Condition d'existence de temps forts de stationnarité pour des chaînes de Markov à temps continu

Guillaume Copros

1 Introduction

1.1 Historique

La convergence des processus de Markov vers leur loi stationnaire a été beaucoup étudiée par des outils analytiques. Par exemple, des théorèmes classiques permettent de trouver un temps t_0 déterministe auquel la loi d'un processus X sera arbitrairement proche de sa loi stationnaire, au sens de la distance en variation totale.

Une approche plus probabiliste consiste à chercher un temps T aléatoire pour lequel X_T est distribué *exactement* selon sa loi stationnaire, et ce indépendamment de T. Un tel temps aléatoire est appelé *temps fort de stationnarité* (en anglais : *strong stationary time*), et sera défini plus précisément en (3). Cet outil a été introduit pour la première fois par Aldous et Diaconis [1] dans le cadre des chaînes de Markov à temps discret et à espace d'état fini. Diaconis et Fill [3] ont ensuite introduit une méthode de construction de temps forts de stationnarité par de l'entrelacement de processus, toujours dans le même cadre. Ce travail a ensuite été retranscrit dans le cadre des chaînes de Markov à temps continu par Fill [7] et [6].

Plus récemment, les temps forts de stationnarité ont été étudiés, entre autres, par Lyzinski et Fill [5], Miclo [12] Gong, Mao et Zhang [10] en temps continu, et Lorek et Szekli [11] en temps discret.

Ils ont aussi été utilisés par Diaconis et Saloff-Coste [4] pour étudier le phénomène de cut-off, Fill [8] pour le perfect sampling ou encore par Fill et Kahn [9] pour le fastest mixing.

Une question qui se pose naturellement est alors : existe-t-il toujours un temps fort de stationnarité fini ? Diaconis et Fill [3] ont prouvé que la réponse est oui lorsque l'espace d'état est fini, mais malheureusement cela n'est plus vrai sur un espace infini, même dénombrable. Bien sûr, l'existence ou non d'un temps fort de stationnarité fini dépend de la distribution initiale : lorsque celle-ci est la même que la loi stationnaire, alors 0 est un temps fort de stationnarité ! On peut alors se demander à quelle condition cette existence est possible, pour un processus donné mais pour toute loi initiale. Miclo [12] a ainsi exhibé ces conditions d'existence dans le cadre des diffusions sur $\mathbb{R}$. Notre but ici est de les donner pour des marches aléatoires à temps continu sur une certaine classe de graphes discrets.

Dans la section 2, on généralisera un résultat de Fill [7], que l'on appliquera ensuite à des processus de vie et de mort sur $\mathbb{Z}$ dans la section 3 puis à des marches aléatoires sur un certain type de graphes dans la section 4.

1.2 Quelques rappels sur les processus de Markov

Ce qui suit rappelle brièvement la caractérisation des chaînes de Markov à temps continu en terme de générateur et de semi-groupe. Pour plus de détails, on renvoie à Norris [14]. Les processus stochastiques seront définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, sous-entendu par la suite, et que l'on supposera "suffisamment grand".

Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus stochastique, on notera $X_{[0,t]}$ sa trajectoire jusqu'au temps t, $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$ la filtration engendrée par X et $\mathcal{F}_\infty^X$ la tribu engendrée par la réunion des $\mathcal{F}_t^X$. Si de plus τ est un $(\mathcal{F}_t^X)$-temps d'arrêt, on note :

$$(\mathcal{F}_\tau^X) := \{A \in \mathcal{F}_\infty^X :\ A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t^X,\ \forall t \geq 0\}$$

Un temps aléatoire T est appelé *temps d'arrêt randomisé* relativement à X si il existe une sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{A}$, indépendante de $\mathcal{F}_\infty^X$, telle que T soit un temps d'arrêt relativement à la filtration $(\sigma(\mathcal{F}_t^X, \mathcal{G}))_{t\geq 0}$ (cf Fill [6], section 2.2).

Soit $\mathcal{S}$ un espace topologique dénombrable (pas nécessairement muni de la topologie discrète). On ajoute à $\mathcal{S}$ un point isolé Δ, appelé *point cimetière* et on prolonge n'importe quelle fonction réelle f de $\mathcal{S}$ à $\mathcal{S} \cup \{\Delta\}$ en posant $f(\Delta) = 0$. Une *Q-matrice stable et conservatrice* sur $\mathcal{S}$ est une matrice $(\mathcal{L}_{x,y})_{(x,y)\in\mathcal{S}^2}$ vérifiant :

$$0 \leq \mathcal{L}_{x,y} < +\infty, \quad \forall x \neq y \in \mathcal{S}$$

$$\sum_{y\neq x} \mathcal{L}_{x,y} = -\mathcal{L}_{x,x} < +\infty, \quad \forall x \in \mathcal{S}$$

Pour toute Q-matrice $\mathcal{L}$, on notera $\mathcal{L}_x := -\mathcal{L}_{x,x}$, et on prolonge $\mathcal{L}$ à $\mathcal{S} \cup \{\Delta\}$ en posant $\mathcal{L}_{\Delta,x} = \mathcal{L}_{x,\Delta} = \mathcal{L}_{\Delta,\Delta} = 0$. Ajoutée à une mesure de probabilité μ_0 sur $\mathcal{S}$, une Q-matrice $\mathcal{L}$ définit un processus X à valeur dans $\mathcal{S} \cup \{\Delta\}$, où Δ est un point cimetière n'appartenant pas à $\mathcal{S}$, par l'intermédiaire de sa chaîne de sauts et de ses temps de sauts :

- $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov à temps discret, de loi initiale μ_0 et de matrice de transition $\left((1-\delta_{x,y})\dfrac{\mathcal{L}_{x,y}}{\mathcal{L}_x}\right)_{(x,y)\in\mathcal{S}^2}$, où $\delta_{x,y}$ est le symbole de Kronecker, qui vaut 1 lorsque $x = y$ et 0 sinon.
- $T_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, connaissant $Y_0, \ldots, Y_n$ les variable $T_1 - T_0, \ldots, T_n - T_{n-1}$ sont indépendantes, de loi exponentielle de paramètres respectifs $\mathcal{L}_{Y_0}, \ldots, \mathcal{L}_{Y_{n-1}}$.
- Pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [T_i, T_{i+1}[\,,\ X_t = Y_i$.
- On définit $T := \lim_{n\to\infty} T_n$. Si $T < \infty$, on pose $X_t = \Delta$ pour tout $t \geq T$.

Ce processus est markovien, homogène, et ses trajectoires sont continues à droite et admettent une limite à gauche (càdlàg). De plus, cette construction détermine de manière unique la loi de X. Dans la suite, on dira simplement que $\mathcal{L}$ est un générateur sur $\mathcal{S}$, et que X est un *processus minimal* de générateur $\mathcal{L}$ et de loi initiale μ_0, ou seulement de générateur $\mathcal{L}$ lorsque la loi initiale n'a pas d'importance. Le temps T est appelé *temps d'explosion* de X, et l'on verra dans la section 2.2 comment dans certains cas on peut définir un processus non-minimal, c'est-à-dire qui ne soit pas "tué" au temps d'explosion. Dans le cas où $T = \infty$ presque sûrement pour toute loi initiale, le générateur $\mathcal{L}$ (ou le processus X) est dit non explosif. Il est dit récurrent positif (respectivement irréductible, réversible) si la chaîne $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente positive (resp. irréductible).

La loi d'un tel processus est aussi caractérisée par ses lois fini-dimensionnelles, c'est-à-dire l'ensemble des

$$\mathbb{P}(X_{t_1} = x_1, \cdots, X_{t_n} = x_n)$$

avec $n \in \mathbb{N},\ 0 \leq t_1 < \cdots < t_n < \infty$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{S}$. La *fonction de transition* de X est définie par :

$$P_{x,y}(t) = \mathbb{P}(X_t = y \mid X_0 = x)$$

et constitue donc (combiné avec une loi initiale μ_0) une autre manière de caractériser la loi de X, par l'intermédiaire de ses lois fini-dimensionnelles. Une fonction de transition définit un *semi-groupe* $(P(t))_{t\geq 0}$ de matrices sous-stochastiques, qui peuvent être élargies sur $\mathcal{S} \cup \{\Delta\}$ de manière à être rendues stochastiques.

Une semi-groupe $P(\cdot)$ est une *solution des équations de Kolmogorov* associées à $\mathcal{L}$ si pour tout $t \geq 0$ on a les égalités matricielles :

$$P'(t) = \mathcal{L}P(t) \qquad \text{(équation backward)} \tag{1}$$

$$P'(t) = P(t)\mathcal{L} \qquad \text{(équation forward)} \tag{2}$$

et c'est la solution minimale de l'équation backward (respectivement forward) si pour toute autre solution $\tilde{P}(\cdot)$ on a $P_{x,y}(t) \leq \tilde{P}_{x,y}(t)$, pour tout $x, y \in \mathcal{S}$ et tout $t \geq 0$. On rappelle que la solution minimale existe (théorème 2.8.3 et 2.8.6 de [14]), et est nécessairement unique par définition.

Chacune des trois conditions suivantes est impliquée par les deux autres :
— X est un processus minimal associé à $\mathcal{L}$
— X est un processus minimal de semi-groupe $P(\cdot)$
— $P(\cdot)$ est la solution minimale de l'équation backward (respectivement forward) associée à $\mathcal{L}$

Bien que le point de vue adopté soit celui que l'on vient de présenter, on rappelle également un résultat utile au point de vue fonctionnel. Soit $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ l'ensemble des fonctions réelles bornées sur $\mathcal{S}$. On identifie une fonction $f \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$ avec un vecteur colonne indexé par $\mathcal{S}$, et dans ce cas $P(\cdot)$ et $\mathcal{L}$ agissent sur $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ par multiplication matricielle.

Si X est un processus minimal de générateur $\mathcal{L}$ et de temps de saut $\tau_n,\ n \in \mathbb{N}$, alors pour toute fonction $f \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$ et tout $n \in \mathbb{N}$, le processus :

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathcal{L}[f](X_s)\mathrm{d}s$$

est une martingale relativement à la filtration $\mathcal{F}^X$.

1.3 Temps forts de stationnarité et dualité

On rentre maintenant plus spécifiquement dans la théorie des temps forts de stationnarité, en rappelant les principales définitions et propriétés énoncées par Fill [6] et qui seront utilisées ici.

Soient $(X_t)_{t\geq 0}$ une chaîne de Markov sur un ensemble dénombrable $\mathcal{S}$, récurrente positive, irréductible et non explosive, μ_t sa loi au temps $t \geq 0$ et μ_∞ sa loi stationnaire. Un *temps fort de stationnarité* T de X est un temps d'arrêt randomisé relativement à X vérifiant :

$$\mathscr{L}(X_T \mid T,\ T < \infty) = \mathscr{L}(X_T \mid T < \infty) = \mu_\infty \tag{3}$$

On dit que T est un temps fort de stationnarité fini si $T < +\infty$ presque sûrement. Cet outil permet de majorer la *séparation* entre μ_t et μ_∞, définie par :

$$\mathfrak{s}(t) := \sup_{m\in\mathcal{S}} \left(1 - \frac{\mu_t(m)}{\mu_\infty(m)}\right)$$

puisqu'on a, pour tout $t \geq 0$:

$$\mathfrak{s}(t) \leq \mathbb{P}(T > t)$$

Lorsque l'inégalité ci-dessus est une égalité, T est appelé *temps à la stationnarité* (*time to stationarity*). On rappelle que la fonction de séparation est un majorant de la distance en variation totale, et donc que les temps forts de stationnarités peuvent être utilisés pour étudier la vitesse de convergence en variation totale.

En pratique, pour construire un temps fort de stationnarité, on utilisera souvent (et tout le temps dans cet article) la notion de *dual de stationnarité forte* (*strong stationary dual*), définie en temps continu par Fill [7], section 2.1. Un processus $(X_t^*)_{t\geq 0}$, défini sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que X, à espace d'état dénombrable $\mathcal{S}^*$ et ayant un état absorbant ∞, est un dual de stationnarité forte pour X si les deux conditions suivantes sont satisfaites pour tout $t \geq 0$:

$$\mathscr{L}(X_t^* \mid \mathcal{F}_\infty^X) = \mathscr{L}(X_t^* \mid \mathcal{F}_t^X) \tag{4}$$

$$\mathscr{L}(X_t \mid \mathcal{F}_t^{X^*}) = \mu_\infty \quad \text{sur l'ensemble } \{X_t^* = \infty\} \tag{5}$$

La relation (4) signifie que X et X^* sont adaptés à une même filtration, ou de manière équivalente, que X^* est indépendant du futur de X connaissant son passé. On peut montrer que le temps d'absorption d'un dual de stationnarité forte est un temps fort de stationnarité pour X. Réciproquement, à partir d'un temps fort de stationnarité, on peut construire un dual de stationnarité forte de manière canonique (voir Fill [7], Theorem 1). Lorsque le temps d'absorption du dual est un temps à la stationnarité, on dit que le dual est *fin* (anglais : *sharp*).

Si Λ est un noyau de transition de $\mathcal{S}^*$ vers $\mathcal{S}$, c'est-à-dire :

$$\forall x^* \in \mathcal{S}^*, \quad \sum_{x\in\mathcal{S}} \Lambda(x^*, x) = \sum_{x\in\mathcal{S}} |\Lambda(x^*, x)| = 1$$

et X^* est un processus de Markov à valeurs dans $\mathcal{S}^*$, on dit que X et X^* sont Λ-*liés* ou *entrelacés par* Λ si :

$$\mathscr{L}(X_t \mid \mathcal{F}_t^{X^*}) = \Lambda(X_t^*, \cdot) \tag{6}$$

Fill [7] a montré que, dans le cadre de ses *General settings*, un tel couplage existe à condition que les générateurs $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^*$ de X et X^* et leurs lois initiales μ_0 et μ_0^* respectivement soient en *dualité algébrique* :

$$\begin{cases} \mu_0^*\Lambda = \mu_0 \\ \mathcal{L}^*\Lambda = \Lambda\mathcal{L} \end{cases}$$

Dans la section 2 nous étendrons ce résultat au cadre des chaînes de Markov sur des graphes dénombrables ne contenant qu'un nombre fini de sommets de degré strictement plus grand que deux.

On considère un graphe discret G, simple, connexe et non orienté. On appelle *branches infinies* de G les parties connexes formées d'un nombre infini de points de degré 2, maximales au sens de l'inclusion. Une définition plus précise sera proposée en section 4. On suppose alors que G est constitué d'une nombre fini de branches infinies, plus éventuellement un nombre fini de points de degrés finis. S'il n'y a que des branches infinies, alors il y en a une seule et $G = \mathbb{Z}$. Ce cas particulier est traité dans la section 3. Sinon, chacune des N branches infinies (notées Q_i, $i \in I := [\![1, N]\!]$) est isomorphe en tant que graphe à $\mathbb{N}$, et on note $\varphi_i : \mathbb{N} \to G$ les isomorphismes correspondant. Un tel graphe est représenté dans la figure 1.

On se donne ensuite un générateur $\mathcal{L}$ sur G, tel que pour tout $x \neq y \in G$, $\mathcal{L}_{x,y} \neq 0$ si et seulement si x et y sont adjacents. La structure de graphe de G n'apparaissant qu'à travers le générateur, on peut aussi faire le choix de se donner *a priori* un générateur sur un ensemble dénombrable, et de munir cet ensemble de la bonne structure de graphe. C'est la démarche qui est choisie dans la section 4. On suppose que $\mathcal{L}$ est récurrent positif et non explosif. Cela se traduit par les conditions :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^i(n) < \infty, \qquad \forall i \in [\![1, N]\!] \tag{7}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\mu^i(n)\mathcal{L}_{\varphi_i(n),\varphi_i(n+1)}} \sum_{m=0}^{n} \mu^i(m) = \infty \qquad \forall i \in [\![1, N]\!] \tag{8}$$

où :

$$\mu^i(n) := \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\mathcal{L}_{\varphi_i(k),\varphi_i(k+1)}}{\mathcal{L}_{\varphi_i(k+1),\varphi_i(k)}} \tag{9}$$

Il existe alors une unique mesure stationnaire μ, et tout processus X de générateur $\mathcal{L}$ converge en loi vers μ. Si on suppose de plus que $\mathcal{L}$ est réversible, alors μ satisfait :

$$\forall p, q \in G, \qquad \mu(p)\mathcal{L}_{p,q} = \mu(q)\mathcal{L}_{q,p} \tag{10}$$

Dans ce contexte on cherche à étudier les temps forts de stationnarité de X, et notamment déterminer si pour toute loi initiale il en existe un qui soit fini. Pour cela on va construire de manière classique un dual à valeurs dans $\mathcal{P}(G)$ l'ensemble des parties de G, entrelacé avec X par le noyau Λ défini par :

$$\Lambda(Q, \cdot) = \mu_{|Q} \qquad \forall Q \in \mathcal{P}(G)$$

Dans l'idée de ce qui a été fait par Diaconis et Fill [3] sur des ensembles finis ou par Miclo [12] ou Fill et Lyzinski [5] pour des diffusions réelles, ce dual peut s'agrandir en ajoutant des points voisins. Le principal problème est qu'à chaque instant il doit aussi pouvoir perdre des points de son bord. Afin d'éviter qu'il ne se sépare en plusieurs morceaux, lorsque ceci arrive on le force à choisir une de ses composantes connexes avec un probabilité proportionnelle à sa masse relativement à μ. On obtient ainsi un dual connexe. En étudiant les conditions d'explosion de ce dual, et en montrant pour certaines lois initiales sur X qu'il existe un temps fort de stationnarité fini si et seulement si celui fourni par ce dual est fini, on obtient le résultat principal :

Théorème 1.1. *Le processus X admet un temps fort de stationnarité fini pour toute loi initiale μ_0, si et seulement si, pour tout $i \in I$:*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu^i(j+1) \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\mu^i(k)\mathcal{L}_{\varphi_i(k),\varphi_i(k+1)}} < \infty \tag{11}$$

Miclo [13] a donné une autre condition équivalente à ceci : si on considère la restriction $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{L}$ sur l'ensemble :

$$\mathcal{F} := \{f \in \mathbb{L}^2(\mu) : \mu[f] = 0\},$$

alors (11) est satisfaite pour tout $i \in I$ si et seulement si $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^{-1}$ est à trace finie.

Remarque 1.2. *Contrairement à ce qui est fait pour les diffusions réelles par exemple, on ne montre que pas que ce dual est fin pour certaines lois initiales. En fait, on conjecture qu'il n'existerait pas de duaux à a fois Λ-liés et fin dès que le nombre de branches infinies et supérieur ou égal à trois (sauf bien sûr dans le cas trivial où la loi initiale est la loi stationnaire).*

2 Résultats sur la dualité

Cette section présente des outils généraux faisant le lien entre le couplage par dualité de deux processus et la dualité algébrique de leurs générateurs et semi-groupes respectifs. Elle reprend en grande partie les résultats et les démonstrations de Fill [7] (sections 2.2 et 2.3) dans le cadre défini par ses *General Settings* et les adapte au cas infini, d'abord non-explosif puis explosif.

Dans tout ce qui suit, on travaillera sur les objets suivants :

- $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}^*$ sont deux espaces topologiques dénombrables (non nécessairement munis de la topologie discrète). Les éléments de ces ensembles seront généralement désignés par les lettres x, y, z pour $\mathcal{S}$ et x^*, y^*, z^* pour $\mathcal{S}^*$.
- Λ est un noyau de transition de $\mathcal{S}^*$ vers $\mathcal{S}$.
- $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^*$ sont des générateurs respectivement sur $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}^*$ et on suppose $\mathcal{L}$ non-explosif.
- $\mathbf{P}(\cdot)$ et $\mathbf{P}^*(\cdot)$ sont les solutions minimales des équations de Kolmogorov de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^*$ respectivement.
- μ_0 et μ_0^* sont deux mesures de probabilité sur $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}^*$ respectivement.
- $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov, de générateur $\mathcal{L}$ et de loi initiale μ_0.

Au lieu de l'hypothèse de finitude des ensembles $\{x : \Lambda(x^*, x) > 0\}$ qui est faite dans le *General Settings* de Fill [7] (section 2.2B), on supposera que la diagonale de $\mathcal{L}$ est Λ-intégrable, c'est-à-dire :

$$\forall x^* \in \mathcal{S}^*, \qquad \sum_{x\in\mathcal{S}} \Lambda(x^*, x)\mathcal{L}_x < +\infty$$

En particulier, pour tout $f \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$, le produit matriciel $\Lambda\mathcal{L}f$ est bien défini, associatif et fini.

