à coefficients constants, sans second membre

. $y'+4y=\sin x$ est linéaire du premier ordre, à coefficients constants, avec second membre.

. $2y''+7y'-5y=0$ est une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants sans second membre.

. $4y''+10y'+67y=\cos(x)$ est linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre.

. $4\sin(x)y''=7$ est linéaire du second ordre à coefficients variables avec second membre.

. $y'y''=y^2$ est non linéaire.

Proposition : ~~Si~~ Si f et g sont des solutions d'une équation différentielle linéaire sans second membre, sur un intervalle I, alors $f+\lambda g$ est également une solution sur I, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Preuve : Si f et g sont solutions de $a_k y^{(k)}+\dots+a_1 y'+a_0 y=0$ en tout point de I, alors

$$\begin{cases} a_k f^{(k)}+\dots+a_1 f'+a_0 f=0 \\ a_k g^{(k)}+\dots+a_1 g'+a_0 g=0 \end{cases}$$

En ajoutant la 1ère équation et λ fois la 2e, on obtient

$$a_k\left(f^{(k)}+\lambda g^{(k)}\right)+\dots+a_1\left(f'+\lambda g'\right)+a_0(f+\lambda g)=0 \text{ en tout pt de } I$$

et par linéarité de la dérivation :

$$a_k(f+\lambda g)^{(k)}+\dots+a_1(f+\lambda g)'+a_0(f+\lambda g)=0 \text{ en tout pt de } I$$

c'est à dire que $f+\lambda g$ est une solution de l'équation.

3) Equation différentielle sous forme résolue.

Définition : Une équation différentielle est dite sous forme résolue si elle est d'ordre k pour une certaine valeur de $k \geq 1$ et ~~si la fon~~ elle est de la forme $y^{(k)} = \cancel{*}$, le membre de droite ne faisant intervenir que les dérivées de y d'ordre strictement inférieur à k. (4)

<u>Exemples</u> : Les équations $y' = \sin(y) + x$ et $y'' = yy' + x$ ~~sont~~ sont sous forme résolue, alors que $y'' = 3xy''' - y - 1$ ne l'est pas.

Une équation qui n'est pas initialement sous forme résolue peut être transformée en une équation sous forme résolue : par exemple $(x^2+3)y'' + 5y' + 7y - x = 0$ peut être écrite sous la forme $y'' = -\frac{5}{x^2+3}y' - \frac{7}{x^2+3}y + \frac{x}{x^2+3}$

puisque x^2+3 ne s'annule en aucun point de $\mathbb{R}$.

<u>Equation sous forme résolue, d'ordre 1</u> On pourra écrire une équation différentielle d'ordre 1 sous forme résolue, de la manière suivante

$y' = f(y, x)$ où f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Si on cherche à résoudre l'équation dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on peut prendre f fonction de $\mathbb{R} \times I$ dans $\mathbb{R}$.

4) <u>Primitives et équations différentielles</u>

Un type d'équations différentielles directement résoluble est le suivant : $y' = f(x)$, i.e une équation du premier ordre ~~sous forme résolue dont le se~~ sous forme résolue, dont le second membre est une fonction ne dépendant pas de l'inconnue.

Si la fonction f est continue sur un intervalle I, alors les solutions sur ~~cette~~ cet intervalle sont données par les primitives de f sur I. Si F_0 est l'une de ces primitives, les autres s'en déduisent par l'addition d'une constante : donc les solutions de $y' = f(x)$ dans I sont données par $y(x) = F_0(x) + C$ $C \in \mathbb{R}$.

5) Equation différentielle du 1er ordre à coefficients constants.

A présent, nous allons résoudre les équations différentielles du 1er ordre à coefficients constants.
Elles sont donc de la forme $ay' + by = f(x)$,
où $a, b \in \mathbb{R}$, et f est une fonction d'un intervalle I, vers $\mathbb{R}$. (quand I n'est pas précisé, f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)
Comme l'équation est du 1er ordre, y' apparaît "réellement" et donc $a \neq 0$. (Si $a \neq 0$, on n'a en fait pas une équation différentielle)

- Si l'équation est sans second membre, elle s'écrit $ay' + by = 0$ puisque $f(x) = 0$, donc

$$y' = -\frac{b}{a} y.$$

On sait que la fonction exponentielle est égale à sa dérivée et que plus généralement, la dérivée de $x \longmapsto e^{\alpha x}$ est égale à α fois cette fonction, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
En posant $\alpha = -\frac{b}{a}$, on voit ainsi que $y(x) = e^{-\frac{bx}{a}}$ est solution de l'équation de $ay' + by = 0$, sur ~~$\mathbb{R}$~~, ou plus généralement sur tout intervalle de $\mathbb{R}$.
On a le résultat plus précis suivant:

Proposition: Sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$, les solution de $ay' + by = 0$ sont données par $y(x) = C e^{-bx/a}$, C étant une constante.

Preuve: Il est clair que pour tout $C \in \mathbb{R}$, $y(x) = C e^{-bx/a}$ est solution de $ay' + by = 0$. Il s'agit de vérifier qu'il n'y a pas d'autre solution.

Soit y_1 une solution de $ay + by' = 0$ dans I (6)

On considère la fonction $\tilde{y} : I \to \mathbb{R}$ donnée par $\tilde{y}(x) = e^{bx/a} y_1(x)$ pour tout $x \in I$.

Comme y_1 est nécessairement dérivable sur I (sinon l'équation $ay + by' = 0$ n'aurait pas de sens pour $y = y_1$), $\tilde{y}$ est également dérivable sur I, et

$$\tilde{y}'(x) = \frac{b}{a} e^{bx/a} y_1(x) + e^{bx/a} y_1'(x)$$

$$= \frac{b}{a} e^{bx/a} y_1(x) + \underbrace{e^{bx/a}\left(-\frac{b}{a} y_1(x)\right)}_{\text{car } ay_1'(x) + by_1(x) = 0}$$

$$= 0$$

La dérivée de $\tilde{y}$ s'annule sur tout I, donc $\tilde{y}$ est constante sur I. Si on appelle C cette constante, on a $C = e^{bx/a} y_1(x)$, soit ~~$y_1(x) = Ce$~~

$y_1(x) = C e^{-bx/a}$.

- Considérons maintenant le cas d'une équation linéaire à coefficients constants avec second membre.

$ay' + by = f(x)$.

On peut utiliser alors la proposition suivante :

Proposition : Soit une équation linéaire de la forme : $a_k(x) y^{(k)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x)$ et y_0 une solution de cette équation (on suppose donc que l'équation a une solutions au moins) sur $I \subset \mathbb{R}$. Alors, l'ensemble des solutions de l'équation sur I est l'ensemble des ~~solutions~~ fonctions de I vers $\mathbb{R}$, de la forme $y_0 + z$, où z parcourt l'ensemble des solutions de l'équation $a_k(x) y^{(k)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x)$

$= 0$.

