Temps fort de stationnarité pour des processus aléatoires

INSTITUT de MATHEMATIQUES de TOULOUSE

Processus aléatoire

Un **processus aléatoire** $(X_t)_{t\geq 0}$ est un ensemble de données aléatoires évoluant au cours du temps selon certaines règles connues (sa *loi d'évolution*) et d'autres inconnues ou imprévisibles (un *aléa*). Par exemple, le cours de la bourse, le déplacement de particules de gaz dans une boite ou la fortune d'un joueur de casino sont des processus aléatoires. Dans le cas d'un joueur de casino, on ne peut pas prévoir s'il va gagner ou non (à cause de l'aléa), mais on sait que s'il perd, il perd une certaine quantité d'argent, celle qu'il a misé (cela fait partie de sa loi).

Un processus aléatoire est donc simplement une variable aléatoire évoluant au cours du temps. Si l'on regarde ce processus à un instant t_0 donné, choisi à l'avance (on dit déterministe), on observe une variable aléatoire X_{t_0} dont on peut étudier la loi (ou *distribution*).

Comment passer le temps ?

On constate sur ces trois exemples que la notion de temps n'est pas la même pour tous les processus : pour un joueur de casino, on considère chaque étape du jeu, et la durée écoulée entre deux parties ne nous intéresse pas. On parle dans ce cas de temps discret et on note le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En revanche, les particules se déplacent constamment, on considère donc un temps continu et dans ce cas on écrit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.

Les processus dictent leurs lois

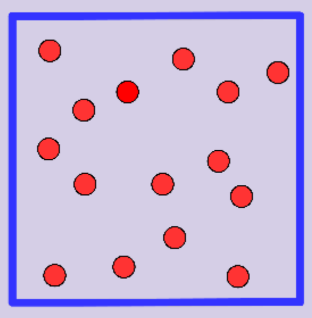
La loi d'un processus à un instant t dépend :

— de la loi "aux instants d'avant", c'est-à-dire des informations dont on dispose sur le processus : plus on connait de choses, plus on peut prédire avec certitude son évolution.

— de la loi d'évolution du processus : si par exemple on lâche les particules à un endroit donné, à un instant très proche elles se trouveront regroupées à proximité de l'endroit où on les a lâchées, car leur loi fait qu'elles ont une vitesse maximum et un déplacement continu.

Loi stationnaire

En fonction de la loi d'évolution du processus, il arrive (et même assez souvent) que l'on puisse choisir la loi au départ de manière à ce qu'elle n'évolue pas dans le temps (la loi, tandis que le processus, lui, peut évoluer). L'exemple le plus simple est celui des particules de gaz que l'on lâche "au hasard", uniformément dans la boite. Dans ce cas, à tout moment elles se trouveront n'importe où dans la boite avec la même probabilité : la loi est dite *stationnaire* (mais le processus ne l'est pas). Pour ce cas particulier, on dit que la loi du processus X à l'instant t est uniforme, et on le note : $X_t \sim \mathcal{U}$



Si on lâche plusieurs particules dans la boite, elles vont se répartir uniformément, comme le ferait la loi d'une seule particule.

En pratique, la plupart des processus que l'on étudie ont une loi stationnaire et leur loi a tendance à s'en rapprocher infiniment (sans forcément l'atteindre).

Temps d'arrêt

Un **temps d'arrêt** pour un processus est un temps *aléatoire* auquel on peut "arrêter" le processus sans tenir compte de son évolution future. Par exemple, la première fois qu'un joueur gagne un certaine somme ou qu'une particule touche la parois de la boite sont des temps d'arrêt. Par contre, la dernière partie perdue avant le premier gain n'est pas un temps d'arrêt : au moment où ce temps arrive, on ne sait pas encore que le joueur va gagner la partie suivante !

Temps fort de stationnarité

La loi d'un processus à un temps d'arrêt dépend du temps d'arrêt, et est différente de la loi en un temps déterministe : Si l'on arrête le processus dès qu'une particule touche la paroi alors elle peut être n'importe où sur la paroi (avec un plus grande probabilité aux points proches du point de départ), ce qui n'est pas possible en un temps déterministe.