2.1 Processus minimaux

Cette section est une reformulation détaillée et légèrement adaptée de [7]. Son but est de donner des conditions suffisantes pour pouvoir construire un couplage de deux processus minimaux X et X^* de générateurs respectifs $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^*$, de manière à ce que X^* et X soient Λ-liés. Plus précisément, on va montrer le :

Théorème 2.1. *Si* $(\mu_0, \mathcal{L})$ *et* $(\mu_0^*, \mathcal{L}^*)$ *satisfont la double condition :*

$$\begin{cases} \mu_0^* \Lambda = \mu_0 \\ \mathcal{L}^* \Lambda = \Lambda \mathcal{L} \end{cases} \tag{12}$$

alors il existe un processus minimal $(X_t^*)_{t\geq 0}$ *sur* $\mathcal{S}^*$ *de générateur* $\mathcal{L}^*$ *et de loi initiale* μ_0^**, satisfaisant (4) et (6) jusqu'à son temps d'explosion* T*, c'est-à-dire,* $\forall t \geq 0$ *:*

$$\mathscr{L}(X_t \mid \mathcal{F}_t^{X^*},\ T > t) = \Lambda(X_t^*, \cdot) \tag{13}$$

$$\mathscr{L}(X_t^* \mid X,\ T > t) = \mathscr{L}(X_t^* \mid \mathcal{F}_t^X,\ T > t) \tag{14}$$

Pour tout $f \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$ et tout $x^* \in \mathcal{S}^*$, on a :

$$\sum_{y^* \in \mathcal{S}^*} \sum_{y \in \mathcal{S}} |\mathcal{L}^*_{x^*,y^*} \Lambda(y^*, y) f(y)| \leq \sup_{y \in \mathcal{S}} f(y) \sum_{y^* \in \mathcal{S}^*} |\mathcal{L}^*_{x^*,y^*}| = 2 \sup_{y \in \mathcal{S}} f(y) \mathcal{L}^*_{x^*}$$

donc le produit matriciel $\mathcal{L}^* \Lambda f$ est toujours commutatif et à valeur finies. Sous la condition (12), on pose $\Gamma := \mathcal{L}^* \Lambda = \Lambda \mathcal{L}$ et on définit la matrice $\bar{\mathcal{L}}$, qui sera celle d'un générateur de couplage, par :

$$\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{y}} := \begin{cases} -\left(\mathcal{L}_x + \mathcal{L}^*_{x^*} + \dfrac{\Gamma(x^*, x)}{\Lambda(x^*, x)} \right) & \text{, si } \bar{x} = \bar{y} \\ \mathcal{L}_{x,y} & \text{, si } y \neq x,\ y^* = x^* \\ \dfrac{\mathcal{L}^*_{x^*,y^*} \Lambda(y^*, x)}{\Lambda(x^*, x)} & \text{, si } y = x,\ y^* \neq x^* \\ \dfrac{\mathcal{L}_{x,y} \mathcal{L}^*_{x^*,y^*} \Lambda(y^*, y)}{\Gamma(x^*, y)} & \text{, si } \Lambda(x^*, y) = 0,\ \Gamma(x^*, y) > 0 \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases} \tag{15}$$

avec :

$$\bar{x} = (x, x^*),\ \bar{y} = (y, y^*) \in \bar{\mathcal{S}} := \{(z, z^*) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}^*;\ \Lambda(z^*, z) > 0\}$$

Quelques remarques sur cette définition :

Remarque 2.2. *(a)* $\Lambda(x^*, y) = 0$ *implique à la fois* $x \neq y$ *et* $x^* \neq y^*$*, donc ces cinq cas sont mutuellement exclusifs (et évidemment exhaustifs).*

(b) *Si $\mathcal{L}_{x,y} > 0$ et $\Lambda(x^*, y) = 0$, alors d'après la remarque précédente :*

$$\begin{aligned}
\Gamma(x^*, y) &= \sum_{z} \Lambda(x^*, z)\mathcal{L}_{z,y} \\
&= \sum_{z \neq y} \Lambda(x^*, z)\mathcal{L}_{z,y} \\
&\geq \Lambda(x^*, x)\mathcal{L}_{x,y} > 0
\end{aligned}$$

(c) *En utilisant le même argument pour $\mathcal{L}^*_{x^*,y^*}$, et le fait que le quatrième coefficient dans (15) vaut 0 dès lors que $\mathcal{L}_{x,y}$ ou $\mathcal{L}^*_{x^*,y^*}$ est nul, on peut remplacer le quatrième cas par "$\Lambda(x^*, y) = 0,\ \mathcal{L}_{x,y}\mathcal{L}_{x^*,y^*} > 0$" sans changer le générateur (dans ce cas on a toujours $\Gamma(x^*, y) > 0$, et dans les cas qui ont été rajoutés au cinquième, le coefficient $\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{y}}$ vaut bien 0).*

Lemme 2.3. *$\bar{\mathcal{L}}$ définit un générateur sur $\bar{\mathcal{S}}$.*

Démonstration. Pour tout $\bar{x} = (x, x^*) \in \bar{\mathcal{S}}$, on a :

$$\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{y}} \geq 0, \quad \forall \bar{y} \in \bar{\mathcal{S}},\ \bar{y} \neq \bar{x}$$

et :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\bar{y} \in \bar{\mathcal{S}} \\ y \neq x, y^* = x^*}} \bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{y}} &= \sum_{\substack{y \neq x \\ \Lambda(x^*,y)>0}} \mathcal{L}_{x,y} \\
&= \sum_{y \neq x} \mathcal{L}_{x,y} - \sum_{\substack{y \neq x \\ \Lambda(x^*,y)=0}} \mathcal{L}_{x,y} \\
&= \mathcal{L}_x - \sum_{y | \Lambda(x^*,y)=0} \mathcal{L}_{x,y} \\
\sum_{\substack{\bar{y} \in \bar{\mathcal{S}} \\ y^* \neq x^*, y = x}} \bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{y}} &= \sum_{\substack{y^* \neq x^* \\ \Lambda(y^*,x)>0}} \frac{\mathcal{L}^*_{x^*,y^*}\Lambda(y^*, x)}{\Lambda(x^*, x)} \\
&= \sum_{y^*} \frac{\mathcal{L}^*_{x^*,y^*}\Lambda(y^*, x)}{\Lambda(x^*, x)} - \frac{\mathcal{L}^*_{x^*,x^*}\Lambda(x^*, x)}{\Lambda(x^*, x)} \\
&= \frac{\Gamma(x^*, x)}{\Lambda(x^*, x)} + \mathcal{L}^*_{x^*}
\end{aligned}$$

(Dans la seconde inégalité ci-dessus, en supprimant la condition $\Lambda(y^*, x) > 0$, on a juste rajouté des termes nuls à la somme)

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{\bar{y}|\Lambda(x^*,y)=0\\ \Gamma(x^*,y)>0}} \bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{y}} &= \sum_{\substack{y|\Lambda(x^*,y)=0\\ \Gamma(x^*,y)>0}} \mathcal{L}_{x,y} \sum_{y^*|\Lambda(y^*,y)>0} \frac{\mathcal{L}^*_{x^*,y^*}\Lambda(y^*,y)}{\Gamma(x^*,y)} \\
&= \sum_{y|\Lambda(x^*,y)=0} \mathcal{L}_{x,y}
\end{aligned}
$$

(d'après la remarque (b))
Donc :

$$
\begin{aligned}
\sum_{\bar{y}\neq\bar{x}} \bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{y}} &= \sum_{\substack{\bar{y}\in\bar{\mathcal{S}}\\ y\neq x, y^*=x^*}} \bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{y}} + \sum_{\substack{\bar{y}\in\bar{\mathcal{S}}\\ y^*\neq x^*, y=x}} \bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{y}} + \sum_{\substack{\bar{y}|\Lambda(x^*,y)=0\\ \Gamma(x^*,y)>0}} \bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{y}} \\
&= \mathcal{L}_x - \sum_{y|\Lambda(x^*,y)=0} \mathcal{L}_{x,y} + \frac{\Gamma(x^*,x)}{\Lambda(x^*,x)} + \mathcal{L}^*_{x^*} + \sum_{y|\Lambda(x^*,y)=0} \mathcal{L}_{x,y} \\
&= -\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{x}}
\end{aligned}
$$

Ainsi, $\bar{\mathcal{L}}$ est bien le générateur d'un processus markovien sur $\bar{\mathcal{S}}$. □

Démonstration du théorème 2.1. La démonstration est fortement inspirée de Fill [7], Proposition 2 et 4 et Section 2.3.

Supposons que la condition (12) soit réalisée.

Dans un premier temps, on va construire X^* couplé avec X, de manière à ce que le couple (X, X^*) ait $\bar{\mathcal{L}}$ comme générateur. On vérifiera ensuite que (X, X^*) satisfait bien (13) et (14).

Couplage des deux processus : Ayant observé $X_0 = x_0 \in \mathcal{S}$, on pose pour tout $x_0^* \in \mathcal{S}^*$:

$$
X_0^* = x_0^* \in \mathcal{S}^* \quad \text{avec probabilité } \frac{\mu_0^*(x_0^*)\Lambda(x_0^*, x_0)}{\mu_0(x_0)} \tag{16}
$$

La loi de (X_0, X_0^*) est donnée par :

$$
\begin{aligned}
\bar{\mu}_0(x_0, x_0^*) &= \mathbb{P}(X_0 = x_0)\mathbb{P}(X_0^* = x_0^*|X_0 = x_0) \\
&= \mu_0(x_0)\frac{\mu_0^*(x_0^*)\Lambda(x_0^*, x_0)}{\mu_0(x_0)} \\
&= \mu_0^*(x_0^*)\Lambda(x_0^*, x_0)
\end{aligned} \tag{17}
$$

qui est bien une mesure de probabilité sur $\bar{\mathcal{S}}$ car :

$$\begin{aligned}\sum_{x_0,x_0^*}\bar{\mu}_0(x_0,x_0^*) &= \sum_{x_0^*}\mu_0^*(x_0^*)\sum_{x_0}\Lambda(x_0^*,x_0)\\ &= \sum_{x_0^*}\mu_0^*(x_0^*)\\ &= 1\end{aligned}$$

De plus, $X_0^* \sim \mu_0^*$.

On pose $\tau_0 = 0$, donc pour l'instant X^* est construit jusqu'à ce temps (on rappelle que X est déjà construit). On va maintenant construire X^* étape par étape jusqu'aux temps $\tau_k,\ k \in \mathbb{N}$, où τ_k est la k-ème transition de la chaine bivariée (X, X^*) (en particulier, X^* peut ne pas sauter au temps τ_k).

Soit $k \geq 1$, et supposons par récurrence que $\tau_0, \ldots, \tau_{k-1}$ et $X^*_{[0,\tau_{k-1}]}$ sont déjà construits. On appelle σ_k le temps de la première transition de X après τ_{k-1} (qui peut être égal à σ_{k-1} si X n'a pas sauté au temps τ_{k-1}). Soit $\bar{x} = (x, x^*) := (X, X^*)_{\tau_{k-1}}$, et ε_{k-1} une variable exponentielle de paramètre $\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x}} - \mathcal{L}_x$, indépendante de $(\epsilon_i)_{i\leq k-2}$ et X.

1. Si $\tau_{k-1} + \varepsilon_{k-1} > \sigma_k$, on pose $\tau_k = \sigma_k$, et

$$X^*_{\tau_k} = y^* \quad \text{avec probabilité } \frac{\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{y}}}{\mathcal{L}_{x,y}} \tag{18}$$

   où $y = X_{\tau_k}$ et $\bar{y} = (y, y^*)$.

2. Sinon, on pose $\tau_k = \tau_{k-1} + \varepsilon_{k-1}$, et

$$X^*_{\tau_k} = y^* \neq x^* \quad \text{avec probabilité } \frac{\bar{\mathcal{L}}_{(x,x^*),(x,y^*)}}{\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x}} - \mathcal{L}_x} \tag{19}$$

Ces probabilités sont bien définies, puisque $\mathcal{L}_{x,y}$ et $\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x}} - \mathcal{L}_x$ sont évidemment non nuls si $X_{\tau_k} = y$ ou si $\varepsilon_{k-1} < \infty$ respectivement. De plus, dans le premier cas, on obtient comme annoncé $X^*_{\tau_k} = x^*$ p.s. si $\Lambda(x^*, y) \neq 0$, et

$$X^*_{\tau_k} = y^* \neq x^* \quad \text{avec probabilité } \frac{\mathcal{L}^*_{x^*,y^*}\Lambda(y^*,y)}{\Gamma(x^*,y)}$$

si $\Lambda(x^*, y) = 0$, la somme de ces probabilités valant bien 1.

On a donc $\tau_k - \tau_{k-1} = \min(\varepsilon_{k-1}, \sigma_k - \tau_{k-1})$. Or, $\varepsilon_{k-1} \sim \exp(\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x}} - \mathcal{L}_x)$ et $\sigma_k - \tau_{k-1} \sim \exp(\mathcal{L}_x)$ sont indépendantes, donc $\tau_k - \tau_{k-1} \sim \exp(\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x}})$. De plus, considérant les événements $A := \{(X, X^*)_{\tau_{k-1}} = \bar{x}\}$ et $B := \{(X, X^*)_{\tau_k} = \bar{y}\}$, on a les probabilités de transition suivantes :

- Si $y = x,\ y^* \neq x^*$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B \mid A) &= \mathbb{P}(X_{\tau_k} = x \mid A)\, \mathbb{P}(X^*_{\tau_k} = y^* \mid X_{\tau_k} = x,\ A) \\
&= \mathbb{P}(\varepsilon_{k-1} < \sigma_k - \tau_{k-1})\, \mathbb{P}(X^*_{\tau_k} = y^* \mid \varepsilon_{k-1} < \sigma_k - \tau_{k-1},\ A) \\
&= \left(\frac{\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x}} - \mathcal{L}_x}{\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x}}}\right)\left(\frac{\bar{\mathcal{L}}_{(x,x^*),(x,y^*)}}{\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x}} - \mathcal{L}_x}\right) \\
&= \frac{\bar{\mathcal{L}}_{(x,x^*),(x,y^*)}}{\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x}}}
\end{aligned}$$

- Si $y \neq x$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B \mid A) &= \mathbb{P}(X_{\tau_k} = y \mid A)\, \mathbb{P}(X^*_{\tau_k} = y^* \mid X_{\tau_k} = y,\ A) \\
&= \frac{\mathcal{L}_{x,y}}{\mathcal{L}_x}\mathbb{P}(\varepsilon_{k-1} > \sigma_k - \tau_{k-1} \mid A)\, \mathbb{P}(X^*_{\tau_k} = x^* \mid X_{\tau_k} = x,\ A) \\
&= \frac{\mathcal{L}_{x,y}}{\mathcal{L}_x}\left(\frac{\mathcal{L}_x}{\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x}}}\right)\left(\frac{\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{y}}}{\mathcal{L}_{x,y}}\right) \\
&= \frac{\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{y}}}{\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x}}}
\end{aligned}$$

Par construction, le processus (X, X^*) est un processus de saut markovien, défini jusqu'au premier temps d'explosion, de générateur $\bar{\mathcal{L}}$, et satisfaisant (14). De plus, le temps de chaque saut est strictement positif donc les trajectoires de (X, X^*) sont continues à droite.

Vérification de l'entrelacement (relation (13)) : Cette vérification s'effectue en trois temps. Dans un premier temps on va montrer une relation sur les générateurs :

$$\forall x^* \in \mathcal{S}^*,\ f \in \mathcal{B}(\bar{\mathcal{S}}), \qquad \sum_{x \in \mathcal{S}} \sum_{\bar{y} \in \bar{\mathcal{S}}} \Lambda(x^*, x)\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{y}} f(\bar{y}) = \sum_{\bar{y} \in \bar{\mathcal{S}}} \mathcal{L}^*_{x^*,y^*}\Lambda(y^*, y) f(\bar{y}) \quad (20)$$

Intuitivement, le terme de gauche correspond à toutes les transitions d'un $x^* \in \mathcal{S}^*$ donné vers un $x \in \mathcal{S}$, et ensuite de $(x, x^*) \in \bar{\mathcal{S}}$ vers $(y, y^*) \in \bar{\mathcal{S}}$, tandis que le terme de droite correspond à une transition de x^* vers y^*, puis vers y, sans se préoccuper de x.

Dans une second temps, on s'en servira pour montrer une inégalité au niveau des semi-groupes correspondants :

$$\forall x^* \in \mathcal{S}^*,\ \bar{y} \in \bar{\mathcal{S}} \quad \sum_{x \in \mathcal{S}} \Lambda(x^*, x)\bar{\mathbf{P}}_{\bar{x},\bar{y}}(t) \geq \mathbf{P}^*_{x^*,y^*}(t)\Lambda(y^*, y) \tag{21}$$

et enfin, on en déduira par récurrence sur k :

$$\mathbb{P}(X^*_{t_0} = x^*_0, \ldots, X^*_{t_k} = x^*_k, X_{t_k} = x_k) = \mu^*_0(x^*_0) \prod_{i=1}^{k} \mathbf{P}^*_{x^*_{i-1},x^*_i}(t_i - t_{i-1})\Lambda(x^*_k, x_k) \tag{22}$$

$\forall k \geq 0,\ \forall 0 = t_0 \leq \cdots \leq t_k,\ \forall x^*_0, \ldots, x^*_k \in \mathcal{S}^*,\ \forall y_k \in \mathcal{S}$, ce qui implique à la fois (13) et que $\mathbf{P}^*(\cdot)$ est le semi-groupe de X^*.

Preuve de (20) : On commence par montrer l'égalité matricielle suivante :

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} \Lambda(x^*, x)\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{y}} = \mathcal{L}^*_{x^*,y^*}\Lambda(y^*, y)$$

Soit $x^* \in \mathcal{S}^*,\ \bar{y} \in \bar{\mathcal{S}}$, avec $x^* \neq y^*$. Si $\Lambda(y, x^*) \neq 0$, alors d'après les coefficients du générateur $\bar{\mathcal{L}}$, $\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{y}} \neq 0$ implique $y = x$. D'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in \mathcal{S}} \Lambda(x^*, x)\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{y}} &= \begin{cases} \Lambda(x^*, y)\bar{\mathcal{L}}_{(y,x^*),\bar{y}} & \text{si } (y, x^*) \in \bar{\mathcal{S}} \\ \sum_{x \neq y} \Lambda(x^*, x)\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{y}} & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \Lambda(x^*, y)\dfrac{\mathcal{L}^*_{x^*,y^*}\Lambda(y^*, y)}{\Lambda(x^*, y)} & \text{si } (y, x^*) \in \bar{\mathcal{S}} \\ \sum_{x \neq y} \Lambda(x^*, x)\dfrac{\mathcal{L}_{x,y}\mathcal{L}^*_{x^*,y^*}\Lambda(y^*, y)}{\Gamma(x^*, y)} & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \mathcal{L}^*_{x^*,y^*}\Lambda(y^*, y)
\end{aligned}$$

Et si $x^* \in \mathcal{S}^*,\ \bar{y} \in \bar{\mathcal{S}}$, avec $x^* = y^*$, alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{x:\bar{x} \in \bar{\mathcal{S}}} \Lambda(x^*, x)\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{y}} &= -\Lambda(x^*, y)\bar{\mathcal{L}}_{(y,x^*)} + \sum_{x \neq y} \Lambda(x^*, x)\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{y}} \\
&= -\Lambda(x^*, y)\left(\mathcal{L}_y + \mathcal{L}^*_{x^*} + \frac{\Gamma(x^*, y)}{\Lambda(x^*, y)}\right) + \sum_{x \neq y} \Lambda(x^*, x)\mathcal{L}_{x,y} \\
&= -\Lambda(x^*, y)(\mathcal{L}_y + \mathcal{L}^*_{x^*}) - \Gamma(x^*, y) + \Gamma(x^*, y) + \Lambda(x^*, y)\mathcal{L}_y \\
&= -\mathcal{L}^*_{x^*}\Lambda(x^*, y) \\
&= \mathcal{L}^*_{x^*,y^*}\Lambda(y^*, y)
\end{aligned}$$

Maintenant, pour $f \in \mathcal{B}(\bar{\mathcal{S}})$, on a :

$$\sum_{x:\bar{x}\in\bar{\mathcal{S}}}\sum_{\bar{y}\in\bar{\mathcal{S}}}\Lambda(x^*,x)\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{y}}f(\bar{y}) = \sum_{x:\bar{x}\in\bar{\mathcal{S}}}\Bigg[\Lambda(x^*,x)\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{x}}f(\bar{x}) + \sum_{\substack{y:(y,x^*)\in\bar{\mathcal{S}}\\ y\neq x}}\Lambda(x^*,x)\mathcal{L}_{x,y}f((y,x^*))$$
$$+ \sum_{\substack{y^*:(x,y^*)\in\bar{\mathcal{S}}\\ y^*\neq x^*}}\mathcal{L}^*_{x^*,y^*}\Lambda(y^*,x)f((x,y^*)) + \sum_{\bar{y}:(y,x^*)\notin\bar{\mathcal{S}}}\frac{\Lambda(x^*,x)\mathcal{L}_{x,y}\mathcal{L}^*_{x^*,y^*}\Lambda(y^*,y)f(\bar{y})}{\Gamma(x^*,y)}\Bigg]$$
$$= \sum_{x:\bar{x}\in\bar{\mathcal{S}}}\Lambda(x^*,x)\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{x}}f(\bar{x}) + \sum_{x:\bar{x}\in\bar{\mathcal{S}}}\sum_{\substack{y:(y,x^*)\in\bar{\mathcal{S}}\\ y\neq x}}\Lambda(x^*,x)\mathcal{L}_{x,y}f((y,x^*))$$
$$+ \sum_{x:\bar{x}\in\bar{\mathcal{S}}}\sum_{\substack{y^*:(x,y^*)\in\bar{\mathcal{S}}\\ y^*\neq x^*}}\mathcal{L}^*_{x^*,y^*}\Lambda(y^*,x)f((x,y^*)) + \sum_{x:\bar{x}\in\bar{\mathcal{S}}}\sum_{\bar{y}:(y,x^*)\notin\bar{\mathcal{S}}}\frac{\Lambda(x^*,x)\mathcal{L}_{x,y}\mathcal{L}^*_{x^*,y^*}\Lambda(y^*,y)f(\bar{y})}{\Gamma(x^*,y)}$$

dès que les quatre sommes dans la dernière égalité convergent. Pour la première, rappelons que :

$$\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{x}} = \mathcal{L}_{x,x} + \mathcal{L}^*_{x^*,x^*} - \frac{\Gamma(x^*,x)}{\Lambda(x^*,x)}$$

donc on voit que la première somme converge, puisque la diagonale de $\mathcal{L}$ est μ-intégrable. La deuxième converge pour la même raison, la troisième parce que f est bornée et :

$$\sum_{y^*\in\mathcal{S}^*}\sum_{x\in\mathcal{S}}|\mathcal{L}^*_{x^*,y^*}|\Lambda(y^*,x) = 2\mathcal{L}^*_{x^*} < +\infty,$$

et la dernière parce que f est bornée et :

$$\begin{aligned}\sum_{y^*\in\mathcal{S}^*}\sum_{y:(y,x^*)\notin\bar{\mathcal{S}}}\sum_{x\in\mathcal{S}}\frac{\Lambda(x^*,x)|\mathcal{L}_{x,y}\mathcal{L}^*_{x^*,y^*}|\Lambda(y^*,y)}{\Gamma(x^*,y)} &= \sum_{y^*\in\mathcal{S}^*}\sum_{y:(y,x^*)\notin\bar{\mathcal{S}}}|\mathcal{L}^*_{x^*,y^*}|\Lambda(y^*,y)\\ &\leq 2\mathcal{L}^*_{x^*}\end{aligned}$$

Revenant à nos calculs précédents, on déduit :

$$\sum_{x:\bar{x}\in\bar{\mathcal{S}}}\sum_{\bar{y}\in\bar{\mathcal{S}}}\Lambda(x^*,x)\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{y}}f(\bar{y}) = \sum_{x:\bar{x}\in\bar{\mathcal{S}}}\Lambda(x^*,x)\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{x}}f(\bar{x}) + \sum_{x:\bar{x}\in\bar{\mathcal{S}}}\sum_{\substack{y:(y,x^*)\in\bar{\mathcal{S}}\\ y\neq x}}\Lambda(x^*,x)\mathcal{L}_{x,y}f((y,x^*))$$

$$+\sum_{x:\bar{x}\in\bar{\mathcal{S}}}\sum_{\substack{y^*:(x,y^*)\in\bar{\mathcal{S}}\\ y^*\neq x^*}}\mathcal{L}^*_{x^*,y^*}\Lambda(y^*,x)f((x,y^*)) + \sum_{x:\bar{x}\in\bar{\mathcal{S}}}\sum_{\bar{y}:(y,x^*)\notin\bar{\mathcal{S}}}\frac{\Lambda(x^*,x)\mathcal{L}_{x,y}\mathcal{L}^*_{x^*,y^*}\Lambda(y^*,y)f(\bar{y})}{\Gamma(x^*,y)}$$

$$=\sum_{x:\bar{x}\in\bar{\mathcal{S}}}\Lambda(x^*,x)\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{x}}f(\bar{x}) + \sum_{y:(y,x^*)\in\bar{\mathcal{S}}}\sum_{x\neq y\in\mathcal{S}}\Lambda(x^*,x)\mathcal{L}_{x,y}f((y,x^*))$$

$$+\sum_{y^*\in\mathcal{S}^*}\sum_{x:(x,y^*)\in\bar{\mathcal{S}}}\mathcal{L}^*_{x^*,y^*}\Lambda(y^*,x)f((x,y^*)) + \sum_{\bar{y}:(y,x^*)\notin\bar{\mathcal{S}}}\sum_{x\neq y\in\mathcal{S}}\frac{\Lambda(x^*,x)\mathcal{L}_{x,y}\mathcal{L}^*_{x^*,y^*}\Lambda(y^*,y)f(\bar{y})}{\Gamma(x^*,y)}$$

$$=\sum_{\bar{y}\in\bar{\mathcal{S}}}\sum_{x:\bar{x}\in\bar{\mathcal{S}}}\Lambda(x^*,x)\bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{y}}f(\bar{y})$$

$$=\sum_{\bar{y}\in\bar{\mathcal{S}}}\mathcal{L}^*_{x^*,y^*}\Lambda(y^*,y)f(\bar{y})$$

Preuve de (21) : Soit $\bar{\mathbf{P}}(\cdot)$ la solution minimale des équations de Kolmogorov associées à $\bar{\mathcal{L}}$. Pour tout $t>0$, on définit la matrice $(Q_{x^*,\bar{y}}(t))_{(x^*,\bar{y})\in\mathcal{S}^*\times\bar{\mathcal{S}}}$ de la manière suivante :

$$Q_{x^*,\bar{y}}(t) := \sum_{x:\bar{x}\in\bar{\mathcal{S}}}\Lambda(x^*,x)\bar{\mathbf{P}}_{\bar{x},\bar{y}}(t)$$