<u>Preuve</u> : On peut ~~supprimer~~ soustraire (pour tout $x \in \mathbb{R}$)
$a_k(x)\, y_0^{(k)}(x) + \ldots + a_1(x) y_0'(x) + a_0(x) y_0(x)$ au membre de gauche de l'équation initiale, et $f(x)$ au membre de droite : en effet ces deux quantités sont égales puisque y_0 est solution de l'équation.
On trouve alors : l'équation équivalente :
$a_k(x)(y - y_0)^{(k)} + \ldots + a_1(x)(y-y_0)' + a_0(x)(y-y_0) = 0$
en utilisant la linéarité de la dérivée.
$(y^{(k)} - y_0^{(k)} = (y-y_0)^{(k)})$
Les solutions de cette équations sont clairement obtenues en ajoutant y_0 aux fonctions z vérifiant
$a_k(x)\, z^{(k)}(x) + \ldots + a_1(x) z'(x) + a_0(x)\, z(x)$ pour $x \in I$.
("changement de variable" $z = y - y_0$)

Dans le cas de $ay' + by = f(x)$, on doit donc trouver une solution particulière de cette équation si elle existe, et ensuite ajouter les solutions de $ay' + by = 0$.
Pour résumer :
"Solution générale = solution particulière + solutions de l'équation sans second membre".
Il reste à trouver ~~la~~ une solution particulière, puisque les solutions de $ay' + by = 0$ sont maintenant connues

<u>Méthode de variation de la constante</u>. On sait que les solutions de $ay' + by = 0$ sont données par $y(x) = Ce^{-\frac{b}{a}x}$
On cherche une solution de $ay' + by = f(x)$ sous la même forme, mais avec $C(x)$ à la place de C (on fait "varier la constante C" en fonction de x). On suppose ici f <u>continue</u> sur I.

Si on remplace y par $C(x)e^{-bx/a}$ dans l'équation, on trouve : (8)

$$a\left(C(x)e^{-bx/a}\right)' + b\left(C(x)e^{-bx/a}\right) = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad a\,C'(x)e^{-bx/a} + a\,C(x)\left(-\frac{b}{a}\right)e^{-bx/a} + b\,C(x)e^{-bx/a} = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad a\,C'(x)e^{-bx/a} = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad C'(x) = \frac{f(x)e^{bx/a}}{a}$$

On en déduit le résultat suivant :

Proposition : Si f est une fonction continue d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et si $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, les solutions de $ay' + by = f(x)$ sur I sont données par $y(x) = C e^{-bx/a} + F_0(x)e^{-bx/a}$ où F_0 est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)e^{bx/a}}{a}$ sur I.

Autrement dit, elles sont données par $y(x) = F(x)e^{-bx/a}$, F parcourant l'ensemble des primitives sur I de $x \mapsto \frac{f(x)e^{bx/a}}{a}$.

6) Equation différentielle linéaire du ~~second ord~~ premier ordre à coefficients variables.

Dans ce cas, on a une équation de la forme $a(x)y' + b(x)y = f(x)$ où a, b, f sont des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ étant un intervalle).

Cette équation "a un sens" même lorsque a s'annule en certains point de I, c'est à dire que ceci reste une "vraie" équation différentielle.

La résolution d'une telle équation devient plus difficile car y' "disparaît" aux points d'annulation de a, donc on ne peut plus mettre l'équation "sous forme résolue".

Nous allons ici supposer que cette difficulté n'apparaît pas, et que a, b, f sont des fonctions continues, a ne s'annulant nulle part sur I.

L'équation peut alors s'écrire :

$$y' = -\frac{b(x)}{a(x)}\, y + \frac{f(x)}{a(x)}.$$

• <u>Cas sans second membre.</u>

L'équation s'écrit alors $y' = -\frac{b(x)}{a(x)}\, y$.

<u>Informellement</u> : On peut écrire $\frac{y'}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)}$ (ceci n'est pas rigoureux car on ne sait pas si y s'annule), donc $(\log y)' = -\frac{b(x)}{a(x)}$, $\log y =$ primitive de $-\frac{b(x)}{a(x)}$, et $y =$ exponentielle d'une telle primitive.

Ceci suggère le résultat suivant, que nous allons ensuite prouver rigoureusement :

<u>Proposition</u>. Soient a, b des fonctions continues d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, a ne s'annulant en aucun point de I. Alors, les solutions de $a(x)y' + b(x)y = 0$ sont données par

$$y(x) = C \exp(F_0(x)),$$

où F_0 est une primitive de $x \longmapsto -\frac{b(x)}{a(x)}$ et C est une constante.

~~Elles sont également~~.

<u>Remarque</u> : ~~la fonction~~ La primitive F_0 est déterminée à une constante additive près. Si on change le choix de F_0 (autrement dit on remplace $F_0(x)$ par $F_0(x) + c$ où $c \in \mathbb{R}$), alors cela revient à changer la constante multiplicative C.

(autrement dit $C \exp(F_0(x) + c) = (C e^c) \exp(F_0(x))$)

Preuve : Si y_0 est une solution de l'équation, on a $y_0'(x)\,a(x) + y_0(x)\,b(x) = 0$ pour tout $x \in I$

Comme y_0 est dérivable, $y_1 : x \longmapsto \exp(-F_0(x))\,y_0(x)$ est également dérivable, et on a ; pour tout $x \in I$:

$$y_1'(x) = \exp(-F_0(x))\,y_0'(x) - F_0'(x)\exp(-F_0(x))\,y_0(x)$$

$$= \exp(-F_0(x))\left(-\frac{b(x)}{a(x)}\,y_0(x)\right) + \frac{b(x)}{a(x)}\exp(-F_0(x))\,y_0(x)$$

$$= 0$$

donc y_1 est constante sur I. Si C est cette constante, on trouve $y_0(x) = C\exp(F_0(x))$.

Réciproquement, si $y_0(x) = C\exp(F_0(x))$, on a $y_0'(x) = C\,F_0'(x)\exp(F_0(x)) = C\left(-\frac{b(x)}{a(x)}\right)\exp(F_0(x))$

$= -\frac{b(x)}{a(x)}\,y_0(x)$ et y_0 est solution de l'équation $a(x)y' + b(x)y = 0$.

- <u>Cas de l'équation avec second membre.</u>

D'après un résultat précédemment démontré, on sait que les solutions de l'équation sont obtenues en ajoutant une solution particulière à l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre.

[Note : l'équation sans second membre est également appelée équation homogène].

Ces dernières solutions sont connues grâce aux cas précédent : il reste donc à trouver une solution particulière : on peut le faire grâce à la méthode de la variation de la constante.

On cherche une solution de la forme $C(x)\exp(F_0(x))$ où F_0 est une primitive de la fonction $x \longmapsto -\frac{b(x)}{a(x)}$.

L'équation s'écrit alors :

$$a(x)\,C'(x)\exp(F_0(x)) + a(x)\,C(x)\underbrace{F_0'(x)}_{=-\frac{b(x)}{a(x)}}\exp(F_0(x))$$

$$+\ b(x)\,C(x)\exp(F_0(x)) = f(x)$$

$$\Leftrightarrow\ a(x)\,C'(x)\exp(F_0(x)) = f(x)$$

$$\Leftrightarrow\ C'(x) = \exp(-F_0(x))\,\frac{f(x)}{a(x)}.$$

On en déduit alors le résultat suivant.