On appelle **temps fort de stationnarité** un temps d'arrêt tel que la loi du processus à ce temps est la loi stationnaire.

Mélangeons les cartes

Si l'on mélange un paquet de carte, sa configuration (*i.e* la disposition des cartes dans le paquet) au cours du temps est un processus aléatoire, à temps discret.

Exemple de mélange

On s'intéresse à un mélange assez simple (mais loin d'être le meilleur) : on prend la carte au-dessus du paquet puis on la remet au hasard à n'importe quelle place, et on recommence.

A♦		2♦
2♦		3♦
3♦		⋮
⋮	⟶	A♦
⋮		⋮
R♠		R♠

Ici, on est parti d'un paquet trié et on a pris la première carte (l'as de carreau), que l'on a remis au hasard dans le paquet. La prochaine étape sera de prendre la nouvelle première carte (le 2 de carreau, sauf si l'as a été remis en haut) et de refaire pareil, et ainsi de suite.

A chaque étape, la carte qui se trouvait au-dessus peut se trouver à n'importe quelle position avec une probabilité $1/52$ (pour un jeu de 52 cartes). Puis, si elle n'est pas remise sur le dessus ce sera la deuxième carte, puis la troisième *etc...*

Il faut du temps pour bien mélanger

La notion d'évolution de la loi se voit bien dans notre exemple : selon les configurations possibles à un instant donnée et leurs probabilités, on peut en déduire les probabilités de chaque configuration au temps suivant. Par exemple, si le jeu est parfaitement trié, le simple fait de déplacer une carte rendra toutes les places possibles pour cette carte mais pas pour les autres.

A♦		3♦
2♦		⋮
3♦		A♦
⋮	⟶	⋮
⋮		R♠
R♠		2♦

Transition impossible

Si on connait exactement l'ordre des cartes au début (par exemple tous les carreaux, puis tous les cœurs, puis tous les trèfles et tous les piques, dans l'ordre de l'as au roi), alors cet ordre va être modifié au fur et à mesure mais lentement : après la première étape on ne connaitra pas la place de l'as de carreau mais les autres auront soit monté d'une place (si l'as a été mis en-dessous) soit pas bougé. Si on ne connait pas l'ordre des couleurs mais qu'elles sont toujours triées, ça rajoute un peu d'incertitude mais on a toujours une bonne idée de la disposition.

Si par contre au début le jeu est parfaitement mélangé, alors il le restera tout le temps : le mélange parfait est une loi stationnaire.

L'ascension du roi

Supposons maintenant que l'on ait mis un marqueur sur la dernière carte (le roi de pique par exemple) pour la repérer. Au bout d'un moment, une carte va être placée en-dessous. Puis une autre, encore une, *etc...*

A chaque fois, l'ordre des cartes en-dessous du roi de pique est complètement arbitraire, uniforme.

2♦		3♦		V♡
3♦		⋮		⋮
⋮	⟶	A♦	⟶ … ⟶	⋮
A♦		⋮		R♠
⋮		R♠		10♡
R♠		2♦		2♦

La chute du roi

Le roi de pique va ainsi remonter petit à petit dans le paquet, puis va finir par atteindre la première position. Le moment où on le remet dans le paquet au hasard est un temps d'arrêt (on est capable de dire qu'on a atteint ce moment quand l'événement se produit) et à ce moment les cartes en-dessous étaient parfaitement mélangées, on a donc fini le mélange : c'est un temps fort de stationnarité.

R♠		3♣
3♣		10♡
10♡		3♦
3♦	⟶	⋮
⋮		R♠
⋮		⋮

Applications (en maths)

De nombreuses branches des mathématiques s'intéressent à la convergence de la loi d'un processus vers sa loi stationnaire, sauf que cet convergence se fait en un temps (déterministe) infini. Les temps forts de stationnarité permettent de considérer une convergence en un temps (aléatoire) fini, et donnent des informations sur la vitesse de convergence (en temps déterministe).

Le but de ma thèse est principalement de déterminer l'existence ou non de temps forts de stationnarité pour certains types de processus.