Soit $(A_n)_n$ une suite croissante de parties finies de $\mathcal{S}$, telle que $\lim A_n=\mathcal{S}$. Si on définit aussi pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(x^*,\bar{y})\in\mathcal{S}^*\times\bar{\mathcal{S}}$ et $t>0$:

$$Q^{(n)}_{x^*,\bar{y}}(t) := \sum_{x\in A_n}\Lambda(x^*,x)\bar{\mathbf{P}}_{\bar{x},\bar{y}}(t)$$

alors on a :

$$\sup_{t\geq 0}|Q^{(n)}_{x^*,\bar{y}}(t)-Q_{x^*,\bar{y}}(t)| \leq |\sum_{x\in\mathcal{S}\setminus A_n}\Lambda(x^*,x)| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$$

donc Q est limite uniforme (en t) de $(Q^{(n)})_n$, et on obtient en utilisant (20) :

$$
\begin{aligned}
Q'_{x^*,\bar{y}}(t) &= \lim_{n\to\infty} {Q^{(n)}}'_{x^*,\bar{y}}(t) \\
&= \sum_{x:\bar{x}\in\bar{\mathcal{S}}} \Lambda(x^*,x)\bar{\mathbf{P}}'_{\bar{x},\bar{y}}(t) \\
&= \sum_{x:\bar{x}\in\bar{\mathcal{S}}} \Lambda(x^*,x)\sum_{\bar{z}} \bar{\mathcal{L}}_{\bar{x},\bar{z}}\bar{\mathbf{P}}_{\bar{z},\bar{y}}(t) \\
&= \sum_{\bar{z}} \mathcal{L}^*_{x^*,z^*}\Lambda(z^*,z)\bar{\mathbf{P}}_{\bar{z},\bar{y}}(t) \\
&= \sum_{z^*\in\mathcal{S}^*} \mathcal{L}^*_{x^*,z^*}Q_{z^*,\bar{y}}(t)
\end{aligned}
$$

On a alors, $\forall(x^*,\bar{y})\in\mathcal{S}^*\times\bar{\mathcal{S}}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\exp(\mathcal{L}^*_{x^*}t)Q_{x^*,\bar{y}}(t)\right] &= \left[Q'_{x^*,\bar{y}}(t)+\mathcal{L}^*_{x^*}Q_{x^*,\bar{y}}(t)\right]\exp(\mathcal{L}^*_{x^*}t) \\
&= \left[\sum_{z^*}\mathcal{L}^*_{x^*,z^*}Q_{z^*,\bar{y}}(t)+\mathcal{L}^*_{x^*}Q_{x^*,\bar{y}}(t)\right]\exp(\mathcal{L}^*_{x^*}t) \\
&= \sum_{z^*\neq x^*}\mathcal{L}^*_{x^*,z^*}Q_{z^*,\bar{y}}(t)\exp(\mathcal{L}^*_{x^*}t)
\end{aligned}
$$

Cette somme est finie donc la fonction est continue en t. En appliquant le théorème fondamental de l'analyse et le fait que $Q_{x^*,\bar{y}}(0)=\delta_{x^*,y^*}\Lambda(y^*,y)$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\exp(\mathcal{L}^*_{x^*}t)Q_{x^*,\bar{y}}(t) &= \delta_{x^*,y^*}\Lambda(x^*,y)+\int_0^t\sum_{z^*\neq x^*}\mathcal{L}^*_{x^*,z^*}Q_{z^*,\bar{y}}(s)\exp(\mathcal{L}^*_{x^*}s)\mathrm{d}s \\
Q_{x^*,\bar{y}}(t) &= \delta_{x^*,y^*}\exp(-\mathcal{L}^*_{x^*}t)\Lambda(x^*,y) \\
&\quad+\int_0^t\sum_{z^*\neq x^*}\mathcal{L}^*_{x^*,z^*}Q_{z^*,\bar{y}}(s)\exp(\mathcal{L}^*_{x^*}(s-t))\mathrm{d}s \qquad (23)
\end{aligned}
$$

On a exprimé Q comme un point fixe de la fonction f définie par :

$$
f\colon \mathcal{M}_{\mathcal{S}^*,\bar{\mathcal{S}}}(\mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\ \mathbb{R}^+))\to\mathcal{M}_{\mathcal{S}^*,\bar{\mathcal{S}}}(\mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\ \mathbb{R}^+))
$$

$$
f(R)_{x^*,\bar{y}}(t)=\delta_{x^*,y^*}\exp(-\mathcal{L}^*_{x^*}t)\Lambda(x^*,y)+\int_0^t\sum_{z^*\neq x^*}\mathcal{L}^*_{x^*,z^*}R_{z^*,\bar{y}}(s)\exp(\mathcal{L}^*_{x^*}(s-t))\mathrm{d}s \qquad (24)
$$

de sorte que $Q=f(Q)$. On appelle :

— Y^* un processus minimal de générateur $\mathcal{L}^*$

— J la chaîne des temps de sauts du processus Y^*
— $P^{*(N)}_{x^*,y^*}(t)$ la probabilité pour Y^* de passer de x^* à y^* en temps t, en $N-1$ sauts maximum :

$$P^{*(N)}_{x^*,y^*}(t) := \mathbb{P}_{x^*}(Y^*_t = y^*, t < J_N)$$

— $Q^{*(N)}_{x^*,\bar{y}}(t) := P^{*(N)}_{x^*,y^*}(t)\Lambda(y^*, y)$

on a alors :

$$\begin{aligned} P^{*(1)}_{x^*,y^*}(t) &= \mathbb{P}_{x^*}(t < J_1)\delta_{x^*,y^*} \\ &= \exp(-\mathcal{L}^*_{x^*}t)\delta_{x^*,y^*} \end{aligned}$$

et donc :

$$Q^{*(1)}_{x^*,\bar{y}}(t) = \delta_{x^*,y^*}\exp(-\mathcal{L}^*_{x^*}t)\Lambda(x^*, y) \le Q_{x^*,\bar{y}}(t)$$

On va montrer par récurrence que $Q^{*(N)} = f(Q^{*(N-1)})$, où f est la fonction définie en (24), pour en déduire l'inégalité

$$Q^* \le Q \quad (i.e.\ Q^*_{x^*,\bar{y}}(t) \le Q_{x^*,\bar{y}}(t),\ \forall x^*, \bar{y}, t)$$

avec :

$$Q^*_{x^*,\bar{y}}(t) := \mathbf{P}^*_{x^*,y^*}(t)\Lambda(y^*, y)$$

Pour ça, on conditionne par $Y^*_0 = x^*$ et on fait une décomposition d'événement en union de deux événements disjoints :

$$\{Y^*_t = y^*, t < J_N\} = \{Y^*_t = y^*, t < J_1\} \cup \{Y^*_t = y^*, J_1 \le t < J_N\}$$

le premier ayant comme probabilité $P^{*(1)}_{x^*,y^*}(t)$. Pour le second on conditionne par rapport à J_1 (qui suit une loi exponentielle) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{x^*}(Y^*_t = y^*, J_1 \le t < J_N) &= \mathbb{E}_{x^*}(\mathbf{1}_{t<J_N}\mathbf{1}_{Y^*_t=y^*}\mathbf{1}_{J_1<t}) \\ &= \mathbb{E}_{x^*}\left[\mathbb{E}_{x^*}(\mathbf{1}_{t<J_N}\mathbf{1}_{Y^*_t=y^*} \mid J_1)\mathbf{1}_{J_1<t}\right] \\ &= \mathbb{E}_{x^*}\left[\mathbb{P}_{x^*}(t < J_N, Y^*_t = y^* \mid J_1)\mathbf{1}_{J_1<t}\right] \end{aligned}$$

puis par X_{J_1}, qui est indépendant de J_1 et vaut $z^* \neq x^*$ avec probabilité $\dfrac{\mathcal{L}^*_{x^*,z^*}}{\mathcal{L}^*_{x^*}}$, et on utilise l'homogénéité de Y^* :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{x^*}(Y_t^* = y^*, J_1 < t < J_N) \\
=&\mathbb{E}_{x^*}\left[\mathbb{P}_{x^*}(t < J_N, Y_t^* = y^* \mid J_1)\mathbf{1}_{J_1<t}\right] \\
=&\int_0^t \mathcal{L}_{x^*}^* \mathrm{e}^{-s\mathcal{L}_{x^*}^*}\mathbb{P}_{x^*}(t < J_N, Y_t^* = y^* \mid J_1 = s)\mathrm{d}s \\
=&\int_0^t \sum_{z^*\in\mathcal{S}^*} \mathcal{L}_{x^*}^* \mathrm{e}^{-s\mathcal{L}_{x^*}^*}\mathbb{P}_{x^*}(t < J_N, Y_t^* = y^* \mid J_1 = s, X_{J_1} = z^*)\mathbb{P}_{x^*}(Y_{J_1}^* = z^*)\mathrm{d}s \\
=&\int_0^t \sum_{z^*\neq x^*} \mathcal{L}_{x^*,z^*}^* \mathrm{e}^{-s\mathcal{L}_{x^*}^*}\mathbb{P}_{z^*}(Y_{t-s}^* = y^*, t-s \leq J_{N-1})\mathrm{d}s \\
=&\int_0^t \sum_{z^*\neq x^*} \mathcal{L}_{x^*,z^*}^* \mathrm{e}^{-s\mathcal{L}_{x^*}^*}P_{z^*,y^*}^{*(N-1)}(t-s)\mathrm{d}s \\
=&\int_0^t \sum_{z^*\neq x^*} \mathcal{L}_{x^*,z^*}^* \mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{L}_{x^*}^*}P_{z^*,x^*}^{*(N-1)}(s)\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

En regroupant les termes, on obtient :

$$
P_{x^*,y^*}^{*(N)}(t) = \exp(-\mathcal{L}_{x^*}^* t)\delta_{x^*,y^*} + \int_0^t \sum_{z^*\neq x^*} \mathcal{L}_{x^*,z^*}^* \mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{L}_{x^*}^*}P_{z^*,x^*}^{*(N-1)}(s)\mathrm{d}s
$$

donc $Q_{x^*,\bar{y}}^{*(N)}(t) = f(Q_{x^*,\bar{y}}^{*(N-1)}(t))$. Puisque f est croissante, on obtient par récurrence $Q_{x^*,\bar{y}}^{*(N)}(t) \leq Q_{x^*,\bar{y}}(t)$. Par convergence monotone, $(Q_{x^*,\bar{y}}^{*(N)}(t))_N$ tend vers $Q_{x^*,\bar{y}}^*(t) \leq Q_{x^*,\bar{y}}(t)$, ce qui conclut la preuve de (21).

Lorsque $\mathcal{L}^*$ est non-explosif, Q^* et est une matrice stochastique, l'inégalité ci-dessus implique donc l'égalité $Q^* = Q$ (puisque Q est sous-stochastique) et on peut donc montrer (22) par une simple récurrence sur k. Malheureusement, cet argument n'est pas valable dans le cas explosif. Le raisonnement qui suit montre le cas non-explosif et s'en sert pour montrer le cas explosif.

Preuve de (22) : On rappelle que l'on veut montrer par récurrence sur k :

$$
\mathbb{P}(X_{t_0}^* = x_0^*, \ldots, X_{t_k}^* = x_k^*, X_{t_k} = x_k) = \mu_0^*(x_0^*)\prod_{i=1}^k \mathbf{P}_{x_{i-1}^*,x_i^*}^*(t_i - t_{i-1})\Lambda(x_k^*, x_k)
$$

T est le temps d'explosion du processus X^* et donc également de (X, X^*) puisqu'on a supposé que X était non-explosif. On rappelle (17) :

$$
\bar{\mu}_0(x_0, x_0^*) = \mu_0^*(x_0^*)\Lambda(x_0^*, x_0)
$$

ce qui nous donne immédiatement l'initialisation de la récurrence pour $k = 0$. Supposons donc maintenant que (22) est vrai pour un $k \geq 0$. Soient $x_0^*, \ldots, x_{k+1}^* \in \mathcal{S}^*$ et $x_{k+1} \in \mathcal{S}$. On a alors

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X^*_{t_0} = x^*_0, \dots, X^*_{t_{k+1}} = x^*_{k+1}, X_{t_{k+1}} = x_{k+1}) \\
&\qquad = \sum_{x_k \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(X^*_{t_0} = x^*_0, \dots, X^*_{t_k} = x^*_k, X_{t_k} = x_k) \\
&\qquad\qquad \times \mathbb{P}(X^*_{t_{k+1}} = x^*_{k+1}, X_{t_{k+1}} = x_{k+1} \mid X^*_{t_0} = x^*_0, \dots, X^*_{t_k} = x^*_k, X_{t_k} = x_k) \\
&\qquad = \mu^*_0(x^*_0) \prod_{i=1}^{k} \mathbf{P}^*_{x^*_{i-1}, x^*_i}(t_i - t_{i-1}) \sum_{x_k \in \mathcal{S}} \Lambda(x^*_k, x_k) \bar{\mathbf{P}}_{\bar{x}_k, \bar{x}_{k+1}}(t_{k+1} - t_k) \\
&\qquad \geq \mu^*_0(x^*_0) \prod_{i=1}^{k} \mathbf{P}^*_{x^*_{i-1}, x^*_i}(t_i - t_{i-1}) \mathbf{P}^*_{x^*_k, x^*_{k+1}}(t_{k+1} - t_k) \Lambda(x^*_{k+1}, x_{k+1}) \\
&\qquad = \mu^*_0(x^*_0) \prod_{i=1}^{k+1} \mathbf{P}^*_{x^*_{i-1}, x^*_i}(t_i - t_{i-1}) \Lambda(x^*_{k+1}, x_{k+1})
\end{aligned}
$$

où l'on a appliqué successivement la formule des probabilités totales pour la première égalité, la markovianité de (X, X^*) et l'hypothèse de récurrence pour la seconde, et (21) pour l'inégalité.

On a vu que si $\mathcal{L}^*$ est non-explosif, l'inégalité est en fait une égalité et la récurrence est terminée. En particulier, cela montre que $\mathbf{P}^*(\cdot)$ est le semi-groupe de la marginale X^* et donc $\mathcal{L}^*$ est son générateur. Le processus X^* a été construit trajectoriellement à partir de X, indépendamment du caractère explosif ou non de son générateur $\mathcal{L}^*$. Ses intensités de sauts sont donc données par les coefficients $\mathcal{L}^*_{x^*,y^*}$, $x^*, y^* \in \mathcal{S}^*$ et on en déduit que $\mathcal{L}^*$ est aussi le générateur du processus minimal X^* lorsque celui-ci est explosif.

Supposons donc maintenant que $\mathcal{L}^*$ est explosif. La quantité de départ et celle d'arrivée dans le calcul précédent sont toutes deux positives pour tout choix des x^*_i, x_{k+1}. Or, dans les deux cas, leur somme en $x^*_0, \dots, x^*_{k+1}, x_{k+1}$ vaut $1 - \mathbb{P}(T \leq t_{k+1})$ (puisque $\mathbf{P}^*(\cdot)$ est le semi-groupe minimal associé à $\mathcal{L}^*$), ce qui montre l'égalité et termine la récurrence.

□

Corollaire 2.4. *Si la condition (12) est satisfaite, alors le processus (X, X^*) vérifie aussi :*

$$
\mathscr{L}(X_\tau \mid \mathcal{F}^{X^*}_\tau,\ \tau < T) = \Lambda(X^*_\tau, \cdot) \tag{25}
$$

pour tout $(\mathcal{F}^{X^*}_t)$-temps d'arrêt τ.

Ici, l'inégalité $\tau < T$ est à voir dans $\bar{\mathbb{R}}$. En particulier, T et τ sont potentiellement infinis, mais l'événement $\{\tau < T\}$ est inclus dans $\{\tau < \infty\}$.

Démonstration. Soit τ un $(\mathcal{F}_t^{X^*})$-temps d'arrêt, $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ mesurable, continue et bornée et G une variable aléatoire réelle, $\mathcal{F}_\tau^{X^*}$-mesurable et bornée. Par définition de la loi conditionnelle, on veut montrer :

$$\mathbb{E}(G\mathbf{1}_{\tau<T}f(X_\tau)) = \mathbb{E}(G\mathbf{1}_{\tau<T}\Lambda[f](X_\tau^*)) \tag{26}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\tau_n := \frac{1}{n}\lceil n\tau \rceil$, où $\lceil \cdot \rceil$ désigne la partie entière par excès. On a alors :

$$\begin{aligned}
\{\tau_n \leq t\} =& \{\lceil n\tau \rceil \leq nt\} \\
&= \bigcup_{\substack{m\in\mathbb{N} \\ m\leq nt}} \{m = \lceil n\tau \rceil\} \\
&= \bigcup_{\substack{m\in\mathbb{N} \\ m\leq nt}} \{m-1 < n\tau \leq m\} \\
&= \bigcup_{\substack{m\in\mathbb{N} \\ \frac{m}{n}\leq t}} \{\frac{m-1}{n} < \tau \leq \frac{m}{n}\} \in \mathcal{F}_t^{X^*}
\end{aligned}$$

et donc τ_n est un $(\mathcal{F}_t^{X^*})$-temps d'arrêt. τ_n est à valeur dans $\frac{1}{n}\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, et $\tau_n = k/n$ si et seulement si $\frac{k-1}{n} < \tau \leq \frac{k}{n}$ donc :

$$G\mathbf{1}_{\tau_n=k/n} = G\mathbf{1}_{\tau\leq k/n} - G\mathbf{1}_{\tau\leq(k-1)/n}$$

qui est $\mathcal{F}_{k/n}^{X^*}$-mesurable.

On rappelle que l'on a (13), soit :

$$\forall t > 0, \quad \mathscr{L}(X_t \mid \mathcal{F}_t^{X^*}, t < T) = \Lambda(X_t^*, \cdot)$$

c'est-à-dire, par définition, pour toute fonction $h : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ mesurable, continue et bornée, pour toute variable aléatoire réelle H $\mathcal{F}_t^{X^*}$-mesurable bornée, et tout $t > 0$:

$$\mathbb{E}(H\mathbf{1}_{t<T}h(X_t)) = \mathbb{E}(H\mathbf{1}_{t<T}\Lambda[h](X_t^*))$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\tau_n<T}Gf(X_{\tau_n})) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{1}_{k/n<T}\mathbf{1}_{\tau_n=k/n}Gf(X_{k/n})\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{k/n<T}\mathbf{1}_{\tau_n=k/n}Gf(X_{k/n})\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{k/n<T}\mathbf{1}_{\tau_n=k/n}G\Lambda[f](X^*_{k/n})\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{1}_{k/n<T}\mathbf{1}_{\tau_n=k/n}G\Lambda[f](X^*_{k/n})\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\tau_n<T}G\Lambda[f](X^*_{\tau_n})\right)
\end{aligned}$$

Or, presque sûrement, $\lim\limits_{n\to\infty} f(X_{\tau_n}) = f(X_\tau)$ par continuité à droite des trajectoires de (X, X^*) et continuité de f, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{1}_{\tau_n<T} = \mathbf{1}_{\tau<T}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \Lambda[f](X^*_{\tau_n}) = \Lambda[f](X^*_\tau)$ par continuité de $\Lambda[f]$, donc on en conclut par convergence dominée :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G\mathbf{1}_{\tau<T}f(X_\tau)) &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\tau_n<T}Gf(X_{\tau_n})\right)\\
&= \mathbb{E}(G\mathbf{1}_{\tau<T}\Lambda[f](X^*_\tau))
\end{aligned}$$

□

2.2 Dualité avec explosion

Jusqu'à maintenant, nous avons considéré uniquement des processus minimaux, c'est-à-dire que nous ne nous sommes intéressé qu'à ce qui se passe avant le premier temps d'explosion. Cela n'est généralement pas suffisant pour que le processus Λ-lié construit dans la section précédente soit un dual de stationnarité forte pour X.

En effet, prenons l'exemple où X est une chaîne de vie et de mort sur $\mathbb{Z}$, récurrente positive. On cherche à construire, suivant la méthodologie de [3], un dual X^* dont les états sont les intervalles de $\mathbb{Z}$, et lié à X par un noyau Λ qui n'est autre que la mesure stationnaire restreinte aux intervalles. Dans ce cas, l'état $[-\infty, +\infty]$ ne peut être atteint par X^* qu'après un nombre infini de sauts. Le temps d'atteinte de cet état étant aussi le temps de stationnarité recherché pour la chaîne X, on aimerait qu'il soit fini et on a donc besoin de s'intéresser à ce qui se passe après un temps d'explosion. Cet exemple sera traité plus en détail dans la section suivante.

Nous allons donc maintenant spécifier un peu plus le cadre de travail. On se place sur un espace topologique dénombrable E, que l'on supposera séparé.

Définition 2.5. *On dit qu'un générateur $\hat{\mathcal{L}}$ sur E est* stratifié *s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et un N-uplet $(E_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ de parties de E, appelée* stratification *de $\hat{\mathcal{L}}$, tels que :*

— *Les E_i sont deux à deux disjoints.*

— *$\forall i \in [\![1,N]\!]$, $\forall x \in E_i$, si $(Y_t^x)_{0\le t\le\tau}$ est un processus minimal issu de x et associé à $\hat{\mathcal{L}}$, avec τ son temps d'explosion, alors :*

$$\mathbb{P}(Y_t^x \in \bigsqcup_{j=1}^{i} E_j \mid t < \tau) = 1$$

— *Si de plus $\tau < +\infty$, alors presque sûrement il existe $j \le i$ et ε tels que $Y_t^x \in E_j,\ \forall t \in]\tau-\varepsilon,\tau[$, et $\lim\limits_{t\to\tau} Y_t^x$ existe et appartient à $\bigsqcup_{k=j+1}^{N} E_k$. Cette limite sera notée Y_τ^x.*

Cette définition peut se comprendre ainsi : un processus de saut minimal associé à un générateur stratifié peut sauter d'une strate à une autre uniquement si la strate d'arrivée a un rang inférieur ou égal à la strate de départ. A l'inverse, au temps d'explosion, le processus doit avoir une limite, située dans une strate de rang supérieur (strictement) à celui de la strate où il se trouvait juste avant. Il est alors naturel de définir le processus au temps d'explosion comme étant égal à cette limite, et de le faire ensuite repartir de cette limite. C'est ce qui est fait dans la construction qui suit.

Remarque 2.6. *Pour satisfaire la deuxième condition, on doit nécessairement avoir $\hat{\mathcal{L}}_{y,z} = 0$ dès que $y \in E_j,\ z \in E_k,\ k > j$. La Q-matrice $(\hat{\mathcal{L}}_{x,y})_{(x,y)\in E^2}$ est donc triangulaire inférieure par bloc, chaque bloc correspondant à une strate différente.*

Soient $\hat{\mathcal{L}}$ un générateur stratifié sur E, $(E_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ une stratification de $\hat{\mathcal{L}}$, avec $N \in \mathbb{N}$, et μ une mesure de probabilités sur E. On construit un processus non-minimal Z de générateur $\hat{\mathcal{L}}$ et de loi initial μ de la manière suivante :

— On pose $T_0 = 0$ et $Z_{T_0} = x$ avec probabilité $\mu(x)$.

— Par récurrence sur $i \ge 0$, on suppose Z construit jusqu'au temps T_i. Si $T_i = \infty$, la construction est terminée. Sinon, on simule un processus minimal $Y^{(i)}$ associé à $\hat{\mathcal{L}}$ et issu de Z_{T_i}, indépendamment de $Z_{[0,T_i]}$ sachant Z_{T_i}. Soit T'_{i+1} son premier temps d'explosion, on pose :

$$Z_{T_i+t} = Y_t^{(i)}, \quad \forall t < T'_{i+1}$$

$$T_{i+1} = T_i + T'_{i+1}$$

$$Z_{T_{i+1}} = Y_{T'_{i+1}}^{(i)} \quad \text{si } T_{i+1} < \infty$$

Définition 2.7. *On appelle* processus de saut *(resp.* semi-groupe*)* stratifié associé à $(\nu, \hat{\mathcal{L}})$ *un processus Z (resp. son semi-groupe) obtenu par la construction précédente. Ce processus est défini jusqu'à un temps dit de* double explosion*, possiblement fini :*

$$T := \lim_{i \to +\infty} T_i$$

Comme pour les processus minimaux, on le prolonge après le temps de double explosion en posant $X_t = \Delta$ pour tout $t \geq T$, où Δ est un point cimetière n'appartenant pas à E.