<u>Proposition</u> : Soient a, b, f des fonctions continues d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; on suppose que a ne s'annule pas. On considère une primitive F_0 de $x \mapsto -\frac{b(x)}{a(x)}$, et une primitive G_0 de $x \mapsto \exp(-F_0(x))\,\frac{f(x)}{a(x)}$

Alors, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $a(x)y' + b(x)y = f(x)$ est données par : $y(x) = (G_0(x) + C)\exp(F_0(x))$

où C est une constante réelle.

<u>Exemple</u> : On veut résoudre l'équation différentielle : $(1+x^2)\,y'(x) + y(x) = 1+x+x^2$.

• Une primitive de $x \mapsto -\frac{1}{1+x^2}$ est l'opposé de la fonction arctangente. Les solutions de l'équation sans second membre sont donc données par $y(x) = C\exp(-\operatorname{Arctan} x)$ où C est une constante.

Pour résoudre l'équation avec second membre, on peut ensuite trouver une primitive de $x \longmapsto \exp(\text{Arctan}\, x) \cdot \dfrac{1+x+x^2}{1+x^2}$

$= \exp(\text{Arctan}\, x)\left(1 + \dfrac{x}{1+x^2}\right)$

On vérifie que $x \longmapsto x \exp(\text{Arctan}\, x)$ est une telle primitive en calculant la dérivée de cette fonction.

La solution générale de $(1+x^2)y'(x) + y(x) = 1+x+x^2$ est donc donnée par

$y(x) = \left(x \exp(\text{Arctan}\, x) + C\right) \cdot \exp(-\text{Arctan}\, x)$

$\quad = x + C \exp(-\text{Arctan}\, x)$ où C est une constante.

Il n'est pas très commode de devoir calculer une primitive de $x \mapsto \exp(\text{Arctan}\, x)\, \dfrac{1+x+x^2}{1+x^2}$.

Une fois que la solution générale $y(x) = C \exp(-\text{Arctan}\, x)$ de l'équation homogène est connue, une autre manière de résoudre l'équation avec second membre est d'en trouver directement une solution particulière sans utiliser la formule générale de la proposition précédente ($y(x) = (G_0(x) + C)\exp(F_0(x))$)

Ici, on peut "deviner" que $y(x) = x$ est solution de $y'(x)\cdot(1+x^2) + y(x) = 1+x+x^2$

donc que la solution générale est obtenue en ajoutant les solutions de l'équation homogène à la solution particulière $y(x) = x$. On obtient comme plus haut : $y(x) = x + C \exp(-\text{Arctan}\, x)$.

Une autre exemple est le suivant : on se place dans $I=\mathbb{R}_+^*$ où x ne s'annule pas et on considère l'équation : $xy'(x) = 5y(x) + 15$.

Cette équation est équivalente à $xy'(x) - 5y(x) = 15$.

- Les solutions à l'équation homogène $xy'(x) - 5y(x) = 0$ sont données par $y(x) = C \exp(F_0(x))$ où F_0 est une primitive de $5/x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$: on peut prendre $F_0(x) = 5 \ln(x)$ soit $y(x) = Cx^5$.
- La fonction $y(x) = -3$ est clairement solution de $x\underbrace{y'(x)}_{\substack{=0 \\ \text{ici}}} = 5\underbrace{y(x)}_{\substack{=-3 \\ \text{ici}}} + 15$.
- Donc la solution générale à $xy'(x) = 5y(x) + 15$ est donnée par les fonctions de la forme $y(x) = Cx^5 - 3$ où $C \in \mathbb{R}$.

<u>Résolution dans $\mathbb{R}$</u> : La résolution de $xy'(x) = 5y(x) + 15$ dans $\mathbb{R}$ est plus difficile car x s'annule en $x=0$ donc on ne peut pas directement appliquer les résultats précédents. Cependant, dans ce cas particulier, on peut quand même résoudre l'équation dans $\mathbb{R}$ de $xy'(x) = 5y(x) + 1$

Soit donc y_0 une solution

- La restriction de y_0 à $\mathbb{R}_+^*$ est une solution de $xy'(x) = 5y(x) + 15$ dans $\mathbb{R}_+^*$. D'après l'étude précédente il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que $y_0(x) = Cx^5 - 3$ pour tout $x > 0$.
- La restriction de y_0 à $\mathbb{R}_-^*$ est une solution de $xy'(x) = 5y(x) + 15$ dans $\mathbb{R}_-^*$. Une étude similaire implique qu'il existe $C' \in \mathbb{R}$ tel que $y_0(x) = C'x^5 - 3$ pour tout $x < 0$.

- L'équation en $x=0$ donne $0 = 5y(0)+15$ (14)

donc $y_0(0) = -3$

Donc toute solution y_0 de $xy'(x) = 5y(x)+15$ vérifie, pour des valeurs $C, C' \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y_0(x) = Cx^5 - 3 & \text{si } x>0 \\ y_0(x) = -3 & \text{si } x = 0 \\ y_0(x) = C'x^5 - 3 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

Réciproquement, si y_0 est définie comme cela :

- En tout point $x \neq 0$, y_0 est dérivable et on a bien $x\,y_0'(x) = 5y_0(x)+15$ (~~car y_0~~

- ~~En $x=0$ on a $y_0(x)$~~

- On a $y_0(x)+3 = O(|x|^5)$ donc pour $x \to 0$, $\dfrac{y_0(x)-y_0(0)}{x} \longrightarrow 0$. Donc y_0 est dérivable en 0 et $0\,y_0'(0) = 5y_0(0)+15$ car $y_0(0) = -3$.

Donc y_0 est solution de $xy'(x) = 5y(x)+15$.

Résolution dans $\mathbb{R}_+^*$ et dans $\mathbb{R}$ de $xy'(x) = -2y(x)$.

- Dans $\mathbb{R}_+^*$, on obtient la solution générale $y(x) = C/x^2$

- Si y_0 est une solution dans $\mathbb{R}$, sa restriction à $\mathbb{R}_+^*$ est une solution dans $\mathbb{R}_+^*$ donc il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $y(x) = \dfrac{C}{x^2}$ pour tout $x>0$.

y est dérivable en 0 donc continue en ce point : $y_0(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} y(0)$ d'où $\dfrac{C}{x^2} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} y(0)$

ce qui n'est possible que si $C=0$.

~~De même~~ D'où $y_0(x)=0$ pour tout $x>0$
De la même manière on montre que
$y_0(x)=0$ pour tout $x<0$ et également
$y_0(0)=0$ car y_0 doit être dérivable, donc
continue en 0.
Donc la seule solution de $xy'(x)=-2y(x)$
sur $\mathbb{R}$ tout entier est la fonction nulle.

Ces deux derniers exemples montrent que la
résolution de $a(x)y'+b(x)y=f(x)$ est
nettement plus difficile lorsqu'on autorise
a à s'annuler en certains points.

7) Equation différentielle linéaire du second ~~membre~~
ordre à coefficients constants.

On a alors une équation de la forme
$ay''+by'+cy=f(x)$ où $a\neq 0$ (sinon
l'équation est du 1er ordre seulement),
b, c sont des réels quelconques et f est
une fonction d'un intervalle J vers $\mathbb{R}$, qu'on
supposera ici continue

- Cas sans second membre.

L'équation est $ay''+by'+cy=0$. On trouve
des solutions à cette équation en observant
que pour des fonctions proportionnelles à
$x\mapsto e^{\alpha x}$, la dérivation est équivalente à
la multiplication par α. ~~Ainsi, pour tout~~
~~$x\in\mathbb{R}$, si $y=e^{\alpha x}$~~ Donc si $y(x)=e^{\alpha x}$.

pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $ay''+by'+cy$
$=(a\alpha^2+b\alpha+c)y$.

Ainsi, $x \longmapsto e^{\alpha x}$ est solution de l'équation
$ay''+by'+cy$ si et seulement si α est
solution de l'équation en r : $ar^2+br+c=0$.
Cette équation est appellée équation caractéristique
de l'équation différentielle initiale.

Cette équation du second degré peut admettre
des racines complexes. Pour cette raison,
nous allons ici chercher les fonctions y de
$\mathbb{R}$ dans $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$ telles que $ay''+by'+cy=0$
en tout points d'un intervalle donné I.
(en général on prendra $I=\mathbb{R}$)
Ceci permettra d'utiliser des exponentielles
complexes sans restrictions. Pour retrouver
les solutions de I dans $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$ (c'est à dire
à valeurs réelles), il suffira de regarder
quelles sont les solutions de I dans $\mathbb{C}$ dont
toutes les valeurs prises sont réelles.
Une fois cette mise au point faite, (pour simplifier
on supposera toujours a, b, c réels), il y a
alors 3 cas possibles, selon la position des
racines de l'équation caractéristique.

- $\underline{1^{er}\text{ cas}}$: $ar^2+br+c=0$ a deux racines
réelles, c'est à dire $b^2-4ac>0$.

Si α et β sont ces racines, $x \mapsto e^{\alpha x}$ et
$x \mapsto e^{\beta x}$ sont solutions de $ay''+by'+cy=0$.

Comme $ay''+by'+cy=0$ est linéaire et (17)
homogène (sans second membre),
$y(x) = A e^{\alpha x} + B e^{\beta x}$ vérifie cette équation pour tous $A, B \in \mathbb{C}$, (quel que soit l'intervalle I considéré)

Si A et B sont réels, y est à valeurs réelles.

Réciproquement, si y est à valeurs réelles, A et B sont solutions du système ~~de 2 équations~~ de 2 équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} A + B = y(0) \\ Ae^{\alpha} + Be^{\beta} = y(1) \end{cases}$$

à coefficients réels. Comme le déterminant du système est $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\alpha} & e^{\beta} \end{vmatrix} = e^{\beta} - e^{\alpha} \neq 0$ (car $\alpha \neq \beta$) qui est réelle, et il y a une unique solution $A, B \in \mathbb{R}$.

Ainsi, on a trouvé les solutions suivantes (à valeurs complexes) :

$$\boxed{\begin{array}{l} y(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}, \quad \alpha, \beta \text{ racines réelles distinctes de } ar^2+br+c=0 \\ \qquad A, B \in \mathbb{C} \\ \text{Fonction à valeurs réelles si et seulement si } A, B \in \mathbb{R} \end{array}}$$

- <u>2^e cas</u> : $ar^2+br+c=0$ a deux racines complexes distinctes et conjuguées, c'est à dire $b^2-4ac<0$.

Dans ce cas, les racines peuvent être notées $\gamma + i\omega$ et $\gamma - i\omega$ où $\gamma \in \mathbb{R}$ et $\omega > 0$.
Comme précédemment, $y(x) = Ae^{(\gamma+i\omega)x} + Be^{(\gamma-i\omega)x}$
est une solution ~~à valeurs complexes pour tous $A, B \in \mathbb{R}$~~ ~~pour~~ l'équation $ay''+by'+c=0$

à valeurs complexes de l'équation $ay''+by'+cy=0$, pour tous $A, B \in \mathbb{C}$.

Cette solution peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$y(x) = e^{\gamma x}\left(A e^{i\omega x} + B e^{-i\omega x}\right)$$
$$= e^{\gamma x}\left(A\cos(\omega x) + iA\sin(\omega x) + B\cos(\omega x) - iB\sin(\omega x)\right)$$
$$= e^{\gamma x}\left(D\cos(\omega x) + E\sin(\omega x)\right)$$

où $D = A+B$, $E = i(A-B)$: en sens inverse, on a $A = \frac{D-iE}{2}$, $B = \frac{D+iE}{2}$.

Si D et E sont réels, y est à valeurs réelle ; réciproquement, si y est à valeurs réelle, $y(0) = D$ et $y\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = E e^{\pi\gamma/2\omega}$ sont réels et $D, E \in \mathbb{R}$.

On a ainsi les solutions suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= A e^{(\gamma+i\omega)x} + B e^{(\gamma-i\omega)x} \\ &= e^{\gamma x}\left(D\cos(\omega x) + E\sin(\omega x)\right) \end{aligned}}$$

où $D = A+B$, $E = i(A-B)$ et réciproquement $A = \frac{D-iE}{2}$, $B = \frac{D+iE}{2}$.
Solutions à valeurs réelles si et seulement si D et E sont réels.

. <u>3e cas</u> : $ar^2+br+c=0$ a une racine double, c'est à dire $b^2-4ac=0$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ cette racine. La fonction $x \mapsto e^{\alpha x}$ est donc solution de $ay''+by'+cy=0$

On montre que $x \mapsto x e^{\alpha x}$ est également solution. En effet, pour $y(x) = x e^{\alpha x}$, on a :

$$a y''(x) + b y'(x) + c y(x) = a(\alpha^2 x + 2\alpha)(e^{\alpha x})$$
$$+ b(\alpha x + 1)(e^{\alpha x}) + c x e^{\alpha x}$$
$$= x e^{\alpha x} \underbrace{(a\alpha^2 + b\alpha + c)}_{=0} + e^{\alpha x}(2\alpha a + b)$$
$$= e^{\alpha x}(2\alpha a + b)$$

Or dans le cas d'une racine double on trouve $\alpha = -\frac{b}{2a}$ soit $2\alpha a + b = 0$ et y est bien solution de $a y'' + b y' + c = 0$.

On a ainsi les solutions suivantes (puisque l'équation est linéaire homogène) :

$$\boxed{y(x) = (A + Bx) e^{\alpha x}, \text{ fonction à valeurs } \text{réelles si et seulement si } A, B \in \mathbb{R}.}$$

La partie "seulement si" se démontre de manière analogue aux 2 premiers cas : $A = y(0) \in \mathbb{R}$, $(A+B)e^{\alpha} = y(1) \in \mathbb{R}$ d'où $A \in \mathbb{R}$ et $B = y(1)e^{-\alpha} - A \in \mathbb{R}$.

Pour l'instant, nous n'avons pas a priori exclu qu'il y ait d'autres solutions à l'équation $a y'' + b y' + c y = 0$.. Ceci est l'objet de la propositions suivante :

<u>Proposition</u> : Les seules solutions de $a y'' + b y' + c y = 0$ définies sur un intervalle quelconque I, sont, pour $a \neq 0 \in \mathbb{R}$, $b, c \in \mathbb{R}$, les fonctions indiquées dans les encadrés précédents.