Par construction, un tel processus satisfait la propriété de Markov forte, et d'après Anderson [2], Proposition 1.2.7, sa fonction de transition satisfait l'équation backward pour $\bar{\mathcal{L}}$ (mais pas forcément l'équation forward).

Remarque 2.8. *On pourrait également définir le processus par passage à la limite après le temps de double explosion, jusqu'à un temps de triple explosion, et ainsi de suite jusqu'à des temps de multi-explosion, sous réserve que la limite du processus existe à chaque fois. On verra que pour l'étude que l'on fait ici, cela n'est pas nécessaire.*

A chaque temps d'explosion, le processus passe d'un espace E_i à un espace E_j, avec $j > i$, et une telle transition n'est possible qu'après une explosion.

La proposition suivante justifie la construction que l'on vient de faire :

Proposition 2.9. *Soit $\hat{\mathcal{L}}$ un générateur stratifié sur E, Z un processus de saut stratifié associé à $\hat{\mathcal{L}}$ et T_i, $i \in \mathbb{N}$ ses temps d'explosion. Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}(E)$, on définit le processus :*

$$M_t^f = f(Z_t) - f(Z_0) - \int_0^t \hat{\mathcal{L}} f(Z_s) \mathrm{d}s$$

Si f est continue et $\mathcal{L}f$ est bornée, alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, $(M_{t \wedge T_i}^f)_{t \geq 0}$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t^Z)_{t > 0}$. En particulier, si le temps de double-explosion est infini presque sûrement, alors M^f est une martingale.

Démonstration. On prouve que les processus $(M_{t \wedge T_i}^f)_{t \geq 0}$ sont des martingales par récurrence sur i, avec T_i le i-ème temps d'explosion de Z, pour $i \in \mathbb{N}$. Pour $i = 0$, c'est trivial ($T_0 = 0$). Supposons donc que ce soit vrai pour $i \geq 0$. On pose :

$$Y_t = \begin{cases} Z_{T_i + t} & \text{si } T_i + t < T_{i+1} \\ \Delta & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors Y est un processus minimal sur E associé au générateur $\hat{\mathcal{L}}$. Si on appelle τ_n son n-ième temps de saut, $n \in \mathbb{N}$, on a alors, pour tout $0 < s < t$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M^f_{T_i+t\wedge\tau_n} - M^f_{T_i+s\wedge\tau_n} \mid \mathcal{F}^Z_{T_i+s\wedge\tau_n}) &= \mathbb{E}(M^f_{T_i+t\wedge\tau_n} - M^f_{T_i+s\wedge\tau_n} \mid Z_{T_i+s\wedge\tau_n}) \\
&= \mathbb{E}(f(Y_{t\wedge\tau_n}) - f(Y_{s\wedge\tau_n}) - \int_{s\wedge\tau_n}^{t\wedge\tau_n} \hat{\mathcal{L}} f(Y_r)\mathrm{d}r \mid Y_{s\wedge\tau_n}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

car Y est solution du problème de martingale pour $\hat{\mathcal{L}}$.

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient par le théorème de convergence dominée que le processus $(M^f_{(T_i+t)\wedge T_{i+1}})_{t\geq 0}$ est une martingale. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M^f_{t\wedge T_{i+1}} - M^f_{s\wedge T_{i+1}} \mid \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(M_{t\wedge T_{i+1}} - M^f_{s\wedge T_{i+1}} \mid \mathcal{F}_s)\, \mathbf{1}_{s<T_i} \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(M^f_{t\wedge T_{i+1}} - M^f_{s\wedge T_{i+1}} \mid \mathcal{F}_{T_i}) \mid \mathcal{F}_s)\, \mathbf{1}_{s<T_i} \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(M^f_{t\wedge T_{i+1}} \mid \mathcal{F}_{T_i}) - M^f_{s\wedge T_{i+1}} \mid \mathcal{F}_s)\, \mathbf{1}_{s<T_i} \\
&= \mathbb{E}(M^f_{T_i}\mathbf{1}_{t>T_i} + M^f_t \mathbf{1}_{t<T_i} - M^f_{s\wedge T_{i+1}} \mid \mathcal{F}_s)\, \mathbf{1}_{s<T_i} \\
&= \mathbb{E}(M^f_{t\wedge T_i} - M^f_{s\wedge T_i} \mid \mathcal{F}_s)\, \mathbf{1}_{s<T_i} \\
&= \mathbb{E}(M^f_{t\wedge T_i} - M^f_{s\wedge T_i} \mid \mathcal{F}_s)\, \mathbf{1}_{s<T_i} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Par convergence dominée encore une fois, avec $i \to \infty$, on obtient que M^f est une martingale si $T_i \to +\infty$. □

On suppose dorénavant que :

— $\mathcal{S}$ est un espace muni de la topologie discrète.

— Il existe une stratification $(\mathcal{S}^*_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$, $N \in \mathbb{N}$ de $\mathcal{L}^*$ sur $\mathcal{S}^*$. On note $P^*(\cdot)$ le semi-groupe stratifié associé à $\mathcal{L}^*$.

— Le temps de double-explosion d'un processus stratifié associé à $\mathcal{L}^*$ est infini presque sûrement. La matrice $(P^*_{x^*,y^*}(t))_{x^*,y^*\in\mathcal{S}^*}$ est alors stochastique pour tout $t > 0$.

— Pour tout $x \in \mathcal{S}$, la fonction $\mathcal{S}^* \ni x^* \mapsto \Lambda(x^*, x)$ est continue.

Lemme 2.10. *Sous ces hypothèses, $(\mathcal{S} \times \mathcal{S}^*_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ est une stratification de $\bar{\mathcal{L}}$ sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S}^*$ muni de la topologie produit.*

Démonstration. Ceci découle trivialement du fait que $\mathcal{L}$ est non-explosif et que les marginales d'un processus minimal (X, X^*) de générateur $\bar{\mathcal{L}}$ ont pour générateurs $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^*$ respectivement.

□

Le théorème suivant sera un outil indispensable pour construire des duaux de stationnarité forte sur des espaces dénombrables.

Théorème 2.11. *Sous les hypothèses précédentes, les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Il existe un processus stratifié $(X_t^*)_{t>0}$ *sur* $\mathcal{S}^*$ *de générateur* $\mathcal{L}^*$ *et de lois initiale* μ_0^**, tel que* $\forall t \geq 0$ *:*

$$\mathscr{L}(X_t \mid \mathcal{F}_t^{X^*}) = \Lambda(X_t^*, \cdot) \tag{27}$$

$$\mathscr{L}(X_t^* \mid X) = \mathscr{L}(X_t^* \mid \mathcal{F}_t^X) \tag{28}$$

(ii) $\begin{cases} \mu_0^* \Lambda = \mu_0 \\ P^*(t)\Lambda = \Lambda \mathbf{P}(t) \ \forall t \geq 0 \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} \mu_0^* \Lambda = \mu_0 \\ \mathcal{L}^* \Lambda = \Lambda \mathcal{L} \end{cases}$

Démonstration. Nous allons montrer (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(i).

(i)⇒(ii) La preuve n'est qu'un calcul de probabilité conditionnelle par deux moyens différents. En effet, soit $t \geq 0$, $x^* \in \mathcal{S}^*$, $y \in \mathcal{S}$. D'un côté, d'après (27), X_t est indépendant de X_0^* conditionnellement à X_t^* et donc on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_t = y \mid X_0^* = x^*) &= \sum_{y^* \in \mathcal{S}^*} \mathbb{P}(X_t^* = y^* \mid X_0^* = x^*)\, \mathbb{P}(X_t = y \mid X_0^* = x^*, X_t^* = y^*) \\
&= \sum_{y^* \in \mathcal{S}^*} P^*_{x^*,y^*}(t)\, \mathbb{P}(X_t = y \mid X_t^* = y^*) \\
&= \sum_{y^* \in \mathcal{S}^*} P^*_{x^*,y^*}(t)\, \Lambda(y^*, y)
\end{aligned}$$

et d'autre part, X_0^* est indépendant de X_t conditionnellement à X_0 d'après (28), d'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_t = y \mid X_0^* = x^*) &= \sum_{x \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(X_0 = x \mid X_0^* = x^*)\, \mathbb{P}(X_t = y \mid X_0^* = x^*, X_0 = x) \\
&= \sum_{x \in \mathcal{S}} \Lambda(x^*, x)\, \mathbb{P}(X_t = y \mid X_0 = x) \\
&= \sum_{x \in \mathcal{S}} \Lambda(x^*, x)\, \mathbf{P}_{x,y}(t)
\end{aligned}$$

ce qui montre que $P^*\Lambda = \Lambda\mathbf{P}$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\mu_0(y) &= \mathbb{P}(X_0 = y) \\
&= \sum_{y^* \in \mathcal{S}^*} \mathbb{P}(X_0^* = y^*)\mathbb{P}(X_0 = y \mid X_0^* = y^*) \\
&= \sum_{y^* \in \mathcal{S}^*} \mu_0^*(y^*)\Lambda(y^*, y)
\end{aligned}$$

donc $\mu_0 = \mu_0^*\Lambda$.

(ii)⇒(iii) La preuve est quasiment identique à celle de Fill ([7]), Proposition 2. Cependant, certaines étapes méritent une justification supplémentaire, puisque les hypothèses de départ sont légèrement différentes, c'est pourquoi cette preuve est reproduite ici.

On pose $Q(t) = \Lambda\mathbf{P}(t)$. Comme $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathcal{L}$, on a, $\forall \bar{x} \in \bar{\mathcal{S}},\ \forall y \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}
|\Lambda(x^*, x)\mathbf{P}'_{x,y}(t)| &= |\sum_{z \in \mathcal{S}} \Lambda(x^*, x)\mathbf{P}_{x,z}(t)\mathcal{L}_{z,y}| \\
&\leq \sum_{z \in \mathcal{S}} \Lambda(x^*, x)|\mathcal{L}_{z,y}|
\end{aligned}$$

et cette dernière somme est finie d'après l'hypothèse de μ-intégrabilité de la diagonale de $\mathcal{L}$. On utilise cette fois l'équation backward de Kolmogorov pour obtenir :

$$\begin{aligned}
Q'_{x^*,y}(t) &= \sum_{x \in \mathcal{S}} \Lambda(x^*, x)\mathbf{P}'_{x,y}(t) \\
&= \sum_{x \in \mathcal{S}} \Lambda(x^*, x) \sum_{z \in \mathcal{S}} \mathcal{L}_{x,z}\mathbf{P}_{z,y}(t)
\end{aligned}$$

En particulier, $Q'(0) = \Lambda\mathcal{L}$
D'après (ii), on a aussi $Q(t) \equiv Q^*(t) := P^*(t)\Lambda$, et P^* est solution de l'équation backward intégrale pour $\mathcal{L}^*$ (cf Anderson [2], chapitre 2, proposition 1.1) :

$$P^*_{x^*,y^*}(t) = \delta_{x^*,y^*}\mathrm{e}^{-\mathcal{L}^*_{x^*}t} + \int_0^t \sum_{z^* \neq x^*} \mathcal{L}^*_{x^*,z^*}P^*_{z^*,y^*}(s)\mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{L}^*_{x^*}}\mathrm{d}s$$

Donc en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli :

$$Q^*_{x^*,y}(t) = \Lambda(x^*, y)\mathrm{e}^{-\mathcal{L}^*_{x^*}t} + \int_0^t \sum_{z^* \neq x^*} \mathcal{L}^*_{x^*,z^*}Q^*_{z^*,y}(s)\mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{L}^*_{x^*}}\mathrm{d}s$$

Pour tout x^*, y, la fonction $t \to Q^*_{x^*,y}(t)$ est continue (car $Q^*(t) = Q(t) = \Lambda P(t)$ est dérivable en t donc continue), et le nombre de termes dans la somme est finie par hypothèse donc l'intégrande est continue. Par le théorème fondamental de l'analyse, on obtient donc d'une part :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\mathcal{L}^*_{x^*}t}Q^*_{x^*,y}(t)\right) = \left(\sum_{z^* \neq x^*} \mathcal{L}^*_{x^*,z^*}Q^*_{z^*,y}(t)\right)\mathrm{e}^{t\mathcal{L}^*_{x^*}}$$

et d'autre part, par dérivation d'un produit de fonction :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\mathcal{L}^*_{x^*}t}Q^*_{x^*,y}(t)\right) = \left(\mathcal{L}^*_{x^*}Q^*_{x^*,y}(t) + Q^{*'}_{x^*,y}(t)\right)\mathrm{e}^{\mathcal{L}^*_{x^*}t}$$

d'où :

$$Q^{*'}_{x^*,y}(t) = \sum_{z^*}\sum_{y^* \in \mathcal{S}^*} \mathcal{L}^*_{x^*,z^*}P^*_{z^*,y^*}(t)\Lambda(y^*, y)$$

D'où $Q^{*'}(0) = \mathcal{L}^*\Lambda$, or $Q^* \equiv Q$ donc $\mathcal{L}^*\Lambda = \Lambda\mathcal{L}$.

(iii)⇒(i) Soit X^* un processus de saut stratifié tel que (X, X^*) ait pour générateur $\bar{\mathcal{L}}$ et pour loi initiale $\bar{\mu}$ (on rappelle que $\bar{\mu}(x_0, x_0^*) = \mu_0^*(x_0^*)\Lambda(x_0^*, x_0)$). Par construction, un tel processus vérifie (28). Montrons qu'il vérifie (27).

On pose $T_0 = 0$ et $\forall i \geq 0$ on note T^k_{i+1} le k-ième temps de saut de (X, X^*) suivant T_i, $k \in \mathbb{N}$ et :

$$T_{i+1} := \lim_{k \to \infty} T^k_{i+1}$$

le $(i+1)$-ième temps d'explosion. D'après les hypothèses,

$$\lim_{i \to +\infty} T_i = +\infty$$

On prend comme convention $T^k_j = +\infty$, $\forall k$, $\forall j > i$ si $T_i = +\infty$.

On commence par prouver que le processus (X, X^*) est continu presque sûrement à chaque temps d'explosion T_i. En effet, X^* est continu en T_i par définition d'un processus stratifié, et X est discontinu seulement quand il saute. Appelons σ_n les temps de sauts de X, supposons par récurrence n que (X, X^*) est continu à chaque temps d'explosion jusqu'à σ_n, et appelons T_i le dernier temps d'explosion avant σ_n. Soit $\tilde{\mathcal{L}}$ un générateur sur $\mathcal{S}^*$ défini par $\tilde{\mathcal{L}}_{x^*,y^*} = \bar{\mathcal{L}}_{(X_{\sigma_n},x^*),(X_{\sigma_n},y^*)}$ et Y un processus stratifié partant de $X^*_{\sigma_n}$ et de générateur $\tilde{\mathcal{L}}$. En regardant la construction de X^* que l'on a fait dans la preuve du théorème 2.1, on s'aperçoit que $(X^*_{\sigma_n+t})_t$ est égal en loi à Y jusqu'au temps σ_{n+1}. En notant τ_k les temps de saut de Y avant sa première explosion, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_{i+1} = \sigma_{n+1} \,|\, \mathcal{F}^{\bar{X}}_{\sigma_n}) &= \mathbb{P}(\sigma_n + \tau_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \sigma_{n+1} \,|\, \mathcal{F}^{\bar{X}}_{\sigma_n}) \\
&= \mathbb{P}(\sigma_n + \tau_1 + \sum_{k=1}^{\infty}(\tau_{k+1} - \tau_k) = \sigma_{n+1} \,|\, \mathcal{F}^{\bar{X}}_{\sigma_n}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

car τ_1 est une variable aléatoire continue, indépendante de $\tau_{k+1} - \tau_k$, σ_n et σ_{n+1} conditionnellement à $\mathcal{F}^{\bar{X}}_{\sigma_n}$. En procédant de la même manière (par un second niveau de récurrence), en commençant de T_{i+j}, $j \geq 0$, si ce dernier est plus petit que σ_{n+1}, on termine la récurrence. En conclusion, on obtient $\sigma_n \neq T_m$, $\forall m, n \geq 0$.

On va maintenant montrer par récurrence sur i que pour tout $0 = t_1 < \cdots < t_n < \infty$ et tout $(x_1^*, \dots, x_n^*, x_n) \in \{\mathcal{S}^*\}^n \times \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X^*_{t_1} = x^*_1, \dots, X^*_{T_i} = x^*_n, X_{T_i} = x_n \mid t_{n-1} < T_i \leq t_n) \\
=&\mathbb{P}(X^*_{t_1} = x^*_1, \dots, X^*_{T_i} = x^*_n \mid t_{n-1} < T_i \leq t_n)\Lambda(x^*_n, x_n)
\end{aligned} \tag{29}
$$

et :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X^*_{t_1} = x^*_1, \dots, X^*_{t_n} = x^*_n, X_{t_n} = x_n \mid T_{i+1} > t_n) \\
=&\mathbb{P}(X^*_{t_1} = x^*_1, \dots, X^*_{t_n} = x^*_n \mid T_{i+1} > t_n)\Lambda(x^*_n, x_n)
\end{aligned} \tag{30}
$$

Pour $i = 0$, on considère simplement un processus minimal associé à $\bar{\mathcal{L}}$ et la récurrence est initialisée par la loi initiale de (X, X^*) (pour (29)) et le théorème 2.1 (pour (30)). Supposons donc la récurrence vraie pour $i - 1 \geq 0$. De (30) on déduit :

$$
\mathscr{L}(X_t \mid \mathcal{F}^{X^*}_t, T_i > t) = \Lambda(X^*_{T_i}, \cdot), \quad \forall t > 0
$$

et de la même manière que pour le corollaire 2.4 :

$$
\mathscr{L}(X_S \mid \mathcal{F}^{X^*}_S) = \Lambda(X^*_S, \cdot)
$$

pour tout temps d'arrêt $S < T_i$ presque sûrement.

On pose :

$$
\mathcal{A}_i := \bigvee_{k\geq 0} \mathcal{F}^{X^*}_{T^k_i}
$$

la tribu engendrée par la réunion des $\mathcal{F}^{X^*}_{T^k_i}$.

Soit G une variable aléatoire réelle $\mathcal{A}_i$-mesurable bornée et $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ continue bornée. D'après le théorème de convergence des martingales fermées, on a $\mathbb{E}(G \mid \mathcal{F}^{X^*}_{T_i^k}) \to G$ p.s. et donc en utilisant le théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Gf(X_{T_i})) &= \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}(\mathbb{E}(G \mid \mathcal{F}^{X^*}_{T_i^k})\ f(X_{T_i^k}))\\ &= \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}(\mathbb{E}(G \mid \mathcal{F}_{T_i^k})\Lambda[f](X^*_{T_i^k}))\\ &= \mathbb{E}(G\Lambda[f](X^*_{T_i}))\end{aligned}$$

Maintenant, si on se donne $0 = t_1 < \cdots < t_n < \infty$ et $(x_1^*, \ldots, x_n^*) \in \{\mathcal{S}^*\}^n,\ n \in \mathbb{N}$ alors il existe une suite décroissante $(V_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de voisinages de x_n^* telle que $\bigcap_m V_m = \{x_n^*\}$ et on a :

$$\begin{aligned}&\{X^*_{t_1} = x_1^*, \ldots, X^*_{T_i} = x_n^*, T_i \in \,]t_{n-1}, t_n]\}\\ =&\{X^*_{t_1} = x_1^*, \ldots, \lim_{k\to\infty} X^*_{T_i^k} = x_n^*, \lim_{k\to\infty} T_i^k \in \,]t_{n-1}, t_n]\}\\ =&\bigcap_{m\geq 0} \bigcup_{K\geq 0} \bigcap_{k\geq K} \{X^*_{t_1} = x_1^*, \ldots, X^*_{T_i^k} \in V_m, T_i^k \in \,]t_{n-1}, t_n]\}\\ =&\bigcap_{m\leq 0} \bigcup_{K\geq 0} \bigcap_{k\geq K} \{X^*_{t_1} = x_1^*, \ldots, X^*_{T_i^k} \in V_m, T_i^k \in \,]t_{n-1}, t_n]\}\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\{X^*_{t_1} = x_1^*, \ldots, X^*_{t_n^*} = x_n^*, T_i = t_n\} \in \mathcal{A}_i$$

et on en déduit (29). Autrement dit, la relation d'entrelacement est conservée "au temps d'explosion T_i".

Par construction, le processus $((X, X^*)_{T_i+t})_{t\geq 0}$ a la loi d'un processus minimal (Y, Y^*) de générateur $\bar{\mathcal{L}}$ jusqu'au temps d'explosion T_{i+1}. Ce processus est indépendant de $((X, X^*)_{T_i\wedge t})_{t\geq 0}$ conditionnellement à $(X, X^*)_{T_i}$ et grâce à ce qui précède, on sait aussi que la loi initiale de ce processus minimal vérifie :

$$\mathbb{P}(Y_0 = x_0 \mid Y_0^* = x_0^*) = \Lambda(x_0^*, x_0)$$

pour tout $(x_0, x_0^*) \in \bar{\mathcal{S}}$. Du théorème 2.1 on déduit que pour tout $0 = t_1 < \cdots < t_n < \infty$ et tout $(x_1^*, \ldots, x_n^*, x_n) \in \{\mathcal{S}^*\}^n \times \mathcal{S},\ n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X^*_{t_1} = x_1^*, \ldots, X^*_{t_n} = x_n^*, X_{t_n} = x_n \mid T_{i+1} > t_n,\ T_i \leq t_1)\\ =&\mathbb{P}(Y^*_{t_1-T_i} = x_1^*, \ldots, Y^*_{t_n-T_i} = x_n^*, Y_{t_n-T_i} = x_n \mid T^Y > t_n - T_i,\ T_i \leq t_1)\\ =&\mathbb{P}(Y^*_{t_1-T_i} = x_1^*, \ldots, Y^*_{t_n-T_i} = x_n^* \mid T^Y > t_n - T_i,\ T_i \leq t_1)\Lambda(x_n^*, x_n)\\ =&\mathbb{P}(X^*_{t_1} = x_1^*, \ldots, X^*_{t_n} = x_n^* \mid T_{i+1} > t_n)\Lambda(x_n^*, x_n)\end{aligned}$$

où T^Y est le premier temps d'explosion du processus (Y, Y^*). On montre ainsi que l'entrelacement- est conservée après le temps d'explosion T_i. En effet, si $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $\bar{x} \in \bar{\mathcal{S}}$, alors en utilisant :

i. le caractère markovien de (X, X^*)

ii. l'indépendance de X_{T_i} et $X^*_{[0,T_i]}$ conditionnellement à $X^*_{T_i}$

iii. la loi d'un processus minimal $(Y, Y^*) := (X, X*)_{t+\cdot}$ de générateur $\bar{\mathcal{L}}$, donnée par le théorème 2.1