Preuve : Supposons que α et β soient les racines de $ar^2+br+c=0$: dans le cas d'une racine double α ~~et~~ β est cette racine. (Le cas de deux racines complexes est englobé ici : dans ce cas α et β sont complexes conjugués : avec les notations précédentes, $\alpha = \gamma + i\omega$ et $\beta = \gamma - i\omega$)

Si y_0 est une solution de $ay''+by'+cy=0$, posons $z_0 = y_0' - \alpha y_0$: z_0 est dérivable puisque y_0 est deux fois dérivable. (quel que soit l'intervalle I)

De plus : $z_0' - \beta z_0 = (y_0' - \alpha y_0)' - \beta(y_0' - \alpha y_0)$

$= y_0'' - (\alpha+\beta) y_0' + \alpha\beta y_0$.

D'après les relations entre les coefficients et les racines d'une équation du second degré, $\alpha+\beta = -\frac{b}{a}$ et $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ d'où :

$z_0' - \beta z_0 = y_0'' + \frac{b}{a} y_0' + \frac{c}{a} = \frac{1}{a}(ay_0''+by_0'+cy_0) = 0$

Ainsi z_0 est solution de l'équation du 1er ordre $z_0' = \beta z_0$: D'après l'étude précédemment faite de cette équation, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $z_0(x) = K e^{\beta x}$. On en déduit que $y_0'(x) - \alpha y_0(x) = K e^{\beta x}$, autrement dit, y_0 est solution de $y' - \alpha y = K e^{\beta x}$. La solution sans second membre est donnée par $y(x) = L e^{\alpha x}$ pour $L \in \mathbb{R}$, pour trouver une solution particulière, on utilise la méthode de la variation de la constante ; et on cherche une solution de la forme $L(x) e^{\alpha x}$.

On a $y' - \alpha y = L'(x) e^{\alpha x} + L(x) \alpha e^{\alpha x} - \alpha L(x) e^{\alpha x}$ 21

$= L'(x) e^{\alpha x}$ donc il faut résoudre

$L'(x) e^{\alpha x} = K e^{\beta x}$.

- Si $\alpha = \beta$ (cas d'une racine double, on trouve $L'(x) = K$, d'où une solution particulière $x \longmapsto K x e^{\alpha x}$, et la solution générale $y(x) = (L + Kx) e^{\alpha x}$: ainsi y_0 est de la forme indiquée dans l'encadré précédent.
- Si $\alpha \neq \beta$, on obtient $L'(x) = K e^{(\beta - \alpha) x}$ soit une solution particulière donnée par

$\dfrac{K e^{(\beta - \alpha) x}}{\beta - \alpha} e^{\alpha x}$. La solution générale est alors donnée par $y(x) = \left(K \dfrac{e^{(\beta - \alpha) x}}{\beta - \alpha} + L \right) e^{\alpha x}$

$= \dfrac{K}{\beta - \alpha} e^{\beta x} + L e^{\alpha x}$. Donc y_0 est également de la forme indiquée dans l'encadré (avec $A = L$ et $B = K/(\beta - \alpha)$).

- Cas avec second membre.

On a une équation de la forme $ay'' + by' + cy = f(x)$ où $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$ et f est une fonction de I vers $\mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ intervalle) ~~telle~~ que l'on supposera continue.

La solution générale de cette équation est obtenue en ajoutant une solution particulière (si elle existe) à la solution générale de l'équation sans second membre $ay'' + by' + cy = 0$.

Contrairement au cas du premier ordre, ~~il n'y a pas de méthode générale pour trouver une so~~ nous n'allons pas présenter ici de méthode générale pour trouver une solution particulière à $ay'' + by' + cy = f(x)$.

Néanmoins, pour certaines formes de fonctions f, il est possible de trouver une solution particulière ayant une forme explicite.

On peut montrer (nous n'allons pas le faire ici) que une solution particulière peut être obtenue dans les cas suivants.

Second membre $f(x)$	Forme d'une des solutions particulières à $ay'' + by' + cy = f(x)$
$f = \text{cste}$	$y = \begin{cases} \text{cste} & \text{si } c \neq 0 \\ \text{cste} \times x & \text{si } c = 0, b \neq 0 \\ \text{cste} \times x^2 & \text{si } c = b = 0, a \neq 0 \end{cases}$
f polynomiale	$y(x) = \begin{cases} Q(x) & \text{si } c \neq 0 \\ x\,Q(x) & \text{si } c = 0, b \neq 0 \\ x^2 Q(x) & \text{si } c = b = 0, a \neq 0 \end{cases}$ où Q est un polynôme de même degré que f
$f(x) = \alpha e^{kx}$ $k, \alpha \in \mathbb{R}$	$y(x) = \begin{cases} A e^{kx} & \text{si } k \text{ n'est pas racine de } ar^2 + br + c = 0 \\ A x e^{kx} & \text{si } k \text{ est racine simple} \\ A x^2 e^{kx} & \text{si } k \text{ est racine double} \end{cases}$ (A constant)
$f(x) = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \omega > 0$	$y(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ si $i\omega$ n'est pas racine de $ar^2 + br + c = 0$ $y(x) = x[A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)]$ si $i\omega$ est racine
$f(x) = P(x)e^{kx}$ P polynôme $k \in \mathbb{R}$	$y(x) = \begin{cases} Q(x)e^{kx} & \text{si } k \text{ n'est pas racine de } ar^2 + br + c = 0 \\ x\,Q(x)e^{kx} & \text{si } k \text{ est racine simple} \\ x^2 Q(x) e^{kx} & \text{si } k \text{ est racine double} \end{cases}$ Q polynôme de même degré que P
$f(x) = e^{kx} \times [\alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)]$ $\omega, k, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \omega > 0$	$y(x) = e^{kx}[A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)]$ si $(k + i\omega)$ n'est pas racine de $ar^2 + br + c = 0$ $y(x) = x e^{kx}[A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)]$ si $(k + i\omega)$ est racine

Notons que certains cas donnés dans ce tableau sont des cas particuliers d'autres (par exemple le 2^e et le 3^e cas sont des cas particuliers du 5^e)

De plus, Q, A ou B doivent être déterminés ~~en~~ en fonction de la valeur des coefficients impliqués dans la fonction f.

Exemple de résolution d'équations du 2^{nd} ordre à coefficients constants.

- $y'' + 2y' + 1 = 0$

Il y a une racine double -1 de l'équation caractéristique $r^2+2r+1=0$.

Donc les solutions de $y''+2y'+1=0$ sont les fonctions de la forme $\boxed{x \mapsto (A+Bx)e^{-x}}$ (fonctions à valeurs réelles si et seulement si A, B sont réels).

- $y'' + y' + 1 = 0$.

Il y a deux racines complexes conjuguées $j := -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{2i\pi/3}$ et $\bar{j} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{-2i\pi/3}$

Les solutions complexes sont données par

$y(x) = Ae^{jx} + Be^{\bar{j}x}$ où $A, B \in \mathbb{C}$,

soit $\boxed{y(x) = e^{-x/2}\left(D\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + E\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right)}$

où $D = A+B$ et $E = i(A-B)$

Elles sont à valeurs réelles ssi $D, E \in \mathbb{R}$.

• ~~Equation~~ $y''-y'=5$.

La solution générale de l'équation homogène est donnée par $y(x)=A+Be^{x}$

On cherche une solution particulière de la forme Kx d'après la $1^{ère}$ case du tableau. On a $(Kx)''-(Kx)'=5 \iff$

$-K=5 \iff K=-5$. Donc $x\mapsto -5x$ est une solution particulière : ainsi les solutions à valeurs réelles de $y''-y'=5$ sont données par

$$\boxed{y(x)=A+Be^{x}-5x \quad \text{où } A,B\in\mathbb{R}.}$$

• $y''+6y'+25y=\cos(x)$

La solution de l'équation homogène est obtenue en résolvant $r^2+6r+25=0$ soit

$r=-3\pm 4i$, on obtient

~~$y(x)=e^{-3x}[D\cos(4x)+E\sin(4x)]$~~

~~solution réelle si et seulement si $D,E\in\mathbb{R}$~~

$$y(x)=e^{-3x}\left[D\cos(4x)+E\sin(4x)\right]$$

On est dans le 4^{e} cas du tableau avec $\omega=1$ et $i\omega=i$ n'est pas racine de $r^2+6r+25=0$. Donc on cherche une solution de la forme $A\cos(x)+B\sin(x)$.

L'équation initiale s'écrit :

$$(-A\cos(x)-B\sin x)+6(-A\sin x+B\cos x)+25(A\cos x+B\sin x)=\cos x.$$

Donc pour qu'elle soit satisfaite il faut que :
$$\begin{cases} 24A + 6B = 1 \\ 24B - 6A = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24A + 6B = 1 \\ -24A + 96B = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24A + 6B = 1 \\ 102B = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = 1/102 \\ A = \frac{1}{24}(1-6B) = \frac{1}{24}\left(\frac{102-6}{102}\right) = \frac{1}{24}\cdot\frac{96}{102} = \frac{2}{51} \end{cases}$$

On en déduit que la solution générale est donnée par

$$\boxed{y(x) = \frac{2}{51}\cos x + \frac{1}{102}\sin x + e^{-3x}\left[D\cos(4x) + E\sin(4x)\right]}$$

- $y'' - y = \cos x + \operatorname{ch} x + x^4.$

Ici on n'a pas directement une forme donnée dans le tableau. Cependant, on peut appliquer le résultat suivant (principe de superposition) dont la preuve est immédiate :

Proposition : Si $y_1, \ldots, y_p$ sont des fonctions 2 fois dérivables telles que : pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, pour tout $x \in I$ (I intervalle de $\mathbb{R}$ donné au départ), on a :
$a y_j''(x) + b y_j'(x) + c y_j(x) = f_j(x)$, alors la fonction $y_1 + \ldots + y_p$ est solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = f(x)$ où $f(x) = f_1(x) + \ldots + f_p(x)$

Pour trouver une solution particulière de l'équation donnée au départ, il suffit donc d'additionner des solutions particulières aux équations suivantes :

$$\begin{cases} y''-y=\cos x \\ y''-y=e^{x}/2 \\ y''-y=e^{-x}/2 \\ y''-y=x^4 \end{cases}$$

Les racines de $r^2-1=0$ sont 1 et -1.

* Pour $y''-y=\cos x$ on se réfère à la 4^{e} ligne du tableau et on cherche une solution de la forme $y(x)=A\cos x+B\sin x$ (i n'est pas racine de $r^2-1=0$).
$y''(x)-y(x)$ vaut alors $-2A\cos x-2B\sin x$ donc on a une solution pour $A=-1/2$ et $B=0$, soit
$x\longmapsto -\frac{1}{2}\cos x$

* Pour $y''-y=\frac{e^x}{2}$ on cherche une fonction de la forme Axe^{x} (le facteur x étant dû au fait que 1 est racine simple de $r^2-1=0$).
On obtient l'équation $A(2e^x+xe^x)-Axe^x=\frac{e^x}{2}$
soit $A=1/4$ soit $y(x)=\frac{x}{4}e^x$

* Pour $y''-y=\frac{e^{-x}}{2}$, on cherche une fonction de la forme Axe^{-x} (-1 est aussi racine simple de $r^2-1=0$). On a l'équation :
$A(-2e^{-x}+xe^{-x})-Axe^{-x}=\frac{e^{-x}}{2}$ soit $A=-1/4$
et $y(x)=-\frac{x}{4}e^{-x}$

• Pour $y''-y=x^4$ on cherche y sous forme d'un polynôme de degré 4. soit

$$y(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0.$$

On a

$$y''(x)=12a_4x^2+6a_3x+2a_2$$

d'où l'équation

$$-a_4x^4-a_3x^3+(12a_4-a_2)x^2+(6a_3-a_1)x+(2a_2-a_0)=x^4$$

, soit

$$\begin{cases}-a_4=1\\-a_3=0\\12a_4-a_2=0\\6a_3-a_1=0\\2a_2-a_0=0\end{cases}\iff\begin{cases}a_4=-1\\a_3=0\\a_2=-12\\a_1=0\\a_0=-24\end{cases}$$

soit $y(x)=-x^4-12x^2-24$

Une solution particulière à $y''-y=\cos x+\operatorname{ch}x+x^4$ est obtenue en ajoutant les solutions précédentes, soit :

$$y(x)=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{x}{4}e^x-\frac{x}{4}e^{-x}-x^4-12x^2-24$$

Les solutions à $y''-y=0$ sont données par $y(x)=Ae^x+Be^{-x}$ (réelles si et seulement si $A,B\in\mathbb{R}$) donc la solution générale de $y''-y=\cos x+\operatorname{ch}x+x^4$ est donnée par :

$$\boxed{y(x)=\left(A+\frac{x}{4}\right)e^x+\left(B-\frac{x}{4}\right)e^{-x}-\frac{1}{2}\cos x-x^4-12x^2-24.\quad A,B\in\mathbb{R}}$$

8) Résultats d'existence et d'unicité des solutions : cas des équations linéaires du 1er ordre.

On considère trois fonctions a, b, f d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$, continues, a ne s'annulant pas. On a montré précédemment que l'équation $a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = f(x)$ admettait ~~les solutions de la f~~ les solutions suivantes :

$$y(x) = \left(G_0(x) + C\right) \exp\left(F_0(x)\right),$$

F_0 étant une primitive de $x \mapsto -\frac{b(x)}{a(x)}$ et G_0 une primitive de $x \mapsto \exp(-F_0(x)) \frac{f(x)}{a(x)}$,

C une constante.

Si $x_0 \in I$, on peut chercher les solutions au problème suivant : trouver les fonctions $y : I \to \mathbb{R}$ telles que $a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = f(x)$ et vérifiant en plus la condition suivante : $y(x_0) = t$ où t est un réel fixé à l'avance.

Ce problème s'appelle problème de Cauchy.

Dans ce cas, on a le résultat suivant.

Proposition : Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, pour toutes fonctions $a, b, f : I \to \mathbb{R}$ continues, a ne s'annulant pas, et pour tous $t \in \mathbb{R}, x_0 \in I$, il existe une unique fonction $y : I \to \mathbb{R}$ telle que $a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$ et $y(x_0) = t$.