on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X^*_{t_1} = x^*_1, \ldots, X^*_{t_n} = x^*_n, X_{t_n} = x_n \mid T_i \in \,]t_k, t_{k+1}]\,,\ T_{i+1} > t_n) \\
&= \sum_{\bar{x}\in\bar{\mathcal{S}}} \mathbb{P}(X^*_{t_1} = x^*_1, \ldots, X^*_{t_n} = x^*_n, X_{t_n} = x_n, \bar{X}_{T_i} = \bar{x} \mid T_i \in \,]t_k, t_{k+1}]\,,\ T_{i+1} > t_n) \\
&\overset{i.}{=} \sum_{\bar{x}\in\bar{\mathcal{S}}} \mathbb{P}(X^*_{t_1} = x^*_1, \ldots, X^*_{t_k} = x^*_k, \bar{X}_{T_i} = \bar{x} \mid T_i \in \,]t_k, t_{k+1}]\,,\ T_{i+1} > t_n) \\
&\quad \times \mathbb{P}(X^*_{t_{k+1}} = x^*_{k+1}, \ldots, X^*_{t_n} = x^*_n, X_{t_n} = x_n \mid \bar{X}_{T_i} = \bar{x},\ T_{i+1} > t_n,\ T_i \in \,]t_k, t_{k+1}]) \\
&\overset{ii.}{=} \sum_{\bar{x}\in\bar{\mathcal{S}}} \mathbb{P}(X^*_{t_1} = x^*_1, \ldots, X^*_{t_k} = x^*_k, X^*_{T_i} = x^* \mid T_i \in \,]t_k, t_{k+1}]\,,\ T_{i+1} > t_n) \\
&\qquad \times \mathbb{P}(X_{T_i} = x \mid X^*_{T_i} = x^*,\ T_{i+1} > t_n,\ T_i \in \,]t_k, t_{k+1}]) \\
&\qquad \times \frac{\mathbb{P}(X_{T_i} = x, X^*_{t_{k+1}} = x^*_{k+1}, \ldots, X_{t_n} = x_n \mid X^*_{T_i} = x^*,\ T_{i+1} > t_n,\ T_i \in \,]t_k, t_{k+1}])}{\mathbb{P}(X_{T_i} = x \mid X^*_{T_i} = x^*,\ T_{i+1} > t_n,\ T_i \in \,]t_k, t_{k+1}])} \\
&= \sum_{\bar{x}\in\bar{\mathcal{S}}} \mathbb{P}(X^*_{t_1} = x^*_1, \ldots, X^*_{t_k} = x^*_k, X^*_{T_i} = x^* \mid T_i \in \,]t_k, t_{k+1}]\,,\ T_{i+1} > t_n) \\
&\qquad \times \mathbb{P}(X_{T_i} = x, X^*_{t_{k+1}} = x^*_{k+1}, \ldots, X_{t_n} = x_n \mid X^*_{T_i} = x^*,\ T_{i+1} > t_n,\ T_i \in \,]t_k, t_{k+1}]) \\
&= \sum_{x^*\in\mathcal{S}^*} \sum_{x\in\mathcal{S}} \mathbb{P}(X^*_{t_1} = x^*_1, \ldots, X^*_{t_k} = x^*_k, X^*_{T_i} = x^* \mid T_i \in \,]t_k, t_{k+1}]\,,\ T_{i+1} > t_n) \\
&\qquad \times \mathbb{P}(X_{T_i} = x, X^*_{t_{k+1}} = x^*_{k+1}, \ldots, X_{t_n} = x_n \mid X^*_{T_i} = x^*,\ T_{i+1} > t_n,\ T_i \in \,]t_k, t_{k+1}]) \\
&= \sum_{x^*\in\mathcal{S}^*} \mathbb{P}(X^*_{t_1} = x^*_1, \ldots, X^*_{t_k} = x^*_k, X^*_{T_i} = x^* \mid T_i \in \,]t_k, t_{k+1}]\,,\ T_{i+1} > t_n) \\
&\qquad \times \mathbb{P}(X^*_{t_{k+1}} = x^*_{k+1}, \ldots, X_{t_n} = x_n \mid X^*_{T_i} = x^*,\ T_{i+1} > t_n,\ T_i \in \,]t_k, t_{k+1}]) \\
&= \sum_{x^*\in\mathcal{S}^*} \mathbb{P}(X^*_{t_1} = x^*_1, \ldots, X^*_{t_k} = x^*_k, X^*_{T_i} = x^* \mid T_i \in \,]t_k, t_{k+1}]\,,\ T_{i+1} > t_n) \\
&\qquad \times \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbb{P}(X^*_{t_{k+1}} = x^*_{k+1}, \ldots, X_{t_n} = x_n \mid X^*_{T_i} = x^*,\ T_{i+1} > t_n,\ T_i = t)\mathrm{d}t \\
&\overset{iii.}{=} \sum_{x^*\in\mathcal{S}^*} \mathbb{P}(X^*_{t_1} = x^*_1, \ldots, X^*_{t_k} = x^*_k, X^*_{T_i} = x^* \mid T_i \in \,]t_k, t_{k+1}]\,,\ T_{i+1} > t_n) \\
&\qquad \times \mathbb{P}(X^*_{t_{k+1}} = x^*_{k+1}, \ldots, X^*_{t_n} = x^*_n \mid X^*_{T_i} = x^*,\ T_{i+1} > t_n,\ T_i \in \,]t_k, t_{k+1}])\ \Lambda(x^*_n, x_n)
\end{aligned}
$$

Puis en gardant le terme $\Lambda(x^*_n, x_n)$ de côté, on refait les mêmes étapes dans l'autre sens :

$$
\begin{aligned}
=&\Lambda(x_n^*, x_n) \sum_{\bar{x}\in\bar{\mathcal{S}}} \mathbb{P}(X^*_{t_1} = x_1^*, \dots, X^*_{t_k} = x_k^*, X^*_{T_i} = x^* \mid T_i \in \left]t_k, t_{k+1}\right],\ T_{i+1} > t_n) \\
&\quad \times \mathbb{P}(X_{T_i} = x, X^*_{t_{k+1}} = x_1^*, \dots, X^*_{t_n} = x_n^* \mid X^*_{T_i} = x^*,\ T_{i+1} > t_n,\ T_i \in \left]t_k, t_{k+1}\right]) \\
=&\Lambda(x_n^*, x_n) \sum_{\bar{x}\in\bar{\mathcal{S}}} \mathbb{P}(X^*_{t_1} = x_1^*, \dots, X^*_{t_k} = x_k^*, X^*_{T_i} = x^* \mid T_i \in \left]t_k, t_{k+1}\right],\ T_{i+1} > t_n) \\
&\quad \times \mathbb{P}(X_{T_i} = x \mid X^*_{T_i} = x^*,\ T_{i+1} > t_n,\ T_i \in \left]t_k, t_{k+1}\right]) \\
&\quad \times \frac{\mathbb{P}(X_{T_i} = x, X^*_{t_{k+1}} = x_1^*, \dots, X^*_{t_n} = x_n^* \mid X^*_{T_i} = x^*,\ T_{i+1} > t_n,\ T_i \in \left]t_k, t_{k+1}\right])}{\mathbb{P}(X_{T_i} = x \mid X^*_{T_i} = x^*,\ T_{i+1} > t_n,\ T_i \in \left]t_k, t_{k+1}\right])} \\
=&\Lambda(x_n^*, x_n) \sum_{\bar{x}\in\bar{\mathcal{S}}} \mathbb{P}(X^*_{t_1} = x_1^*, \dots, X^*_{t_k} = x_k^*, \bar{X}_{T_i} = \bar{x} \mid T_i \in \left]t_k, t_{k+1}\right],\ T_{i+1} > t_n) \\
&\quad \times \mathbb{P}(X^*_{t_{k+1}} = x_1^*, \dots, X^*_{t_n} = x_n^* \mid \bar{X}_{T_i} = \bar{x},\ T_{i+1} > t_n,\ T_i \in \left]t_k, t_{k+1}\right]) \\
=&\Lambda(x_n^*, x_n) \sum_{\bar{x}\in\bar{\mathcal{S}}} \mathbb{P}(X^*_{t_1} = x_1^*, \dots, X^*_{t_n} = x_n^*, \bar{X}_{T_i} = \bar{x} \mid T_i \in \left]t_k, t_{k+1}\right],\ T_{i+1} > t_n) \\
=&\mathbb{P}(X^*_{t_1} = x_1^*, \dots, X^*_{t_n} = x_n^* \mid T_i \in \left]t_k, t_{k+1}\right],\ T_{i+1} > t_n)\ \Lambda(x_n^*, x_n)
\end{aligned}
$$

et donc il n'y a plus qu'à sommer sur les intervalles possibles pour T_i :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X^*_{t_1} = x_1^*, \dots, X^*_{t_n} = x_n^*, X_{t_n} = x_n \mid T_{i+1} > t_n) \\
=&\mathbb{P}(X^*_{t_1} = x_1^*, \dots, X^*_{t_n} = x_n^*, X_{t_n} = x_n \mid T_{i+1} > t_n,\ T_i > t_n)\ \mathbb{P}(T_i > t_n \mid T_{i+1} > t_n) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X^*_{t_1} = x_1^*, \dots, X^*_{t_n} = x_n^*, X_{t_n} = x_n,\ t_k < T_i \le t_{k+1} \mid T_{i+1} > t_n) \\
=&\mathbb{P}(X^*_{t_1} = x_1^*, \dots, X^*_{t_n} = x_n^* \mid T_i > t_n)\ \Lambda(x_n^*, x_n)\ \mathbb{P}(T_i > t_n \mid T_{i+1} > t_n) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X^*_{t_1} = x_1^*, \dots, X^*_{t_n} = x_n^*,\ t_k < T_i \le t_{k+1} \mid T_{i+1} > t_n)\ \Lambda(x_n^*, x_n) \\
=&\mathbb{P}(X^*_{t_1} = x_1^*, \dots, X^*_{t_n} = x_n^* \mid T_{i+1} > t_n)\ \Lambda(x_n^*, x_n)
\end{aligned}
$$

ce qui achève la démonstration de la récurrence. On en déduit :

$$
\mathscr{L}(X_t \mid \mathcal{F}_t^{X^*},\ T_i > t) = \Lambda(X_t^*, \cdot)
$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$$
\mathbb{E}(\mathbf{1}_{T_i > t}\ G\ f(X_t)) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{T_i > t}\ G\ \Lambda\left[f\right](X_t^*))
$$

pour tout fonction f continue bornée et pour tout variable aléatoire G bornée et $\mathcal{F}_t^{X^*}$-mesurable. Or, $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{1}_{T_i > t} = 1$ presque sûrement et on conclut par convergence dominée que :

$$\mathscr{L}(X_t \mid \mathcal{F}_t^{X^*}) = \Lambda(X_t^*, \cdot)$$

□

Corollaire 2.12. *La condition (27) peut-être remplacée par :*

$$\mathscr{L}(X_T \mid \mathcal{F}_T^{X^*},\, T < \infty) = \Lambda(X_T^*, \cdot) \tag{31}$$

pour tout $\mathcal{F}_t^{X^*}$-temps d'arrêt T.

Démonstration. La condition (31) implique trivialement (27). L'autre sens est identique à la preuve du corollaire 2.4. □

3 Application au cas de processus de vie et de mort

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de vie et de mort sur $\mathbb{Z}$, de taux de décès $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et de naissance $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, tous strictement positifs. On suppose que les coefficients sont tels que X est non-explosif et récurrent positif, c'est-à-dire (cf Anderson [2] Chapitre 8) :

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\prod_{j=1}^{i}\frac{b_j}{a_{j+1}} + \sum_{i=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{i}\frac{a_{-j}}{b_{-j-1}} < \infty \tag{32}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{+\infty} \dfrac{1}{b_i\mu(i)} = \infty \\ \sum_{i=-\infty}^{0} \dfrac{1}{b_i\mu(i)} = \infty \end{cases} \tag{33}$$

où μ est la mesure stationnaire, définie de manière unique par les relations :

$$\mu(n)b_n = \mu(n+1)a_{n+1} \tag{34}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mu(n) = 1 \tag{35}$$

soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \mu(n) =& \mu(0)\prod_{i=0}^{n-1}\frac{b_i}{a_{i+1}} \\ \mu(-n) =& \mu(0)\prod_{i=0}^{n-1}\frac{a_{-i}}{b_{-i-1}} \end{aligned}$$

avec $\mu(0) = \dfrac{1}{1 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\prod_{i=0}^{n-1} \dfrac{b_i}{a_{i+1}} + \prod_{i=0}^{n-1} \dfrac{a_{-i}}{b_{-i-1}}\right)}$.

On suppose que les coefficients du générateurs sont tels que :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(n) b_n < \infty$$

Le générateur $(\mathcal{L}_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$ du processus X est défini par :

$$\forall i,j \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{L}_{i,j} = \begin{cases} b_i & \text{si } j = i+1 \\ a_i & \text{si } j = i-1 \\ -a_i - b_i & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{36}$$

On note μ_t la distribution de X_t, $\forall t \geq 0$.

Partant de ce processus, on cherche à construire un dual de stationnarité forte X^*, à valeurs dans :

$$\mathbf{E} := \{(p,q) \in (\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}) \times (\mathbb{Z} \cup \{+\infty\});\ p \leq q\}$$

l'ensemble des intervalles de $\mathbb{Z}$, lié à X par le noyau Λ défini par :

$$\Lambda((p,q),n) = \frac{\mu(n)}{\mu(\llbracket p,q \rrbracket)}, \quad \forall (p,q) \in \mathbf{E} \quad \forall n \in \llbracket p,q \rrbracket$$

(on remarquera au passage que $\mathcal{L}$ est bien Λ-intégrable comme requis dans la section 2). Ici et dans toute la suite, pour $(p,q) \in \mathbf{E}$, $n \in \llbracket p,q \rrbracket$ signifie $n \in [p,q] \cap \mathbb{Z}$ (on exclut notamment $n = \pm\infty$).

On munit $\mathbf{E}$ de la topologie engendrée par les ouverts suivants :

$$\{(p,q)\}$$
$$\{(p,q+i),\ i \in \mathbb{N}\} \cup \{(p,+\infty)\}$$
$$\{(p-i,q),\ i \in \mathbb{N}\} \cup \{(-\infty,q)\}$$
$$\{(-\infty,q+i),\ i \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{Z}\}$$
$$\{(p-i,+\infty),\ i \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{Z}\}$$
$$\{(p-i,q+j),\ i,j \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{Z}\}$$

avec $-\infty < p \leq q < +\infty$. On pose :

$$\mathbf{E}_1 := \{(p,q) \in \mathbb{Z}^2;\ p \leq q\}$$

$$\mathbf{E}_2 := \{(-\infty, q) \in \mathbf{E}\} \cup \{(p, +\infty) \in \mathbf{E}\}$$

$$\mathbf{E}_3 := \{\mathbb{Z}\}$$

Soit $\mathcal{L}^*$ un générateur sur $\mathbf{E}$ défini de la manière suivante :

$$\mathcal{L}^*((p,q),(p_i,q_i)) = \begin{cases} \dfrac{\mu([\![p-1,q]\!])}{\mu([\![p,q]\!])} b_{p-1} =: a'_{p,q} & (p_i,q_i) = (p-1,q) \\ \dfrac{\mu([\![p,q+1]\!])}{\mu([\![p,q]\!])} a_{q+1} =: b_{p,q} & (p_i,q_i) = (p,q+1) \\ \dfrac{\mu([\![p+1,q]\!])}{\mu([\![p,q]\!])} a_p =: b'_{p,q} & (p_i,q_i) = (p+1,q) \\ \dfrac{\mu([\![p,q-1]\!])}{\mu([\![p,q]\!])} b_q =: a_{b,q} & (p_i,q_i) = (p,q-1) \\ 0 \quad \text{pour tout autre} & (p_i,q_i) \neq (p,q) \end{cases} \tag{37}$$

pour tout $(p,q) \in \mathbf{E}$, avec comme convention $a_\infty = b_\infty = a_{-\infty} = b_{-\infty} = 0$. Alors, on a la :

Proposition 3.1. *Il existe une mesure μ_0^* sur $\mathbf{E}$ et un processus minimal X^* de distribution initiale μ_0^* et de générateur $\mathcal{L}^*$ tel que X^* soit Λ-lié avec X.*

Démonstration. D'après le théorème 2.1, il suffit d'avoir $\mu_0^*\Lambda = \mu_0$ et $\mathcal{L}^*\Lambda = \Lambda\mathcal{L}$. Pour le premier c'est immédiat si on prend la mesure qui ne charge que des singletons : $\mu_0^*((m,n)) = \delta_{m,n}\ \mu_0(n)$. Pour le deuxième : $\forall (p,q) \in \mathbf{E}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}(\Lambda\mathcal{L})_{(p,q),n} &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \Lambda((p,q),m)\ \mathcal{L}(m,n) \\ &= \sum_{m\in[\![p,q]\!]} \Lambda((p,q),m)\ \mathcal{L}(m,n) \\ &= \frac{\mu(n-1)}{\mu([\![p,q]\!])}\ \delta_{n-1}([\![p,q]\!])\ b_{n-1} \\ +\frac{\mu(n+1)}{\mu([\![p,q]\!])}\ \delta_{n+1}&([\![p,q]\!])\ a_{n+1} - \frac{\mu(n)}{\mu([\![p,q]\!])}\ \delta_n([\![p,q]\!])\ (b_n + a_n) \\ &= \frac{\mu(n)[b_n(\delta_{n,p-1} - \delta_{n,q}) + a_n(\delta_{n,q+1} - \delta_{n,p})]}{\mu([\![p,q]\!])}\end{aligned}$$

et :

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}^*\Lambda)_{(p,q),n} &= \sum_{(p',q')\in\mathbf{E}} \mathcal{L}^*((p,q),(p',q'))\ \Lambda((p',q'),n) \\
&= \frac{\mu(n)}{\mu([\![p,q]\!])}(b_{p-1}\delta_n([\![p-1,q]\!]) - \delta_n([\![p,q]\!])b_{p-1} \\
&\qquad + a_{q+1}\delta_n([\![p,q+1]\!]) - \delta_n([\![p,q]\!])a_{q+1} \\
&\qquad + a_p\delta_n([\![p+1,q]\!]) - \delta_n([\![p,q]\!])a_p \\
&\qquad + b_q\delta_n([\![p,q-1]\!]) - \delta_n([\![p,q]\!])b_q) \\
&= \frac{\mu(n)[b_n(\delta_{n,p-1}-\delta_{n,q}) + a_n(\delta_{n,q+1}-\delta_{n,p})]}{\mu([\![p,q]\!])} \\
&= (\Lambda\mathcal{L})_{(p,q),n}
\end{aligned}
$$

□

On a donc un processus minimal $(X_t^*) = (P_t, Q_t) \in \mathbf{E}$. Les bornes P et Q évoluent comme des processus de vie et de mort individuellement non-markoviens sur $\mathbb{Z}$, jusqu'à un possible temps d'explosion T. Ici, le seul état absorbant pour X^* est $\mathbb{Z}$, mais il se trouve qu'il ne peut pas être atteint en un nombre fini de sauts depuis un autre état. Il nous faut donc considérer un processus de saut stratifié associé à $\mathcal{L}^*$, ce qui est rendu possible par la :

Proposition 3.2. *$\mathcal{L}^*$ est stratifié sur $\mathbf{E}$, et $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$ est une stratification de $\mathcal{L}^*$.*

Démonstration. Pour $(X_t^*) = (P_t, Q_t)$ un processus minimal associé à $\mathcal{L}^*$ et de loi initiale μ_0^*, on appelle T son premier temps d'explosion, et on pose :

$$
T_1 := \begin{cases} T & \text{si } T \text{ est un temps d'explosion pour } P \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}
$$

$$
T_2 := \begin{cases} T & \text{si } T \text{ est un temps d'explosion pour } Q \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}
$$

de sorte que $T = T_1 \wedge T_2$.

On va montrer que $\lim_{t\to T} Q_t = +\infty$ p.s. si $T = T_2$, et on en déduit par symétrie que $\lim_{t\to T} P_t = -\infty$ si $T = T_1$. Pour cela, on considère le processus $X^* = (P, Q)$ couplé avec un processus de vie et de mort (homogène) Z de même loi initiale que Q, correspondant à l'évolution de la borne droite de X^* lorsque la borne gauche est en $-\infty$. Un tel couple est donné par le :

Lemme 3.3. *Si $T = T_2$, il existe un couplage (X^*, Z) tel que $Q_t \geq Z_t$, $\forall 0 \leq t \leq T$.*

Démonstration. On va construire $\tilde{X}^*_t := (-\infty, Z_t)$ un processus de Markov de générateur $\mathcal{L}^*$. On simule $X^*_0 = (P_0, Q_0)$ selon sa loi initiale μ^*_0, et on pose $\tilde{X}^*_0 = (-\infty, Q_0)$. Le processus Z est un processus de vie et de mort, de taux de décès et de naissance respectivement :

$$\tilde{b}_n = \frac{\mu([\![-\infty, n+1]\!])}{\mu([\![-\infty, n]\!])} a_{n+1} \quad \text{et} \quad \tilde{a}_n = \frac{\mu([\![-\infty, n-1]\!])}{\mu([\![-\infty, n]\!])} b_n$$

et on a, $\forall (p, q) \in \mathbf{E}$:

$$\begin{aligned}
b_{p,q} &= \frac{\mu([\![p, q+1]\!])}{\mu([\![p, q]\!])} a_{q+1} \\
&= (1 + \frac{\mu(q+1)}{\mu([\![p, q]\!])}) a_p \\
&\geq (1 + \frac{\mu(q+1)}{\mu([\![-\infty, q]\!])}) a_p \\
&= \frac{\mu(]-\infty, q+1])}{\mu([\![-\infty, q]\!])} a_p \\
&= \tilde{b}_q \\
a_{p,q} &= \frac{\mu([\![p, q-1]\!])}{\mu([\![p, q]\!])} b_q \\
&\leq \frac{\mu(]-\infty, q-1])}{\mu([\![-\infty, q]\!])} b_q \\
&= \tilde{a}_q
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que les naissances se font en moyenne plus rapidement pour le processus $(Q_t)_t$, et les décès plus lentement. Pour effectuer le couplage, on procède alors en laissant les deux processus évoluer indépendamment tant que $Q_t > Z_t$ puis, lorsqu'ils se rejoignent, en "forçant" Z_t à descendre si Q_t descend, et Q_t à monter si Z_t monte.

Pour cela, on définit par récurrence la suite (T_i) des temps de "jonction" de Q_t et Z_t et (T'_i) celle des temps de saut suivant la jonction (on autorise une jonction instantanée, c'est-à-dire qu'on peut avoir $T_{i+1} = T'_i$), et on décrit le comportement du couple (X^*, Z) entre ces temps. Soit $T_0 = 0$. $\forall i \geq 0$, on définit T'_i comme étant une variable aléatoire telle que $T'_i - T_i$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_i := \tilde{a}_{Q_{T_i}} + b_{P_{T_i}, Q_{T_i}} + a'_{P_{T_i}, Q_{T_i}} + b'_{P_{T_i}, Q_{T_i}}$. Soit T_{i+1} le temps d'arrêt :

$$T_{i+1} := \inf\{t \geq T'_i ; Q_t = Z_t\}$$

On impose $Q_t = Z_t = Q_{T_i}$ et $P_t = P_{T_i}$, $\forall T_i < t < T_i'$, puis :

$$((P_{T_i'}, Q_{T_i'}), Z_{T_i'}) = \begin{cases} ((P_{T_i}, Q_{T_i} - 1), Z_{T_i} - 1) & \text{avec probabilité } \dfrac{a_{P_{T_i}, Q_{T_i}}}{\lambda_i} \\ ((P_{T_i}, Q_{T_i} + 1), Z_{T_i} + 1) & \text{avec probabilité } \dfrac{\tilde{b}_{Q_{T_i}}}{\lambda_i} \\ ((P_{T_i}, Q_{T_i}), Z_{T_i} - 1) & \text{avec probabilité } \dfrac{\tilde{a}_{Q_{T_i}} - a_{P_{T_i}, Q_{T_i}}}{\lambda_i} \\ ((P_{T_i}, Q_{T_i} + 1), Z_{T_i}) & \text{avec probabilité } \dfrac{b_{P_{T_i}, Q_{T_i}} - \tilde{b}_{Q_{T_i}}}{\lambda_i} \\ ((P_{T_i} - 1, Q_{T_i}), Z_{T_i}) & \text{avec probabilité } \dfrac{a'_{P_{T_i}, Q_{T_i}}}{\lambda_i} \\ ((P_{T_i} + 1, Q_{T_i}), Z_{T_i}) & \text{avec probabilité } \dfrac{b'_{P_{T_i}, Q_{T_i}}}{\lambda_i} \end{cases}$$

Ensuite, X_t^* et Z_t évoluent indépendamment entre les temps T_i' et T_{i+1}. On a clairement $Q_t \geq Z_t$, $\forall 0 \leq t \leq T$, il ne reste qu'à vérifier que les marginales (X_t^*) et (Z_t) du processus ainsi construit correspondent bien aux processus souhaités. Lorsque $Z_t < Q_t$ c'est le cas par définition. Sinon, soit $\bar{\mathcal{L}}^*$ le générateur du processus couplé (X^*, Z). On a, pour toute fonction f sur $\mathbf{E} \times \mathbb{Z}$, pour tout $(p, q) \in \mathbf{E}$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}^* f((p,q),q) = {} & a_{p,q}(f((p,q-1),q-1) - f((p,q),q) \\ & + \tilde{b}_q(f((p,q+1),q+1) - f((p,q),q)) \\ & + (\tilde{a}_q - a_{p,q})(f((p,q),q-1) - f((p,q),q)) \\ & + (b_{p,q} - \tilde{b}_q)(f((p,q+1),q) - f((p,q),q)) \\ & + a'_{p,q}(f((p-1,q),q) - f((p,q),q)) \\ & + b_{p,q}(f((p+1,q),q) - f((p,q),q)) \end{aligned}$$

Ainsi, si f ne dépend pas de la première variable, on a :

$$\bar{\mathcal{L}}^* f((p,q),q) = \tilde{b}_q(f(q+1) - f(q)) + \tilde{a}_q(f(q-1) - f(q))$$

et si f ne dépend pas de la deuxième variable :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}^* f((p,q),q) = {} & a_{p,q}(f((p,q-1)) - f((p,q)) + (b_{p,q}(f((p,q+1)) - f((p,q)) \\ & + a'_{p,q}(f((p-1,q)) - f((p,q))) + b_{p,q}(f((p+1,q)) - f((p,q))) \end{aligned}$$

ce qui correspond bien aux générateurs respectifs de Z et X^*. □

Il ne reste donc plus qu'à montrer :

$$Z_t \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty \quad \text{p.s.} \tag{38}$$

$\tilde{X}_t^* = (-\infty, Z_t)$ est égal en loi à un dual de $\tilde{X}_t$. Ce dernier est récurrent positif, et pour tout $t \geq 0, \tilde{X}_t \leq Z_t$, donc $Z_t > 0$ infiniment souvent (si on considère la chaîne de saut sous-jacente). Ceci implique notamment que $Z_t \underset{t\to+\infty}{\to} -\infty$ est impossible p.s..

Si on considère le même processus $\tilde{Z}_t$ que l'on force à rester sur $\mathbb{N}$ en imposant $a_0 = 0$, alors la condition pour $\tilde{Z}_t \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$ est :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{\tilde{a}_j}{\tilde{b}_j} < \infty$$

Or :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{\tilde{a}_j}{\tilde{b}_j} &= \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{\mu(\llbracket -\infty, j-1 \rrbracket) b_j}{\mu(\llbracket -\infty, j+1 \rrbracket) a_{j+1}} \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{b_j}{a_{j+1}} \\ &< \infty \end{aligned}$$

Par conséquent, $\tilde{Z}_t \underset{t\to+\infty}{\to} \infty$ presque sûrement, et donc Z_t aussi. En effet, tant que $Z_t > 0$, le processus Z se comporte comme $\tilde{Z}$. Si l'on pose $\tau_0 = 0,\ \sigma_0 = \inf\{t \geq \tau_0,\ Z_t = 0\}$, et pour tout $i > 0$:

$$\tau_i = \inf\{t > \sigma_{i-1},\ Z_t = 1\} \quad \text{et} \quad \sigma_i = \inf\{t > \tau_i,\ Z_t = 0\}$$

(avec comme convention $\inf \varnothing = +\infty$), on a $\mathbb{P}(\tau_i < \infty \mid \sigma_{i-1} < \infty) = 1$ car $Z_t > 0$ infiniment souvent et

$$\mathbb{P}(\sigma_i < \infty \mid \tau_i < \infty) = 1 - \mathbb{P}(\tilde{Z}_t \neq 0,\ \forall t > 0 \mid \tilde{Z}_0 = 1) < 1$$

Il existe donc presque sûrement un temps τ_i pour lequel $Z_t > 0$ pour tout $t \geq \tau_i$. Comme :

$$\mathscr{L}(Z_{\tau_i + \cdot} \mid \tau_i < \infty, \sigma_i = \infty) = \mathscr{L}(\tilde{Z} \mid \tilde{Z}_0 = 1, \tilde{Z}_t > 0, \forall t > 0)$$

il vient donc $Z_t \underset{t\to+\infty}{\to} \infty$ presque sûrement.

Si au contraire $T < T_2$ alors Q n'explose pas au temps T et admet donc un dernier temps de saut T_k avant T et $\lim_{t \to T} Q_t = Q_{T_k} \in \mathbb{Z}$ presque sûrement. En faisant le même raisonnement avec P, on conclut que $\lim_{t \to T} X_t^*$ existe presque sûrement.

On vérifie alors facilement que les trois conditions pour que $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ forment une stratification de $\mathcal{L}^*$ sont vérifiées. $\square$

Par le Théorème 2.11, on est maintenant autorisé à considérer un processus de saut stratifié X^* associé au générateur $\mathcal{L}^*$ et à une loi initiale μ_0^* vérifiant $\mu_0^* \Lambda = \mu_0$, tel que X^* soit un dual de stationnarité forte. L'intérêt de ce processus est que l'existence d'un temps fort de stationnarité pour toute distribution initiale μ_0 de X est équivalente à l'absorption en temps fini de X^* en $\mathbb{Z}$, pour au moins une distribution initiale μ_0^* telle que $\mu_0^* \Lambda = \mu_0$. L'implication dans un sens est immédiate d'après la définition du noyau Λ et le corollaire 2.12, dans l'autre elle découle de la proposition suivante :

Proposition 3.4. *Si $\mu_0 = \mu_{|[\![-\infty,0]\!]}$ et $X_0^* = (-\infty, 0)$ p.s., alors le dual X^* est* optimal.

La preuve est identique à celle de Miclo [12], lemme 26.

Démonstration. On utilise la fonction de séparation $\mathfrak{s}$ (on rappelle que $\mathfrak{s}(t) := \sup_m \left(1 - \frac{\mu_t(m)}{\mu(m)}\right)$, voir [7] (1.3), avec $\mu_t = \mathcal{L}(X_t)$), et le noyau Λ. Si on appelle $T := \inf\{t > 0; Q_t = \infty\}$ le temps d'absorption de X^*, alors :

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{s}(t) &= \sup_{n \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{\mu_t(n)}{\mu(n)}\right) \\
&= \sup_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}\left(1 - \frac{\Lambda(]-\infty, Q_t], n)}{\mu(n)}\right) \\
&= 1 - \inf_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}\left(\frac{\delta_n(]-\infty, Q_t])}{\mu(]-\infty, Q_t])}\right) \\
&= 1 - \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left(\frac{\delta_n(]-\infty, Q_t])}{\mu(]-\infty, Q_t])}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Q_t = \infty) \\
&= \mathbb{P}(T > t)
\end{aligned}
$$

$\square$

Ainsi, dans ce cas, le temps d'absorption en $\mathbb{Z}$ de X^* est un temps à la stationnarité et sa finitude p.s. est équivalente à l'existence d'un temps fort de stationnarité fini (pour la loi initial μ_0).

On est enfin en mesure d'énoncer et de montrer le résultat principal de cette section :

Théorème 3.5. *Il existe un temps fort de stationnarité fini pour le processus X, pour toute distribution initiale, si et seulement si :*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(i+1) \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{\mu(j) b_j} < \infty \tag{39}$$

et

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(-i-1) \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{\mu(-j) a_{-j}} < \infty \tag{40}$$

Démonstration. • Condition nécessaire :

On se place dans les conditions de la proposition 3.4, c'est-à-dire $\mu_0 = \mu_{|[\![-\infty,0]\!]}$ et $X_0^* = [\![-\infty, 0]\!]$ p.s.. On a vu que dans ce cas, X^* est optimal, et donc s'il existe un temps fort de stationnarité alors X^* est absorbé en temps fini p.s.. Or, ceci est vrai si et seulement si la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{\tilde{a}_j}{\tilde{b}_j} \sum_{k=1}^{i} \prod_{l=1}^{k} \frac{\tilde{b}_{l-1}}{\tilde{a}_l}$$

converge. En effet, il s'agit du critère d'explosion d'un processus de vie et de mort sur $\mathbb{N}$ (voir par exemple [2], section 8.1), que l'on étend ici à une chaîne sur $\mathbb{Z}$ à valeur dans $\mathbb{N}$ infiniment souvent, de la même manière que pour (38). Cette condition se reformule ainsi :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{b_j \mu(]-\infty, j-1])}{a_{j+1} \mu(]-\infty, j+1])} \sum_{k=1}^{i} \prod_{l=1}^{k} \frac{a_l}{b_l} < \infty \\
\Leftrightarrow &\sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{b_j}{a_{j+1}} \sum_{k=1}^{i} \prod_{l=1}^{k} \frac{a_l}{b_l} < \infty \\
\Leftrightarrow &\sum_{i=1}^{\infty} \mu(i+1) \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{\mu(k) b_k} < \infty
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\mu([\![-\infty, j]\!])$ est borné pour $j \in \mathbb{N}$. Ceci prouve que (39) est une condition nécessaire. On traite (40) de la même manière,

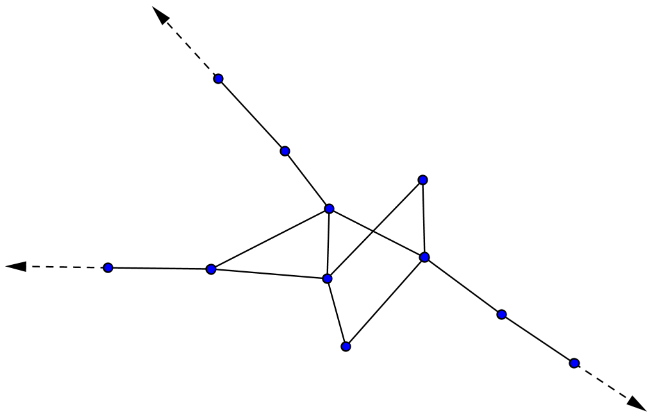

FIGURE 1 – Exemple de graphe considéré

en prenant $\mu_{|[\![0,+\infty]\!]}$ comme loi initiale pour le processus X, $X_0^* = [\![0,+\infty]\!]$ presque sûrement et en considérant la borne gauche du processus dual X^*.

- Condition suffisante :
Inversement, si le processus X^* partant de $[\![-\infty,0]\!]$ (resp. $[\![0,\infty]\!]$) est absorbé en temps fini p.s., alors d'après la Proposition 3.3, il existe un dual qui le sera aussi, pour toute loi initiale μ_0 ce qui conclut la preuve.

□

4 Marche aléatoire sur un graphe

Le cas précédent peut être considéré comme une marche aléatoire sur un graphe, où Z est vu comme un graphe constitué uniquement de deux branches infinies reliées en 0. On cherche maintenant à étendre le résultat obtenu dans la section précédente à des graphes comportant un nombre fini de branches infinies, plus un nombre fini de sommets.

On considère donc un générateur $\mathcal{L}$ sur un ensemble dénombrable G, irréductible et tel que pour tout $x \in G$ l'ensemble $\{y \in G : \mathcal{L}_{x,y} > 0 \text{ ou } \mathcal{L}_{y,x} > 0\}$ est fini. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus minimal de générateur $\mathcal{L}$ et μ_0 sa loi initiale. On munit alors G d'une structure de graphe simple, non-orienté, à poids et connexe, où deux sommets distincts p et $q \in G$ sont reliés par une arête si et seulement si $\mathcal{L}_{p,q} \neq 0$ ou $\mathcal{L}_{q,p} \neq 0$ (chaque sommet est donc de degré fini).

On suppose que $\mathcal{L}$ est non-explosif, récurrent positif et réversible, et on note μ sa mesure stationnaire. On rappelle que μ vérifie (10) :

$$\mu(q)\mathcal{L}_{q,p} = \mu(p)\mathcal{L}_{p,q}, \qquad \forall p, q \in G$$

et en particulier, $\mathcal{L}_{p,q} \neq 0$ implique $\mathcal{L}_{q,p} \neq 0$. Cette égalité ainsi que $\sum_q \mathcal{L}_{p,q} = 0$

seront à la base de tous les calculs qui suivent. On suppose de plus que :

$$\sum_{x \in G} \mu(x)\mathcal{L}_x < \infty$$

Commençons par poser le vocabulaire et les notations qui seront utilisées dans la suite.

Définition 4.1. *(i) Pour toute partie $Q \subset G$, on notera Q^c le complémentaire de Q dans G.*

(ii) Deux sommets $p, q \in G$ sont dits voisins *si ils sont reliés par une arête.*
Pour $Q \subset G$ et $q \in Q$, on note $\mathrm{V}_Q(q)$ l'ensemble des voisins de q dans Q, $\mathrm{V}(q) := \mathrm{V}_G(q)$ et $\mathrm{V}(Q) := \{q' \in \mathrm{V}_{Q^c}(q), q \in Q\}$.

(iii) Le degré *d'un sommet est le nombre de ses voisins.*

(iv) Un chemin *entre deux sommets $p, q \in G$ est une suite de sommets $p = p_1, \ldots, p_n = q$ telle que p_i et p_{i+1} soient voisins, pour tout $1 \leq i < n$, et que tous les p_i soient distincts.*

(v) Un sous-ensemble Q de G est dit connexe *si entre n'importe quel couple de sommets de Q il existe un chemin inclus dans Q. Il est dit* convexe *si tout chemin entre deux sommets de Q est inclus dans Q.*

(vi) Si $Q' \subset Q \subset G$, Q' est une composante connexe *de Q si Q' est connexe et maximal (pour l'inclusion) parmi les sous-ensembles connexes de Q. On note $\mathscr{C}(Q)$ l'ensemble des composantes connexes de Q.*

(vii) On appelle centre de G *et on note C_G la réunion de tous les chemins entre deux sommets de degrés différents de deux (c'est-à-dire* l'enveloppe convexe *de l'ensemble de ces sommets).*

(viii) On appelle branche infinie *toute composante connexe (nécessairement infinie) de $G \setminus C_G$. On note Q_i, $i \in I$ les différentes branches infinies de G.*

(ix) A chaque branche infinie Q_i, on adjoint un point à l'infini noté Δ_i. On note $\bar{Q}_i = Q_i \cup \{\Delta_i\}$.

(x) Dans le cas où C_G est non vide, si l'on munit $\mathbb{N}$ d'une structure de graphe où il existe une arête entre n et $m \in \mathbb{N}$ si et seulement si $|n - m| = 1$, alors chaque Q_i est isomorphe à $\mathbb{N}$ en tant que graphe et on note $\varphi_i : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \to \bar{Q}_i$ l'unique isomorphisme correspondant, complété en posant $\varphi_i(\infty) = \Delta_i$. On utilisera également la notation suivante :

$$\varphi_i([\![p, \infty]\!]) := \bigcup_{q \geq p} \{\varphi_i(q)\} \cup \{\Delta_i\}$$

(xi) On note, comme en (9) :

$$\mu^i(n) := \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\mathcal{L}_{\varphi_i(k),\varphi_i(k+1)}}{\mathcal{L}_{\varphi_i(k+1),\varphi_i(k)}} = \frac{\mu(\varphi_i(k))}{\mu(\varphi_i(0))}$$

On suppose donc que C_G est fini, ainsi que le nombre de branches infinies ($I = [\![1, \dots, N]\!]$ avec $N \in \mathbb{N}$), et non vide (le cas où C_G est vide correspond à $G = \mathbb{Z}$, qui a été traité dans la section précédente). Dans ce contexte on pose :

$$\bar{G} = G \cup \bigcup_{i \in I} \{\Delta_i\}$$

et on définit une métrique $\bar{\mathrm{d}}$ sur $\bar{G}$ de la manière suivante :

— Si $p, q \in Q_i,\ i \in I$:

$$\bar{\mathrm{d}}(p,q) = \left| \sum_{n=\varphi_i^{-1}(p)+1}^{\varphi^{-1}(q)} \frac{1}{n^2} \right|$$

et :

$$\bar{\mathrm{d}}(p,\Delta_i) = \bar{\mathrm{d}}(\Delta_i,p) = \sum_{n=\varphi_i^{-1}(p)+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

— Si $p, q \in C_G$:

$$\bar{\mathrm{d}}(p,q) = \inf\{\mathrm{card}(\gamma), \gamma \text{ chemin entre } p \text{ et } q\} - 1$$

c'est-à-dire la longueur du plus court chemin (en particulier, si p et q sont voisins, alors $\bar{\mathrm{d}}(p,q) = 1$).

— Si $i \in I$ et (p_i, q_i) est l'unique paire voisine dans $Q_i \times C_G$, on pose :

$$\bar{\mathrm{d}}(q,p) = \bar{\mathrm{d}}(p,q) := 1 + \bar{\mathrm{d}}(p,p_i) + \bar{\mathrm{d}}(q_i,q),\ \forall p \in \bar{Q}_i,\ \forall q \in C_G$$

et :

$$\bar{\mathrm{d}}(q,p) = \bar{\mathrm{d}}(p,q) := \bar{\mathrm{d}}(p,q_i) + \bar{\mathrm{d}}(q_i,q),\ \forall p \in \bar{Q}_i\ \ \forall q \in \bar{Q}_j\ (i \neq j)$$

Remarque 4.2. *Si $p_1, p_2, p_3 \in Q_i,\ i \in I$, sont trois sommets d'une même branche infinie alors $\bar{d}(p_1,\Delta_i) < \bar{d}(p_2,\Delta_i) < \bar{d}(p_3,\Delta_i)$, si et seulement si l'unique chemin entre p_1 et p_3 contient p_2.*

Il est facile de vérifier que G muni de cette métrique est compacte : la topologie induite sur chacune des branches est celle du compactifié d'Alexandrov.

Soit G^* l'ensemble des compacts connexes non vides de $\bar{G}$, muni de la distance de Hausdorff :

$$\mathrm{d}^*(Q,Q') := \max\{\sup_{p \in Q} \inf_{p' \in Q'} \bar{\mathrm{d}}(p,p'),\ \sup_{p' \in Q'} \inf_{p \in Q} \bar{\mathrm{d}}(p,p')\}$$

C'est un sous-espace fermé de l'espace des parties compactes (muni de la distance de Hausdorff). On rappelle que ce dernier est compact et donc G^* aussi.

Décrivons un peu ces deux espaces métriques.
En notant $B_{\mathrm{d}}(x,\varepsilon)$ (respectivement $\bar{B}_{\mathrm{d}}(x,\varepsilon)$) la boule ouverte (respectivement fermée) de centre x et de rayon ε pour une métrique d, on a :

$$B_{\bar{\mathrm{d}}}(p,1/2)=\bar{B}_{\bar{\mathrm{d}}}(p,1/2)=\{p\},\quad \forall p\in C_G$$

$$B_{\bar{\mathrm{d}}}(\varphi_i(p),\frac{1}{(p+1)^2})=\bar{B}_{\bar{\mathrm{d}}}(\varphi_i(p),\frac{1}{2(p+1)^2})=\{p\},\quad \forall p\in\mathbb{N},\ \forall i\in I$$

$$B_{\bar{\mathrm{d}}}(\Delta_i,\varepsilon)=\{\varphi_i(n);\ \sum_{j=n+1}^{+\infty}\frac{1}{j^2}<\varepsilon\}\quad \forall i\in I,\ \forall\varepsilon<\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j^2}$$

$$\bar{B}_{\bar{\mathrm{d}}}(\Delta_i,\varepsilon)=\{\varphi_i(n);\ \sum_{j=n+1}^{+\infty}\frac{1}{j^2}\leq\varepsilon\}\quad \forall i\in I,\ \forall\varepsilon<\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j^2}$$

Les ensembles ci-dessus sont donc les ouvert élémentaires de la topologie induite par la métrique $\bar{\mathrm{d}}$. En particulier chaque singleton est fermé (comme complémentaire d'une réunion dénombrable d'ouverts), et chaque singleton de G est aussi ouvert. De plus, les Δ_i sont les seuls points d'accumulations de $\bar{G}$.

Les éléments de G^* sont des compacts (donc des fermés) de $\bar{G}$, c'est-à-dire des réunions finies de singletons de G et de voisinages de Δ_i tels que décrits précédemment.

Les affirmation précédentes sont faciles à vérifier à partir des définitions. Le résultat suivant n'est pas beaucoup plus difficile :

Lemme 4.3. *Soit $Q\in G^*$, et $I_0:=\{i\in I;\ \Delta_i\in Q\}$. Alors, pour tout $\eta>0$, il existe $\varepsilon>0$ tel que pour tout $Q'\in B_{\mathrm{d}^*}(Q,\varepsilon)$:*

$$Q'\setminus\left(\bigcup_{i\in I_0}B_{\bar{\mathrm{d}}}(\Delta_i,\eta)\right)=Q\setminus\left(\bigcup_{i\in I_0}B_{\bar{\mathrm{d}}}(\Delta_i,\eta)\right)$$

Autrement dit, un voisin "suffisamment proche" de Q doit coïncider avec Q en dehors de voisinages des $\Delta_i\in G$. En particulier, si $Q\in G^*$ est inclus dans G, alors Q est un point isolé (dans le sens où $\{Q\}$ est un voisinage ouvert de Q).

Démonstration. Il suffit de prendre :

$$\epsilon<\inf\{\bar{\mathrm{d}}(p,q);\ p,q\notin\bigcup_{i\in I_0}B_{\bar{\mathrm{d}}}(\Delta_i,\eta),p\in Q\}$$

□

Pour tout $i \in I \cup \{0\}$, on pose :

$$G_i^* := \{Q \in G^*;\ |\{j \in I;\ \Delta_j \in Q\} = i\} \tag{41}$$

l'ensemble des compacts connexes non-vides de G qui contiennent exactement i points Δ_j.

On définit un générateur $\mathcal{L}^*$ sur G^* par :

$$\forall Q \neq Q' \in G^*, \quad \mathcal{L}^*_{Q,Q'} := \begin{cases} \left(\dfrac{\mu(Q')}{\mu(Q)}\right) \sum\limits_{q\in Q} \mathcal{L}_{p,q} & \text{si } Q' = Q \cup \{p\},\ p \notin Q \\ \left(\dfrac{\mu(Q')}{\mu(Q)}\right) \sum\limits_{q\notin Q} \mathcal{L}_{p,q} & \text{si } Q' \in \mathscr{C}(Q \setminus \{p\}),\ p \in Q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{42}$$

(où on rappelle que $\mathscr{C}(Q)$ désigne l'ensemble des parties connexes de Q).

On remarque que les coefficients ci-dessus sont bien définis, puisque si $Q' \in \mathscr{C}(Q \setminus \{p\}) \cap \mathscr{C}(Q \setminus \{q\})$ avec $p, q \in Q$, alors nécessairement $p, q \notin Q'$ et $Q' \cup \{p\}$, $Q' \cup \{q\}$ sont connexes, donc $p = q$.

La dynamique d'un processus minimal X^* de générateur $\mathcal{L}^*$ est à comprendre ainsi : à chaque temps de saut, on rajoute à X^* un point voisin, ou on lui enlève un point voisin de son complémentaire. Lorsque le fait d'enlever un point sépare X^* en plusieurs parties connexes, on choisit l'une de ces parties avec une probabilité proportionnelle à son poids relativement à μ.

De là, on déduit que le nombre de transition possible est borné : pour un q G^* donné, le nombre de $Q \cup \{p\}$ avec $p \in V(Q)$ est majoré par $|C_G| + N$ et le nombre de $Q' \in \mathscr{C}(Q \setminus \{p\})$ avec $p \in V(Q^c)$ est borné (grossièrement) par $|C_G|^2$.

Lemme 4.4. *$\mathcal{L}^*$ est un générateur stratifié sur G^*, et $(G_0^*, \ldots, G_N^*)$ en est une stratification.*

Démonstration. Les G_i^* sont disjoints et les coefficients de $\mathcal{L}^*$ empêchent toute transition d'un ensemble G_i^* à un ensemble G_j^*, si $j > i$. Les deux premières conditions de la définition 2.5 sont donc remplies.