Preuve : Une fonction y est solution au problème de Cauchy si et seulement si

$$\begin{cases} \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ y(x) = \left(G_0(x) + C\right) \exp\left(F_0(x)\right) \\ y(x_0) = t \end{cases}$$

Si la 1ère condition est vérifiée, la 2e l'est si et seulement si $(G_0(x_0)+C)\exp(F_0(x_0)) = t$ soit $C = t\exp(-F_0(x_0)) - G_0(x_0)$

Il y a donc une unique valeur de C possible, et donc une unique solution au problème de Cauchy, donnée finalement par :

$$y(x) = \left(G_0(x) + t\exp(-F_0(x_0)) - G_0(x_0)\right)\exp(F_0(x)).$$

<u>Exemples :</u> • $\underline{(1+x^2)\,y'(x) + y(x) = 1 + x + x^2,}$ $\underline{y(0)=0.}$ $(I=\mathbb{R})$

On a vu que les solutions à l'équation différentielle étaient données par :

$y(x) = x + C\exp(-\operatorname{Arctan} x)$ où $C \in \mathbb{R}$.

Pour avoir $y(0)=0$ on doit prendre $C=0$

d'où $y(x)=x$.

• $\underline{x\,y'(x) = 5y(x)+15,\quad y(1)=7}$ $(I=\mathbb{R}_+^*)$

La solution générale est donnée par $y(x) = Cx^5-3$ $(C\in\mathbb{R})$. Pour avoir la condition $y(1)=7$ il faut prendre $C=10$ d'où la solution au problème de Cauchy : $y(x)=10x^5-3$

• $\underline{x\,y'(x) = 5y(x)+15,\quad y(0)=0}$. $\underline{I=\mathbb{R}}$.

Toute solution à l'équation différentielle doit vérifier $0\,y'(0) = 5y(0)+15$ d'où $y(0)=-3$: le problème de Cauchy n'admet ici pas de solution. Mais à cause de l'annulation en 0 du facteur devant $y'(x)$, on <u>ne peut pas appliquer</u> la proposition précédente.

9) Résultats d'existence et d'unicité des solutions : cas des équations linéaire du second ordre à coefficients constants.

On considère $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue de $I \subset \mathbb{R}$ (intervalle) dans $\mathbb{R}$.
On suppose que l'équation $ay'' + by' + cy = f(x)$ admet au moins une solution y_0 ("solution particulière") définie sur I. L'ensemble des solutions réelles est alors donné de la façon suivante :

- Si $ar^2 + br + c = 0$ a deux racines réelles α, β distincts, les solutions sont de la forme : $y(x) = y_0(x) + Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$ où $A, B \in \mathbb{R}$.
- Si $ar^2 + br + c = 0$ a deux racines complexes distinctes conjuguées $\gamma + i\omega$ et $\gamma - i\omega$, les solutions sont $y(x) = y_0(x) + e^{\gamma x}(D\cos(\omega x) + E\sin(\omega x))$ $(D, E \in \mathbb{R})$
- Si $ar^2 + br + c = 0$ a ~~deux~~ une racine double $\alpha \in \mathbb{R}$, les solutions sont $y(x) = y_0(x) + e^{\alpha x}(A + Bx)$ $(A, B \in \mathbb{R})$

Pour avoir une unique fonction, il est naturel d'ajouter deux contraintes.
Une première possibilité est de considérer deux valeurs de la fonction y, donc de chercher les solutions telles que $y(x_0) = t_0$, $y(x_1) = t_1$ où $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $x_0, x_1 \in I$ sont fixés, avec $x_0 \neq x_1$.
Une autre possibilité est de considérer les contraintes $y(x_0) = t_0$, $y'(x_0) = t_1$ pour $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in I$

Ce dernier problème s'appelle problème de Cauchy, comme dans le cas des équations du 1er ordre. On a le résultat suivant:

Proposition : Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, pour tous $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ continue tels que l'équation $ay'' + by' + cy = f(x)$ admette au moins une solution, et pour tous $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{R}$ au problème de Cauchy:

$$\begin{cases} ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in I \\ y(x_0) = t_0, \ y'(x_0) = t_0 \end{cases}$$

Preuve : On a, par hypothèse l'existence d'une solution particulière y_0 à l'équation différentielle

. Supposons que $ar^2 + br + c = 0$ admette deux racines distinctes α, β, réelles ou complexes conjuguées.

Les fonctions de $I \to \mathbb{C}$ vérifiant l'équation différentielle sont alors données par:

$$y(x) = y_0(x) + Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} \quad \text{où } A, B \in \mathbb{C}$$

Une telle fonction vérifie $y(x_0) = t_0$, $y'(x_0) = t_1$ si et seulement si:

$$\begin{cases} y_0(x_0) + Ae^{\alpha x_0} + Be^{\beta x_0} = t_0 \\ y_0'(x_0) + A\alpha e^{\alpha x_0} + \beta B e^{\beta x_0} = t_1 \end{cases}$$

Ceci est un système linéaire de 2 équations à deux inconnues A et B. Le déterminant est

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha x_0} & e^{\beta x_0} \\ \alpha e^{\alpha x_0} & \beta e^{\beta x_0} \end{vmatrix} = e^{(\alpha+\beta)x_0}(\beta - \alpha) \neq 0 .$$

Donc il y a une solution unique et le problème de Cauchy admet une solution unique à valeurs complexes

Si y est cette solution ; on a :
$\begin{cases} ay''+by'+cy = f(x) \\ y(x_0)=r_0 \ , \ y'(x_0)=r_1 \end{cases}$ et si $\bar{y}$ désigne la fonction $x \longmapsto \overline{y(x)}$, on a $\bar{y}'(x) = \overline{y'(x)}$ et $\bar{y}''(x) = \overline{y''(x)}$ d'où
$\begin{cases} a\bar{y}''+b\bar{y}'+c\bar{y} = \overline{f(x)} = f(x) \text{ (car } f \text{ est à valeurs réelles)} \\ \bar{y}(x_0)=\bar{r}_0=r_0 \ , \ \bar{y}'(x_0) = \bar{r}_1 = r_1 \end{cases}$

Donc $\bar{y}$ est aussi solution du problème de Cauchy : par unicité, $\bar{y}=y$ donc y est à valeurs réelles et le problème de Cauchy admet une unique solution à valeurs réelles

---

• Supposons que $ar^2+br+c=0$ admette une racine double $\alpha \in \mathbb{R}$.
On a alors $y(x) = y_0(x) + (A+Bx)e^{\alpha x}$ pour $A, B \in \mathbb{R}$, et les conditions $y(x_0)=r_0$, $y'(x_0)=r_1$ donnent le système d'équations :
$\begin{cases} y_0(x_0) + Ae^{\alpha x_0} + Bx_0e^{\alpha x_0} = r_0 \\ y_0'(x_0) + A\alpha e^{\alpha x_0} + B(\alpha x_0+1)e^{\alpha x_0} = r_1 \end{cases}$
de déterminant $\begin{vmatrix} e^{\alpha x_0} & x_0 e^{\alpha x_0} \\ \alpha e^{\alpha x_0} & (\alpha x_0+1)e^{\alpha x_0} \end{vmatrix} = e^{2\alpha x_0}(\alpha x_0+1-\alpha x_0)$
$= e^{2\alpha x_0} \neq 0$

D'où l'unicité de la solution au problème de Cauchy.

<u>Remarque</u> : L'autre problème "naturel" est de chercher les solutions ~~de la forme~~ telles que $y(x_0)=r_0$, $y(x_1)=r_1$ où $x_0 \neq x_1$, r_0, r_1 sont fixées. Ce problème n'a pas toujours de solution. Par exemple, si $y''+y=0$ on a A, B tels que $y(x) = A\cos x + B\sin x$, donc y est (2π)-périodique : il est alors impossible d'avoir (par exemple), $y(0)=0$, $y(2\pi)=1$.

<u>Exemple</u> : On considère l'équation $y''-y=\cos x+\operatorname{ch} x + x^4$ sur $\mathbb{R}$. La solution générale à cette équation est donnée (voir précédemment) par
$y(x) = \left(A+\frac{x}{4}\right)e^x + \left(B-\frac{x}{4}\right)e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x - x^4 - 12x^2 - 24$
pour $A, B \in \mathbb{R}$

- Si on prend comme conditions supplémentaire $y(0) = y'(0) = 0$, on calcule :

$$y'(x) = \left(A + \frac{x}{4}\right)e^{x} + \frac{1}{4}e^{x} - \left(B - \frac{x}{4}\right)e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{2}\sin x$$
$$- 4x^3 - 24x\,,$$

$$y'(0) = A + \frac{1}{4} - B - \frac{1}{4} = A - B$$

alors que $y(0) = A + B - \frac{1}{2} - 24 = A + B - \frac{49}{2}$

La condition $y(0) = y'(0) = 0$ est donc équivalente

à $\begin{cases} A - B = 0 \\ A + B = \frac{49}{2} \end{cases}$ soit $A = B = \frac{49}{4}$.

La solution au problème de Cauchy est donc donnée par :

$$y(x) = \frac{49 + x}{4}e^{x} + \frac{49 - x}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x - x^4 - 12x^2 - 24$$

L'existence et l'unicité de la solution vérifiant ~~et les~~ les conditions $y(x_0) = r_0$, $y'(x_1) = r_1$, ~~conditions $y(x_0) = r_0$, $y'(x_0) = r_1$~~, est démontrée ci-dessus sous condition d'existence d'une solution à $ay'' + by' + cy = f(x)$. Il est possible de prouver que cette existence a toujours lieu si f est une fonction continue :

<u>Proposition</u> : Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, pour tous $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$, et pour toute fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$, il existe au moins une solution à l'équation $ay'' + by' + cy = f(x)$ dans I, et donc les conclusions de la proposition précédente s'appliquent

__Preuve__ : Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ les racines de $ar^2+br+c=0$: si $ar^2+br+c=0$ a une racine double, $\alpha=\beta$.

Supposons qu'on ait des fonctions y_0 et z_0 de I dans $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$ telle que

$$\begin{cases} z_0 = y_0' - \alpha y_0 \\ z_0' - z_0\beta = f(x)/a \end{cases}$$ en tout point de I

On a alors :

$$\frac{f(x)}{a} = z_0' - z_0\beta = (y_0' - \alpha y_0)' - \beta(y_0' - \alpha y_0)$$
$$= y_0'' - y_0'(\alpha+\beta) + \alpha\beta y_0 = y_0'' + \frac{b}{a}y_0' + \frac{c}{a}y_0$$

et donc y_0 est solution de $ay''+by'+cy=f(x)$.
Cette solution n'est pas nécessairement à valeurs réelles. Cependant, on a $(\mathrm{Re}(y_0))' = \mathrm{Re}(y_0')$ et $(\mathrm{Re}(y_0))'' = \mathrm{Re}(y_0'')$ donc :

$$a(\mathrm{Re}(y_0))'' + b(\mathrm{Re}(y_0))' + c(\mathrm{Re}(y_0)) = \mathrm{Re}(f(x)) = f(x)$$

car f est à valeurs réelles

Ainsi $\mathrm{Re}(y_0)$ est également solution de $ay''+by'+cy=f(x)$, ce qui achève la preuve de la proposition, à condition qu'on puisse trouver au moins une solution à valeurs complexes de

$$\begin{cases} z_0 = y_0' - \alpha y_0 \\ z_0' - \beta z_0 = f(x)/a \end{cases}.$$

Ceci revient à résoudre successivement deux équations linéaires du 1er ordre à coefficients constants. En toute rigueur, ceci n'a pas été fait précédemment car les coefficients ici sont complexes. Cependant on peut reprendre les mêmes méthodes : par exemple celle de la variation de la constante.

. L'équation $z_0' - \beta z_0 = 0$ admet comme solutions $Ce^{\beta x}$ $(C \in \mathbb{C})$ (qui ne sont pas à valeurs réelles si C ou $\beta \notin \mathbb{R}$).

On cherche une solution à $z_0' - \beta z_0 = \frac{f(x)}{a}$ de la forme $C(x)e^{\beta x}$, ce qui donne

$$C'(x)e^{\beta x} + \beta C(x) e^{\beta x} - \beta C(x) e^{\beta x} = \frac{f(x)}{a}$$

soit $C'(x) = \frac{f(x)}{a} e^{-\beta x}$. En prenant pour C une primitive de $x \mapsto \frac{f(x)}{a} e^{-\beta x}$, on obtient ainsi au moins une fonction $z_0 : I \to \mathbb{C}$ telle que $z_0' - \beta z_0 = f(x)/a$.

. Il reste maintenant à trouver y_0 telle que $y_0' - \alpha y_0 = z_0$ où z_0 est la fonction trouvée juste avant. Une solution est obtenue en posant $y_0(x) = \tilde{C}(x) e^{\alpha x}$ où $\tilde{C}$ est une primitive de $x \mapsto z_0(x) e^{-\alpha x}$.

Remarque : Nous avons prouvé l'existence et l'unicité des solutions aux problèmes de Cauchy suivants :

$$(*) \begin{cases} y'(x) = -\frac{b(x)}{a(x)} y(x) + \frac{f(x)}{a(x)} \\ y(x_0) = r_0 \end{cases}$$

, a, b, f continues de I dans $\mathbb{R}$, a ne s'annulant pas ($x_0 \in I$, $r_0 \in \mathbb{R}$.)

$$(**) \begin{cases} y''(x) = -\frac{b}{a} y'(x) - \frac{c}{a} y(x) + \frac{f(x)}{a} \\ y(x_0) = r_0, \ y'(x_0) = r_1 \end{cases}$$

, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$, f continue de I dans $\mathbb{R}$ ($x_0 \in I$, $r_0, r_1 \in \mathbb{R}$)

Ici, nous avons mis les équations différentielles sous forme résolue.

Il est alors naturel de considérer un problème de Cauchy plus général :

$$\begin{cases} y^{(k)}(x) = \Phi(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(k-1)}(x)) \\ y(x_0) = r_0, \ y'(x_0) = r_1, \ldots, y^{(k-1)}(x_0) = r_{k-1} \end{cases}$$

où Φ est une fonction donnée de $I \times \mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}$, où $x_0 \in I$, $r_0, \ldots, r_{k-1} \in \mathbb{R}$ sont fixés.

Un résultat, appelé théorème de Cauchy-Lipschitz donne l'existence et l'unicité de la solution au problème de Cauchy ci-dessus, lorsque Φ satisfait certaines conditions de régularités (que nous n'allons pas détailler ici).