Soit X^* une trajectoire d'un processus minimal associé au générateur $\mathcal{L}^*$. On appelle T_n, $n \in \mathbb{N}$ la chaîne des temps de sauts de X^*, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa chaîne de sauts et $T = \lim T_n$ son temps d'explosion, que l'on suppose fini. Y passe donc par un nombre infini d'états et visite chacun d'eux un nombre fini de fois. Comme G^* est compact, il en résulte que Y admet au moins un point d'accumulation, qui est un point d'accumulation de G^*. S'il est unique alors Y_n converge vers ce point.

Supposons donc par l'absurde qu'il en existe deux distincts, que l'on appelle E_1 et E_2, limites respectives de deux sous-suites $(Y_{\phi_1(n)})_n$ et $(Y_{\phi_2(n)})_n$ de $(Y_n)_n$. L'idée de ce qui suit est de montrer qu'on ne peut pas passer infiniment souvent d'une sous-suite à l'autre.

Puisque E_1 et E_2 sont deux compacts connexes de $\bar{G}$ et $E_1 \neq E_2$, il existe $p \in G$ tel que $p \in E_1$ et $p \notin E_2$ (ou l'inverse).

D'après le lemme 4.3, il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $p \in Y_{\phi_1(n)}$, $\forall n > n_1$ et $p \notin Y_{\phi_2(n)}$, $\forall n > n_2$. Après le temps $\max\{\phi_1(n_1), \phi_2(n_2)\}$ la chaîne Y effectue donc une infinité de transition d'un état Q contenant un voisin de p à l'état $Q \cup \{p\}$. Le taux d'une telle transition étant majoré par :

$$\left(1 + \sup_{q \in V(p)} \frac{\mu(p)}{\mu(q)} \sum_{q' \in V(p)} \mathcal{L}_{p,q'}\right) < \infty$$

c'est impossible presque sûrement.

La suite $(Y_n)_n$ admet donc une limite unique p.s. $E \in G^*_k$, $k \in I \cup \{0\}$. Soit $I_0 := \{i \in I;\ \Delta_i \in E\}$. D'après le lemme 4.3, pour tout $\eta > 0$, il existe n_1 tel que pour tout $n > n_1$:

$$Y_n \setminus \left(\bigcup_{i \in I_0} B_{\bar{\mathrm{d}}}(\Delta_i, \eta)\right) = E \setminus \left(\bigcup_{i \in I_0} B_{\bar{\mathrm{d}}}(\Delta_i, \eta)\right)$$

En particulier, si $i \notin I_0$, alors $\Delta_i \notin Y_n$. De plus, il existe $n > n_1$ tel que $Y_n \neq E$, et puisque Y_n est connexe, il existe $i \in I_0$ tel que $\Delta_i \notin Y_n$. Le nombre de Δ_i dans Y_n est donc strictement plus petit que dans E, c'est-à-dire $Y_n \in G^*_j$ avec $j < k$.

Maintenant, le nombre de transition du processus minimal d'un G^*_i vers un G^*_j, $i \neq j$, est fini p.s. (puisqu'elles ne se font que si $j < i$) et donc il en existe une dernière avant le temps d'explosion. Soit T_{n_2} le temps de cette dernière transition et G^*_j, $j < k$, l'espace d'arrivée ($Y_{n_2} \in G^*_j$), alors, pour tout $t \in [T_{n_2}, T[$, $X_t \in G^*_j$. La troisième condition est donc aussi satisfaite. $\square$

On définit le noyau $\Lambda(\cdot,\cdot)$ par :

$$\forall Q \in G^*,\ p \in G, \quad \Lambda(Q, p) = \frac{\mu(p)\delta_p(Q)}{\mu(Q)}$$

de sorte que Λ est continu en la première variable et que $\mathcal{L}$ satisfait bien la condition de Λ-intégrabilité.

Lemme 4.5. *$\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^*$ vérifient $\mathcal{L}^*\Lambda = \Lambda\mathcal{L}$.*

Démonstration. Soient $Q \in G^*$ et $p \in G$. Si $p \notin Q$, alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{Q' \in G^*} \mathcal{L}^*_{Q,Q'} \Lambda(Q', p) &= \sum_{q \in G} \mathcal{L}^*_{Q,Q\cup\{q\}} \frac{\mu(p)\delta_p(Q \cup \{q\})}{\mu(Q \cup \{q\})} \\
&= \mathcal{L}^*_{Q,Q\cup\{p\}} \frac{\mu(p)}{\mu(Q \cup \{p\})} \\
&= \frac{\mu(p)}{\mu(Q)} \sum_{q \in Q} \mathcal{L}_{p,q} \\
&= \sum_{q \in Q} \frac{\mu(q)}{\mu(Q)} \mathcal{L}_{q,p} \\
&= \sum_{q \in Q} \Lambda(Q, q) \mathcal{L}_{q,p}
\end{aligned}$$

D'autre part, si $p \in Q$, alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{Q' \in G^*} \mathcal{L}^*_{Q,Q'} \Lambda(Q', p) &= \sum_{q \notin Q} \mathcal{L}^*_{Q,Q\cup\{q\}} \frac{\mu(p)}{\mu(Q \cup \{q\})} + \mathcal{L}^*_{Q,Q} \Lambda(Q, p) \\
&\quad + \sum_{q \neq p \in Q} \sum_{Q' \in \mathscr{C}(Q \setminus \{q\})} \mathcal{L}^*_{Q,Q'} \frac{\mu(p)\delta_p(Q')}{\mu(Q')} \\
&= \sum_{q \notin Q} \sum_{q' \in Q} \frac{\mu(p)}{\mu(Q)} \mathcal{L}_{q,q'} + \sum_{q \neq p \in Q} \sum_{q' \notin Q} \frac{\mu(p)}{\mu(Q)} \mathcal{L}_{q,q'} \\
&\quad + \frac{\mu(p)}{\mu(Q)} \left(\sum_{q \notin Q} \sum_{q' \notin Q} \mathcal{L}_{q,q'} + \sum_{q \in Q} \sum_{q' \in Q} \mathcal{L}_{q,q'} \right) \\
&= \frac{\mu(p)}{\mu(Q)} \left(\sum_{q \notin Q, q' \in G} \mathcal{L}_{q,q'} + \sum_{q \neq p \in Q, q' \in G} \mathcal{L}_{q,q'} + \sum_{q' \in Q} \mathcal{L}_{p,q'} \right) \\
&= \sum_{q \in Q} \frac{\mu(p)}{\mu(Q)} \mathcal{L}_{p,q} \\
&= \sum_{q \in Q} \frac{\mu(q)}{\mu(Q)} \mathcal{L}_{q,p}
\end{aligned}$$

On a donc montré que $(\mathcal{L}^*\Lambda)_{Q,p} = (\Lambda\mathcal{L})_{Q,p}$. □

Grâce aux deux lemmes précédents et au théorème 2.11 on déduit que quelque soit la loi initiale μ_0 de X, il existe un processus stratifié de générateur $\mathcal{L}^*$ qui soit Λ–lié à X (en prenant comme loi initiale pour X^*, par exemple, $\mu_0^*(A) =$

$\sum\limits_{x \in \mathcal{S}} \mu_0(x) \mathbf{1}_{A=\{x\}}$ pour tout $A \in \mathcal{S}^*$). Dans ce cas, par définition de Λ, X^* est aussi un dual de stationnarité forte pour X

On remarque facilement qu'il existe $N+1$ états absorbants pour un processus X^* de générateur $\mathcal{L}^*$: chacun des singletons $\{\Delta_i\}$ et $\bar{G}$ tout entier. Cependant, en entrelaçant X et X^* par Λ, on a :

$$\begin{aligned} 0 =& \mathbb{P}(X_t = \Delta_i \mid X_0^* \neq \{\Delta_i\}) \\ \geq& \mathbb{P}(X_t = \Delta_i \mid X_t^* = \{\Delta_i\},\ X_0^* \neq \{\Delta_i\})\, \mathbb{P}(X_t^* = \{\Delta_i\} \mid X_0^* \neq \{\Delta_i\}) \\ \geq& \mathbb{P}(X_t = \Delta_i \mid X_t^* = \{\Delta_i\})\, \mathbb{P}(X_t^* = \{\Delta_i\} \mid X_0^* \neq \{\Delta_i\}) \\ =& \mathbb{P}(X_t^* = \{\Delta_i\} \mid X_0^* \neq \{\Delta_i\}) \end{aligned} \tag{43}$$

car X est non-explosif. On en conclut que le seul état absorbant pouvant être atteint en temps fini est $\bar{G}$.

Il nous reste donc à étudier le temps d'absorption de X^*. Plus précisément, on va étudier le comportement des bornes de X^* sur chaque branche infinie en les comparant à des processus de vie et de mort sur $\mathbb{N}$.

Pour tout $i \in I$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose :

$$G_p^i := \bar{G} \setminus \varphi_i([\![p+1, \infty]\!]) = \bigcup_{j \neq i} \bar{Q}_j \cup C_G \cup \varphi_i([\![0, p]\!]) \in G^* \tag{44}$$

(c'est-à-dire l'élément de G^* contenant $\bar{G}$ tout entier sauf les points de $\bar{Q}_i$ au-delà de $\varphi_i(p)$), et :

$$\begin{cases} \mathcal{L}^i_{p,p+1} := \left(\dfrac{\mu(G^i_{p+1})}{\mu(G^i_p)} \right) \mathcal{L}_{\varphi_i(p+1), \varphi_i(p)} = \mathcal{L}^*_{G^i_p, G^i_{p+1}} \\ \mathcal{L}^i_{p+1,p} := \left(\dfrac{\mu(G^i_p)}{\mu(G^i_{p+1})} \right) \mathcal{L}_{\varphi_i(p+1), \varphi_i(p+2)} = \mathcal{L}^*_{G^i_{p+1}, G^i_p} \\ \mathcal{L}^i_{p,p} = -\mathcal{L}^i_{p,p+1} - \mathcal{L}^i_{p,p-1} \end{cases}$$

On définit ainsi des matrices $(\mathcal{L}^i_{p,q})_{p,q \in \mathbb{N}}$ de générateurs de processus de vie et de mort sur $\mathbb{N}$.

Lemme 4.6. *Il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $i \in I$ et toute mesure de probabilité μ_0^* sur G^*, il existe une famille (X^*, Y, Z^i) telle que :*

- *Le couple (X^*, Z^i) est markovien et ses marginales X^* et Z^i sont des processus de Markov, de générateurs respectifs $\mathcal{L}^*$ et $\mathcal{L}^i$.*
- *Y est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ.*
- *Y et Z^i sont indépendantes.*
- *X^* a pour loi initiale μ_0^*.*

— *Pour tout $t > s > 0$:*

$$\mathbb{P}(X_t^* \cap \varphi_i(\llbracket Z_t^i, \infty \rrbracket) \neq \varnothing \mid t < Y,\ X_0^* \nsubseteq G_0^i) = 1$$

$$\mathbb{P}(X_s^* \cap C_G \subset X_t^* \mid t < Y) = 1$$

Démonstration. Nous allons commencer par distinguer différents types de transition pour le processus X^*. Le premier type de transition est celui qui ne modifie X^* que d'un point situé sur Q_i. Les transitions concernées sont le passage d'un état Q à l'état $Q \cup \{\varphi_i(p)\}$, ou à l'état $Q \setminus \{\varphi_i(p-1)\}$, où $p = \sup\{q \in \mathbb{N};\ \varphi_i(q) \in Q\} + 1$. Ces transitions nous "éloignent ou nous rapprochent d'une étape" d'un état contenant le point Δ_i. On notera donc $A_i^+(Q) = Q \cup \{\varphi_i(p)\}$, $A_i^-(Q) = Q \setminus \{\varphi_i(p-1)\}$ et $A_i(Q) = \{A_i^+(Q),\ A_i^-(Q)\}$, pour tout $Q \in G^*$.

Le deuxième type de transition est celui qui est susceptible d'enlever plusieurs points d'un coup. Pour cela, il faut $p \in Q \in G^*$ tels que $Q \setminus \{p\}$ ne soit pas connexe et $p \in V(Q^c)$. Ceci n'est possible que si $p \in C_G$. On pose donc naturellement, pour tout $Q \in G^*$:

$$B(Q) := \{Q' \in \mathscr{C}(Q \setminus \{p\});\ p \in Q \cap C_G\}$$

Dans le troisième type on regroupe toutes les autres transitions, celles qui n'influent pas dans notre problématique :

$$C_i(Q) = \{Q' \in G^* : \mathcal{L}_{Q,Q'} > 0,\ Q' \notin A_i(Q) \cup B(Q)\}$$

pour tout $Q \in G^*$. Ces transitions sont celles qui enlèvent un point de $Q_j,\ j \neq i$ ou qui ajoutent un point qui n'est pas dans Q_i.

On parlera de transition de type A_i^+ (resp. A_i^-, resp. B, resp. C) pour une transition d'un état $Q \in G^*$ à un état $Q' = A_i^+(Q)$ (resp $Q' = A_i^-$, resp. $Q' \in B(Q)$, resp. $Q' \in C_i(Q)$).

On remarque que l'ensemble $\{\mathcal{L}_{Q,Q'} : Q \in G^*,\ Q' \in B(Q)\}$ est borné. En effet, si $Q \in G^*$ est tel que $B(Q)$ est non vide, alors il contient un point de C_G, donc :

$$\mu(Q) \geq \inf\{\mu(p);\ p \in C_G\} =: a_1$$

et si $p_0 \in Q \cap C_G$, alors :

$$\sum_{q \notin Q} \mathcal{L}_{q,p_0} \leq \sup_{p \in C_G} \sum_{q \in V(C_G)} \mathcal{L}_{q,p} =: a_2$$

ce qui donne pour tout $Q' \in \mathscr{C}(Q \setminus \{p_0\})$:

$$\mathcal{L}^*_{Q,Q'} = \frac{\mu(Q')}{\mu(Q)} \sum_{q \notin Q} \mathcal{L}_{q,p_0}$$
$$\leq \frac{1}{a_1} a_2$$

L'ensemble $\{|B(Q)|;\ Q \in G^*\}$ étant également borné par une constante a_3 (grossièrement, $N + |C_G|$), on en déduit :

$$\sum_{Q' \in B(Q)} \mathcal{L}^*_{Q,Q'} \leq \frac{a_2 a_3}{a_1} =: \lambda$$

cette constante ne dépendant pas de Q

On observe enfin que pour tout $p \in \mathbb{N}$, si $\varphi_i(p) \in Q$ et $\varphi_i(p+1) \notin Q,\ Q \in G^*$, alors $\mathcal{L}^*_{Q,A_i^+(Q)} \geq \mathcal{L}^i_{p,p+1}$ et $\mathcal{L}^*_{Q,A^-(Q)} \leq \mathcal{L}^i_{p,p-1}$.

Nous allons maintenant, grâce aux remarques précédentes, construire la famille (X^*, Y, Z^i) en empêchant toute transition de type B avant le temps Y, et en forçant Z^i à descendre en cas de transition de type A_i^- ou en imposant une transition de type A_i^+ si Z^i monte, lorsque cela est nécessaire. Bien sûr, toute cette construction se fait uniquement lorsque X_0^* contient au moins un point de Q_i.

Construction de la famille (X^*, Y, Z^i) **:** Dans le but de se ramener à un processus de Markov, on va construire (X^*, N, Z^i), où N est un processus de Poisson d'intensité λ ; Y est alors le premier temps de saut de N. On commence par simuler X^* selon la loi μ_0^*. Si $X_0^* \cap Q_i = \varnothing$, on arrête là la construction (on laisse par exemple X^* et Z^i évoluer indépendamment selon leur générateur respectif et on tire Y indépendamment). Sinon, on pose $Z_0^i = \sup\{p \in \mathbb{N} : \varphi_i(p) \in X_0^*\}$ et $T_0 = 0$.

On suppose (X^*, N, Z^i) construit jusqu'au temps $T_n,\ n \geq 0$, et $Z^i_{T_n} = p$ et $X^*_{T_n} = Q$. Si $N_t \geq 1$, la construction est terminée est on laisse X^* et Z évoluer indépendamment. Sinon, on distingue alors deux cas :

— *Premier cas :* $\varphi_i(Z^i_{T_n}) \notin A_i^-(X^*_{T_n})$

C'est le cas où $Z^i_{T_n}$ se trouve "au bout" de $X^*_{T_n}$, et il faut donc faire attention à ce qu'il n'en sorte pas au temps T_{n+1}. On tire alors une variable exponentielle ϵ_n^1 de paramètre λ et une autre, ϵ_n^2, indépendante de ϵ_n^1 et de paramètre :

$$\Lambda_n^2 := \sum_{Q' \in C_i(Q)} \mathcal{L}^*_{Q,Q'} + \mathcal{L}^*_{Q,A^+(Q)} + \mathcal{L}^i_{p,p-1}$$

On pose $T_{n+1} = T_n + \epsilon_n^1 \wedge \epsilon_n^2$. Si $\epsilon_n^1 < \epsilon_n^2$, on impose $N_{T_{n+1}} = 1$ et on choisit $X^*_{T_{n+1}} = Q'$ avec probabilité $\frac{\mathcal{L}^*_{Q,Q'}}{\lambda}$, pour tout $Q' \in B(Q)$. La somme de ces probabilités peut être strictement inférieur à 1, et si aucun de ces états n'est choisi, on reste en Q.
Si $\epsilon_n^1 > \epsilon_n^2$, on laisse $N_{T_{n+1}}$ en 0, et on pose :

$$(X^*_{T_{n+1}}, Z^i_{T_{n+1}}) = \begin{cases} (Q', p) \quad \text{avec probabilité } \frac{\mathcal{L}^*_{Q,Q'}}{\Lambda_n^2},\ Q' \in C_i(Q) \\ (Q', p+1) \quad \text{avec probabilité } \frac{\mathcal{L}^i_{p,p+1}}{\Lambda_n^2},\ Q' = A_i^+(Q) \\ (Q', p) \quad \text{avec probabilité } \frac{\mathcal{L}^*_{Q,Q'} - \mathcal{L}^i_{p,p+1}}{\Lambda_n^2},\ Q' = A_i^+(Q) \\ (Q, p-1) \quad \text{avec probabilité } \frac{\mathcal{L}^i_{p,p-1} - \mathcal{L}^*_{Q,A_i^-(Q)}}{\Lambda_n^2} \\ (Q', p-1) \quad \text{avec probabilité } \frac{\mathcal{L}^i_{p,p-1}}{\Lambda_n^2},\ Q' = A_i^-(Q) \end{cases}$$

— *Deuxième cas :* $\varphi_i(Z^i_{T_n}) \in A_i^-(X^*_{T_n})$
Dans ce cas, il n'y a pas besoin de s'assurer que "le bout" de X^* reste au-dessus de Z^i, mais seulement de vérifier si une transition de type B a lieu. On tire donc une variable exponentielle ϵ_n^1 de paramètre λ et une autre, ϵ_n^2, indépendante de ϵ_n^1 et de paramètre :

$$\Lambda_n^2 := \sum_{Q' \in C_i(Q) \cup A_i(Q)} \mathcal{L}^*_{Q,Q'} + \mathcal{L}^i_{p,p-1} + \mathcal{L}^i_{p,p-1}$$

On pose $T_{n+1} = T_n + \epsilon_n^1 \wedge \epsilon_n^2$. Si $\epsilon_n^1 < \epsilon_n^2$, on procède exactement comme dans le premier cas. Sinon, on choisit :

$$(X^*_{T_{n+1}}, Z^i_{T_{n+1}}) = \begin{cases} (Q', p) \quad \text{avec probabilité } \frac{\mathcal{L}^*_{Q,Q'}}{\Lambda_n^2},\ Q' \in C_i(Q) \cup A_i(Q) \\ (Q, p+1) \quad \text{avec probabilité } \frac{\mathcal{L}^i_{p,p+1}}{\Lambda_n^2} \\ (Q, p-1) \quad \text{avec probabilité } \frac{\mathcal{L}^i_{p,p-1}}{\Lambda_n^2} \end{cases}$$

Par construction, on a bien $X^*_t \cap \varphi_i([\![Z^i_t, \infty]\!]) \neq \varnothing$ si $t < Y$, et Y et Z^i indépendantes, jusqu'au premier temps d'explosion $\tau_1 := \lim T_n$. On vérifie comme dans le Lemme 3.3 que les processus ont bien les générateurs recherchés. Partant du premier temps d'explosion, on recommence la construction de la même manière.

□

Lemme 4.7. *Pour tout $i \in I$, si Z^i est un processus de générateur $\mathcal{L}^i$, alors le temps d'explosion de Z^i est fini presque sûrement si et seulement si la condition (11) :*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu^i(j+1) \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\mu^i(k)\mathcal{L}_{\varphi_i(k),\varphi_i(k+1)}} < \infty \tag{45}$$

est remplie. Sinon, il est non-explosif.

Démonstration. On rappelle que le critère d'explosion pour Z^i est :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{\mathcal{L}^i_{j,j-1}}{\mathcal{L}^i_{j,j+1}} \sum_{k=1}^{i} \prod_{l=1}^{k} \frac{\mathcal{L}^i_{j-1,j}}{\mathcal{L}^i_{j,j-1}} < \infty$$

(cf [2], section 8.1). C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\infty &> \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{\left(\dfrac{\mu(G^i_{j-1})}{\mu(G^i_j)}\right) \mathcal{L}_{\varphi_i(j),\varphi_i(j+1)}}{\left(\dfrac{\mu(G^i_{j+1})}{\mu(G^i_j)}\right) \mathcal{L}_{\varphi_i(j+1),\varphi_i(j)}} \sum_{k=1}^{n} \prod_{l=1}^{k} \frac{\left(\dfrac{\mu(G^i_j)}{\mu(G^i_{j-1})}\right) \mathcal{L}_{\varphi_i(j),\varphi_i(j-1)}}{\left(\dfrac{\mu(G^i_{j-1})}{\mu(G^i_j)}\right) \mathcal{L}_{\varphi_i(j),\varphi_i(j+1)}} \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{\mu(G^i_{j-1})\mathcal{L}_{\varphi_i(j),\varphi_i(j+1)}}{\mu(G^i_{j+1})\mathcal{L}_{\varphi_i(j+1),\varphi_i(j)}} \sum_{k=1}^{n} \prod_{l=1}^{k} \frac{\mathcal{L}_{\varphi_i(j),\varphi_i(j-1)}}{\mathcal{L}_{\varphi_i(j),\varphi_i(j+1)}} \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{\mu(G^i_0)\mathcal{L}_{\varphi_i(j),\varphi_i(j+1)}}{\mathcal{L}_{\varphi_i(j+1),\varphi_i(j)}} \sum_{k=1}^{n} \prod_{l=1}^{k} \frac{\mathcal{L}_{\varphi_i(j),\varphi_i(j-1)}}{\mathcal{L}_{\varphi_i(j),\varphi_i(j+1)}} \\
&\geq \frac{\mu(G^i_0)}{\mu(\varphi_i(0))} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\varphi_i(n+1)) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu(\varphi_i(k))\mathcal{L}_{\varphi_i(k),\varphi_i(k+1)}} \\
&= \frac{\mu(G^i_0)}{\mu(\varphi_i(0))} \sum_{n=1}^{\infty} \mu^i(n+1) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu^i(k)\mathcal{L}_{\varphi_i(k),\varphi_i(k+1)}}
\end{aligned}$$

où les G^i_j sont les sous-ensembles de G^* définis en (44). □

L'intérêt des générateurs $\mathcal{L}^i$ est donc de fournir une condition suffisante à l'explosion d'un processus X^* de générateur $\mathcal{L}^*$ le long de chacune des branches Q_i. On obtient une condition nécessaire de manière similaire en définissant, pour tout $i \in I$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \geq n$:

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{i,n}_{p,p+1} := \left(1 + \dfrac{\mu(\varphi_i(p+1))}{\mu(\varphi_i([n,p]))}\right) \mathcal{L}_{\varphi_i(p+1),\varphi_i(p)} = \mathcal{L}^*_{\varphi_i([n,p]),\varphi_i([n,p+1])} \\ \mathcal{L}^{i,n}_{p,p-1} := \left(1 - \dfrac{\mu(\varphi_i(p))}{\mu(\varphi_i([n,p]))}\right) \mathcal{L}_{\varphi_i(p-1),\varphi_i(p)} = \mathcal{L}^*_{\varphi_i([n,p]),\varphi_i([n,p-1])} \\ \mathcal{L}^{i,n}_{p,p} = -\mathcal{L}^{i,n}_{p,p+1} - \mathcal{L}^{i,n}_{p,p-1} \end{cases}$$

Les matrices $(\mathcal{L}^{i,n}_{p,q})_{p,q\geq n}$ définissent des générateurs de processus de vie et de mort sur $[n, +\infty]$. Exactement comme précédemment, on a les deux lemmes suivants :

Lemme 4.8. *Pour chaque $i \in I$, et pour toute mesure de probabilité μ_0^* sur G^*, il existe un processus X^* de générateur $\mathcal{L}^*$ et de loi initiale μ_0^* et une suite $(Z^{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de processus de vie et de mort tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z^{i,n}$ a pour générateur $\mathcal{L}^{i,n}$ et :*

$$\mathbb{P}(X_t^* \cap \varphi_i(\llbracket Z_t^{i,n}, \infty\rrbracket) \subset \{\varphi_i(Z_t^{i,n})\} \mid \Delta_i \notin X_0^*,\ t < T_n) = 1$$

pour tout $t > 0$, avec $T_n := \inf\{s > 0;\ X_s^* \cap G_n^i = \varnothing\}$.

Démonstration. Il suffit d'adapter légèrement la preuve du lemme 3.3. Cette fois on laisse X^* et chacun des $Z^{i,n}$ évoluer indépendamment jusqu'au temps $\tau := \inf\{t > 0;\ \exists n \in \mathbb{N} : Z^{i,n} \in X_t^*\}$, puis on applique la même méthode pour forcer X^* à rester dans $G^i_{Z^{i,n}}$. Lorsque X^* sort entièrement de G^i_n, les taux de transitions sont tels qu'il devient impossible de le coupler ainsi avec $Z^{i,n}$ □

Lemme 4.9. *Si $Z^{i,n}$ est un processus de générateur $\mathcal{L}^{i,n}$, avec $i \in I$, $n \in \mathbb{N}$ alors le temps d'explosion de $Z^{i,n}$ est fini presque sûrement si et seulement si :*

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \mu^i(j+1) \sum_{k=n+1}^{j} \frac{1}{\mu^i(k)\mathcal{L}_{\varphi_i(k),\varphi_i(k+1)}} < \infty \tag{46}$$

Théorème 4.10. *Soit X^* un processus de générateur $\mathcal{L}^*$. S'il existe $i \in I$ tel que la condition (11) n'est pas remplie, alors pour tout $t > 0$:*

$$\mathbb{P}(\Delta_i \in X_t^* \mid \Delta_i \notin X_0^*) = 0$$

Réciproquement, si pour tout $i \in I$ la condition (11) est remplie alors, presque sûrement, il existe $T < \infty$ tel que $X_t^* = \bar{G}$, $\forall t > T$.

Démonstration. La première partie se démontre à partir des lemmes 4.8 et 4.9. En effet, soit $i \in I$ tel que la condition (11) ne soit pas remplie. On constate immédiatement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la condition (46) ne l'est pas non plus. Soit donc une famille de processus $(\tilde{X}^*, (Z^{i,n})_{n\in\mathbb{N}})$ comme dans le lemme 4.8, $\tilde{X}^*$ ayant même loi que X^*. On a alors, pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Delta_i \in X_t^* \mid \Delta_i \notin X_0^*) &= \mathbb{P}(\Delta_i \in \tilde{X}_t^* \mid \Delta_i \notin \tilde{X}_0^*)\\ &\leq \mathbb{P}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\tilde{X}_t^* \cap \varphi_i(\llbracket Z_t^{i,n}+1, \infty\rrbracket) \neq \varnothing\} \mid \Delta_i \notin \tilde{X}_0^*)\\ &\leq \mathbb{P}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{t \geq T_n\} \mid \Delta_i \notin \tilde{X}_0^*)\\ &= \mathbb{P}(\exists s \leq t;\ \tilde{X}_s^* = \{\Delta_i\} \mid \Delta_i \notin \tilde{X}_0^*)\\ &= \mathbb{P}(\tilde{X}_t^* = \{\Delta_i\} \mid \Delta_i \notin \tilde{X}_0^*)\end{aligned}$$

et cette dernière probabilité vaut 0 d'après (43).

La deuxième partie se démontre grâce aux lemmes 4.6 et 4.7. Remarquons que puisque X^* a la loi d'un dual de X, lequel est récurrent positif, X^* va atteindre C_G en temps fini presque sûrement. On peut donc supposer sans perte de généralité que le processus commence à cet instant, et donc que X_0^* contient au moins un point de C_G.

Lorsque le processus X^* atteint un état contenant un Δ_i (nécessairement après un temps d'explosion), celui-ci ne peut sortir de X^* qu'en même temps que tout le reste de la branche Q_i et que le point p_i de C_G voisin de Q_i. Cet événement correspond à une transition de type B (cf démonstration du lemme 4.6). L'idée est donc de montrer que le processus peut atteindre successivement chacun des Δ_i sans perdre de points de C_G (et donc sans perdre les Δ_i déjà gagnés). Pour cela, on minore, uniformément sur les conditions initiales, les probabilités d'atteindre chacun des Δ_i avant une transition de type B. Cette minoration se fait en deux temps : d'abord, on minore la probabilité d'atteindre $\varphi_i(0)$ en suivant un chemin donné, pour ensuite coupler notre processus avec Y et Z^i comme dans le lemme 4.6.

Pour chaque $i \in I$, on note $f_i : G^* \to G^*$ la fonction définie par :

$$f_i(Q) = Q \cap (C_G \cup \{\varphi_i(0)\})$$

Un moyen de garantir l'absence de transition de type B sur un intervalle de temps $[0, t]$ est de demander que $f_i(X^*)$ soit croissante (au sens de l'inclusion) sur cet intervalle.

Soient $t > 0$, $i \in I$, $C \subset C_G \cup \{\varphi_i(0)\}$ tel que $C \not\subseteq \{\varphi_i(0)\}$ (donc C contient au moins un point de C_G), $Q \in G^*$ tel que $f_i(Q) = C$ et $(q_0, \ldots, q_{n_0})$ un chemin avec $q_0 \in C$, $q_1, \ldots q_{n_0-1} \in C_G \setminus C$ et $q_{n_0} = \varphi_i(0)$. Si $n_0 = 0$, c'est que $\varphi_i(0) \in Q$.

On note $C^n = C \cup \{q_1\} \cup \cdots \cup \{q_n\},\ 0 \leq n \leq n_0$. On note également T_k le k-ème temps de saut de $X^*,\ k \in \mathbb{N}$, avec $T_0 = 0,\ (Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la chaîne de saut sous-jacente : $X^*_{T_k} = Y_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $T_{\phi(k)}$ la sous-suite des temps de sauts de $f_i(X)$. Les processus $(T_{\phi(k)})$ et $(f_i(Y_{\phi(k)}))$, traduisant l'évolution de X^* sur $C_G \cup \{\varphi_i(0)\}$, ne sont pas markoviens, mais on peut aisément minorer les probabilités de transition à l'aide du processus X^*. Le premier objectif est de minorer $\mathbb{P}(f_i(X^*_t) = C^n,\ f_i(X^*)$ croissante sur $[0,t] \mid X^*_0 = Q)$ par une constante ne dépendant pas de Q. On commence grossièrement :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(f_i(X^*_t) = C^n,\ f_i(X^*) \text{ croissante sur } [0,t] \mid X^*_0 = Q) \\
\geq &\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n_0} \{T_{\phi(k)} - T_{\phi(k-1)} \leq t/n_0\ , f_i(Y_{\phi(k)}) = C^k,\ T_{\phi(n_0+1)} - T_{\phi(n_0)} > t\} \mid X^*_0 = Q\right) \\
= &\prod_{k=1}^{n_0} \mathbb{P}(\epsilon_k \in [0,t/n_0])\ p_k \times \mathbb{P}(\epsilon_{n_0+1} > t/n_0) \qquad (47)
\end{aligned}$$

$$(48)$$

où pour tout $k \leq n_0 + 1$:

$$\epsilon_k \sim \mathscr{L}(T_{\phi(k)} - T_{\phi(k-1)} \mid \bigcap_{n=1}^{k-1} \{f_i(Y_{\phi(n)}) = C^n,\ T_{\phi(n)} - T_{\phi(n-1)} \in [0,t/n_0],\ X^*_0 = Q\})$$

et pour tout $k \leq n_0$:

$$p_k = \mathbb{P}(f_i(Y_{\phi(k)}) = C^k \mid \bigcap_{n=0}^{k-1} \{f_i(Y_{\phi(n)}) = C^n,\ T_{\phi(n+1)} - T_{\phi(n)} \in [0,t/n_0],\ X^*_0 = Q\})$$

(noter que dans la probabilité conditionnelle ci-dessus, $Y_0 = C^0$ n'est pas nécessaire car impliqué par $X^*_0 = Q$, et n'a été laissé que par commodité de notation).

Si en un temps $T_{\phi(k)}$ le processus X^* passe d'un état Q' à Q'' alors on a $Q'' = Q' \cup \{p\},\ p \in f_i(V(Q))$ ou $Q'' \in \mathscr{C}(Q \setminus \{p\}),\ p \in f_i(Q')$, et on vérifie facilement à partir des coefficients de $\mathcal{L}^*$ que :

$$\left(\min_{q\in V(f_i(G))} \mu(q)\right)\left(\min_{\substack{q\in V(C_G)\\ q'\in V(q)}} \mathcal{L}_{q,q'}\right) \leq \mathcal{L}^*_{Q',Q''} \leq \frac{\max_{q\in V(C_G)} |\mathcal{L}_{q,q}|}{\min_{q'\in C_G} \mu(q')}$$

On appelle $\alpha_1 < \infty$ le membre de gauche et $\alpha_2 > 0$ celui de droite. On vérifie également que pour un Q' donné, le nombre de Q'' possible de la forme $Q \cup \{p\}$ est majoré par $|C_G|$, et $|\mathscr{C}(Q' \setminus \{p\})|$ avec $p \in f_i(Q')$ est majoré par $(|C_G| + 1)^2$. En conditionnant par $X^*_{T_{\phi(k)-1}}$, on obtient donc :

$$
\begin{aligned}
p_k &\geq \inf\{\mathbb{P}(X^*_{T_{\phi(k)}} = Q' \cup \{p\} \mid X^*_{T_{\phi(k)-1}} = Q'),\ f_i(Q') \neq \varnothing,\ p \in V(Q') \cap V(C_G)\} \\
&= \inf\left\{ \frac{\mathcal{L}^*_{Q', Q' \cup \{p\}}}{\sum\limits_{\substack{Q'' \in G^* \\ f_i(Q'') \neq f_i(Q')}} \mathcal{L}^*_{Q',Q''}},\ f_i(Q') \neq \varnothing,\ p \in V(Q') \cap V(C_G) \right\} \\
&\geq \frac{\alpha_2}{(|C_G| + (|C_G|+1)^2)\alpha_1} =: \alpha_0 > 0
\end{aligned}
$$

et, conditionnellement à $X^*_{T_{\phi(k-1)}}$ on peut encadrer $T_{\phi(k)} - T_{\phi(k-1)}$ par deux variables exponentielles E_1 (inférieurement) et E_2 (supérieurement), de paramètres respectifs :

$$
\sup\left\{ \sum_{\substack{Q'' \in G^* \\ f_i(Q'') \neq f_i(Q')}} \mathcal{L}^*_{Q',Q''} :\ Q' \in G^*, f_i(Q') \neq \varnothing \right\} \leq (|C_G| + (|C_G|+1)^2)\alpha_1
$$

$$
\inf\left\{ \sum_{\substack{Q'' \in G^* \\ f_i(Q'') \neq f_i(Q')}} \mathcal{L}^*_{Q',Q''} :\ Q' \in G^*, f_i(Q') \neq \varnothing \right\} \geq \alpha_2
$$

Autrement dit :

$$
\mathbb{P}(\epsilon_k \in [0, t/n_0]) \geq \mathbb{P}(E_2 \in [0, t/n_0]) \geq 1 - \exp(-\alpha_2 t/n_0)
$$

et :

$$
\mathbb{P}(\epsilon_{n_0+1} > t/n_0) \geq \mathbb{P}(E_1 > t/n_0) \geq \exp(-(|C_G| + (|C_G|+1)^2)\alpha_1 t/n_0)
$$

En revenant à (47) et en utilisant le fait que $n_0 \leq |C_G|$, on voit qu'on a minoré la probabilité d'atteindre $\varphi_i(0)$ en temps t et avant une transition de type B par une constante ε_t ne dépendant ni de i, ni de la configuration initiale C. Nous avons donc réalisé la première étape de la minoration.

Partant de l'état atteint lors de cette première étape, on construit (X^*, Y, Z^i) comme dans le lemme 4.6. La probabilité d'atteindre un état contenant Δ_i avant une transition de type B, en temps t est minorée par $\mathbb{P}(Z^i_t = \infty, Y > t \mid Z^i_0 = \varphi_i(0))$ d'après la loi du couple (X, Z^i), et cette probabilité est strictement positive car Z^i et Y sont indépendants. En réalisant les deux étapes consécutivement (chacune en temps $t/2$ par exemple), on obtient donc :

$$
\mathbb{P}(\Delta_i \in X^*_t, f_i(X^*) \text{ croissante sur } [0,t] \mid X^*_0,\ X^*_0 \cap C_G \neq \varnothing) \geq \varepsilon^i_t
$$

constante ne dépendant que de i et t. Par markoviannité et homogénéité, il vient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\Delta_i \in X^*_{Nt},\ \forall i \in I \mid X^*_0 \cap C_G \neq \varnothing) \\
&\geq \prod_{i=1}^{N} \inf_{\substack{Q\in G^* \\ Q\cap C_G\neq\varnothing}} \mathbb{P}(\Delta_i \in X^*_{it}, f_i(X^*) \text{ croissante sur } [(i-1)t, it] \mid X^*_{(i-1)t} = Q) \\
&\geq \prod_{i=1}^{N} \inf_{\substack{Q\in G^* \\ Q\cap C_G\neq\varnothing}} \mathbb{P}(\Delta_i \in X^*_{t}, f_i(X^*) \text{ croissante sur } [0, t] \mid X^*_{0} = Q) \\
&\geq \prod_{i\in I} \varepsilon^i_t > 0
\end{aligned}$$

L'ensemble G^*_N des états contenant tous les Δ_i (défini en (41)) est donc récurrent positif. Il ne reste plus qu'à conclure en remarquant que d'un état $Q \in G^*_N$, on peut passer à $\bar{G}$ en un nombre fini de sauts : si $q_1, \ldots, q_{n_0}$ sont tels que $\{q_i, i \leq n_0\} = C_G \setminus Q$ et $q_i \in V(Q \cup \{q_1\} \cup \ldots \cup \{q_{i-1}\})$, alors

$$\mathbb{P}(X^*_{T_i} = Q \cup \{q_1\} \cup \ldots \cup \{q_i\}, \forall i \leq n_0) > \varepsilon$$

où ε est une constante strictement positive indépendante de Q et n_0.

$\bar{G}$ est donc récurrent positif, et le processus X^* est absorbé en temps fini presque sûrement. □

Un dernier lemme technique et nous serons enfin en mesure de montrer le théorème 1.1 :

Lemme 4.11. *Si X^* est un processus stratifié associé au générateur $\mathcal{L}^*$, avec $\mathbb{E}\left(\frac{1}{\mu(X^*_0)}\right) < +\infty$, alors $\mathbb{E}\left(\frac{1}{\mu(X^*_t)}\right) < +\infty$ pour tout $t > 0$.*

Démonstration. Soient $A_n := \bigcup_{i\in I} \varphi_i(\llbracket n, \infty \rrbracket)$ et

$$\tau_n := \inf\{t > 0;\ X^*_t \subset A_n\}$$

On remarque que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et tend vers $A_\infty = \{\Delta_i, i \in I\}$, tandis que la suite $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante (à partir du premier rang n tel que $\tau_n \neq 0$) et tend vers l'infini (car l'ensemble A_∞ ne peut pas être atteint en temps fini). Notamment, pour tout $t > 0$:

$$\mathbb{P}(X^*_{t\wedge\tau_n} \not\subset A_{n+1} \mid X^*_0 \not\subset A_{n+1}) = 1$$

De plus, si $X^*_0 \not\subset A_{n+1}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{1}{\mu(X^*_{t\wedge\tau_n})} \leq \sup_{q\in G\setminus A_{n+1}} \frac{1}{\mu(q)} =: K_n$$

On pose alors, pour tout $Q \in G^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$g_n(Q) = \frac{1}{\mu(Q)} \wedge K_n$$

Ces fonctions sont continues bornées et pour tout n, g_n coïncide avec $\dfrac{1}{\mu}$ sur l'ensemble $\{Q \in G^*;\ Q \nsubseteq A_{n+1}\}$. Utilisant le fait que

$$Q \nsubseteq A_n \Rightarrow Q' \nsubseteq A_{n+1},\ \forall Q' \in G^* \text{ tel que } \mathcal{L}^*_{Q,Q'} > 0$$

il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $Q \nsubseteq A_n$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^* \frac{1}{\mu}(Q) &= \mathcal{L}^* g_n(Q) \\
&= \sum_{Q' \neq Q} \mathcal{L}^*_{Q,Q'} \left(\frac{1}{\mu(Q')} - \frac{1}{\mu(Q)} \right) \\
&= \sum_{q \notin Q} \left(\frac{\mu(Q \cup \{q\})}{\mu(Q)} \left(\frac{1}{\mu(Q \cup \{q\})} - \frac{1}{\mu(Q)} \right) \sum_{p \in Q} \mathcal{L}_{q,p} \right) \\
&\quad + \sum_{p \in Q} \sum_{Q' \in \mathscr{C}(Q \setminus \{p\})} \left(\frac{\mu(Q')}{\mu(Q)} \left(\frac{1}{\mu(Q')} - \frac{1}{\mu(Q)} \right) \sum_{q \notin Q} \mathcal{L}_{p,q} \right) \\
&= \sum_{q \notin Q} \frac{-\mu(q)}{\mu(Q)^2} \sum_{p \in Q} \mathcal{L}_{q,p} + \sum_{p \in Q} \sum_{Q' \in \mathscr{C}(Q \setminus \{p\})} \frac{\mu(Q) - \mu(Q')}{\mu(Q)^2} \sum_{q \notin Q} \mathcal{L}_{p,q} \\
&= \sum_{p \in Q} \frac{|\mathscr{C}(Q \setminus \{p\})| - 1}{\mu(Q)} \sum_{q \notin Q} \mathcal{L}_{p,q}
\end{aligned}$$

Les termes de cette somme sont nuls si $p \notin C_G$, on en déduit facilement que cette somme est majorée par une constante K qui ne dépend pas de n. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $X^*_0 \nsubseteq A_{n+1}$ presque sûrement, le processus :

$$\begin{aligned}
M_t :=& \frac{1}{\mu(X^*_{t \wedge \tau_n})} - \frac{1}{\mu(X^*_0)} - \int_0^{t \wedge \tau_n} \mathcal{L}^* \frac{1}{\mu}(X^*_s) \mathrm{d}s \\
=& g_n(X^*_{t \wedge \tau_n}) - g_n(X^*_0) - \int_0^{t \wedge \tau_n} \mathcal{L}^* g_n(X^*_s) \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

est une martingale, d'où :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\mu(X^*_{t\wedge\tau_n})}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{\mu(X^*_0)}\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge\tau_n} \mathcal{L}^*\frac{1}{\mu}(X^*_s)\mathrm{d}s\right)$$
$$\leq \mathbb{E}\left(\frac{1}{\mu(X^*_0)}\right) + K\mathbb{E}(t\wedge\tau_n)$$
$$\leq \mathbb{E}\left(\frac{1}{\mu(X^*_0)}\right) + Kt$$

On conclut par convergence dominée que $\mathbb{E}\left(\frac{1}{\mu(X^*_t)}\right) \leq \mathbb{E}\left(\frac{1}{\mu(X^*_0)}\right) + Kt$. □

Preuve du théorème 1.1. Si la condition (11) est remplie pour tout $i \in I$, alors de manière classique on construit un temps fort de stationnarité fini à partir du temps d'explosion de X^*, dual de X ayant pour générateur $\mathcal{L}^*$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $i \in I$ tel que cette condition ne soit pas remplie. Supposons que la loi initiale μ_0 de X est à support fini. Soit X^* un dual de stationnarité forte de X, de générateur $\mathcal{L}^*$. On utilise la fonction de séparation $\mathfrak{s}$, et le théorème de convergence dominée avec le Lemme 4.11 :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{s}(t) &= \sup_{q\in G}\left(1 - \frac{\mu_t(q)}{\mu(q)}\right)\\
&= \sup_{q\in G}\mathbb{E}\left(1 - \frac{\Lambda(X^*_t, q)}{\mu(q)}\right)\\
&= 1 - \inf_{q\in G}\mathbb{E}\left(\frac{\delta_q(X^*_t)}{\mu(X^*_t)}\right)\\
&\geq 1 - \lim_{q\to\infty}\mathbb{E}\left(\frac{\delta_{\varphi_i(q)}(X^*_t)}{\mu(X^*_t)}\right)\\
&= 1 - \mathbb{E}\left(\lim_{q\to\infty}\frac{\delta_{\varphi_i(q)}(X^*_t)}{\mu(X^*_t)}\right)\\
&= 1
\end{aligned}$$

Or, on sait que si T est un temps fort de stationnarité pour X, alors pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(T > t) \geq \mathfrak{s}(t)$. Donc $T = \infty$ presque sûrement. □

Références

[1] David Aldous and Persi Diaconis. Strong uniform times and finite random walks. *Adv. in Appl. Math.*, 8(1) :69–97, 1987.

[2] William J. Anderson. *Continuous-time Markov chains*. Springer Series in Statistics : Probability and its Applications. Springer-Verlag, New York, 1991. An applications-oriented approach.

[3] Persi Diaconis and James Allen Fill. Strong stationary times via a new form of duality. *Ann. Probab.*, 18(4) :1483–1522, 1990.

[4] Persi Diaconis and Laurent Saloff-Coste. Separation cut-offs for birth and death chains. *Ann. Appl. Probab.*, 16(4) :2098–2122, 2006.

[5] J. A. Fill and V. Lyzinski. Strong Stationary Duality for Diffusion Processes. *ArXiv e-prints*, February 2014.

[6] James Allen Fill. Time to stationarity for a continuous-time Markov chain. *Probab. Engrg. Inform. Sci.*, 5(1) :61–76, 1991.

[7] James Allen Fill. Strong stationary duality for continuous-time Markov chains. I. Theory. *J. Theoret. Probab.*, 5(1) :45–70, 1992.

[8] James Allen Fill. An interruptible algorithm for perfect sampling via Markov chains. *Ann. Appl. Probab.*, 8(1) :131–162, 1998.

[9] James Allen Fill and Jonas Kahn. Comparison inequalities and fastest-mixing Markov chains. *Ann. Appl. Probab.*, 23(5) :1778–1816, 2013.

[10] Yu Gong, Yong-Hua Mao, and Chi Zhang. Hitting time distributions for denumerable birth and death processes. *J. Theoret. Probab.*, 25(4) :950–980, 2012.

[11] Pawel Lorek and Ryszard Szekli. Strong stationary duality for Möbius monotone Markov chains. *Queueing Syst.*, 71(1-2) :79–95, 2012.

[12] L. Miclo. Strong stationary times for one-dimensional diffusions, November 2013.

[13] Laurent Miclo. On ergodic diffusions on continuous graphs whose centered resolvent admits a trace. *J. Math. Anal. Appl.*, 437(2) :737–753, 2016.

[14] J. R. Norris. *Markov chains*, volume 2 of *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. Reprint of 1997 original.