

À ma femme Johanna,
à mes parents,
à Juju et Clém.

Remerciements

Je voudrais profiter de cette étape pour évoquer certaines personnes et la part de ce travail que je leur dois.

J'ai découvert la recherche en mathématiques aux côtés de Jean-François Mattei, mon directeur de recherche. Au-delà du domaine passionnant auquel il m'a initié, je le remercie pour tous ces moments de mathématiques au cours desquels je pense avoir expérimenté la plupart des états d'âmes d'un chercheur. Pour les mois plongés dans les articles, pour les semaines de doute, pour les jours où les preuves s'esquissent et pour les minutes où elles se déroulent, merci chef . . .

Mon arrivée à Toulouse en 2003 fut la conséquence d'une proposition éclairée de Dominique Cerveau, mon directeur de DEA à l'époque, qui me suggéra de rencontrer Jean-François Mattei. C'est un réel plaisir pour moi de le retrouver aujourd'hui dans mon jury - la boucle est bouclée - et une chance qu'il ait accepté de rapporter mon travail. Son impitoyable œil détecteur d'imprécisions a grandement contribué à l'amélioration de ce texte.

J'exprime ma gratitude à Claude Sabbah qui a accepté de rapporter ce texte, ainsi qu'à Jean-Pierre Ramis, Tien Cuong Dinh et Emmanuel Paul qui me font l'honneur de participer à mon jury.

Au cours de ces trois années, j'ai eu la chance de discuter de feuilletages avec de nombreux mathématiciens bien plus au fait de ces questions que moi. Je pense à Emmanuel Paul qui a toujours montré un chaleureux intérêt pour mon travail. Je pense à David Marín qui m'a accueilli plusieurs fois à Barcelone où j'ai pu effectuer certains calculs décisifs. J'ai croisé aussi Frank Loray, Felipe Cano, Paulo Sad, Alcides Lins-Neto et plus récemment Nuria Corral. Je leur exprime à tous ma reconnaissance pour l'impression qu'ils m'ont donnée, chacun à leur manière, d'entrer progressivement dans la grande famille des *feuilleteurs*.

Je remercie Yveline Panabière et Agnès Requis pour leur efficacité et leur gentillesse.

Cependant, la thèse ce n'est pas que des mathématiques et il faut bien vivre. Aussi, ceux qui les connaissent intimement reconnaîtront dans chacune de ces lignes la trace de l'enseignement de mes parents et l'influence de ma petite sœur et de mon petit frère : ils se sont tellement investis pour moi ! J'espère de ce texte qu'il soit un juste témoignage de leurs efforts.

Au quotidien, j'ai croisé un grand nombre de doctorants. D'une certaine manière, j'ai l'impression d'appartenir à deux générations. Aussi, pour respecter la chronologie, je commencerais par évoquer Guy. Il est strictement la toute première personne que j'ai rencontrée en arrivant au labo. Le moins que l'on puisse dire, c'est que j'ai eu de la chance. De sa vivacité d'esprit

et de sa compréhension toute personnelle des objets mathématiques resteront certaines discussions mémorables. Je pense aussi à Mathieu dont les mathématiques constituent pour moi un mystère : je lui dédie une blague et un rire aux éclats. Comment ne pas évoquer aussi ma première co-bureau Vanessa et son délicieux caractère tranchant ; les petits cafés-noisettes avec Grégoire, l'homme qui savait tout ; les soirées houmous de Manu ; les questions existentielles de Julien ; les remarques piquantes de Laurent et les éternels coca/tongues de Guillaume au plus froid de l'hiver. Je suis très fier d'avoir un temps appartenu à leur groupe. Mais le temps avançant, les *anciens*¹ furent remplacés par d'autres et c'est en partageant le bureau de Cécile que je termine ma thèse. De nos nombreuses références communes resteront des fous rires qui laissaient parfois l'assistance de marbre. Je dois évoquer aussi Julien et sa guitare, Anne et sa petite poche qui contenait le monde, Landry et ses phrases venues d'ailleurs et tous les autres doctorants du célèbre *couloir des thésards*.

J'ai effectué une grande partie de mes études à Rennes. En arrivant là-bas, j'ai croisé le chemin de Lolo, Nomo, Tfab et Manu l'chef. Je me souviendrai de ces soirées à refaire le monde, chacun s'évertuant à trouver une énormité toujours plus digne de figurer dans l'annale des énormités. C'est avec eux que les mathématiques devinrent un réel plaisir.

Enfin, je voudrais évoquer les tous premiers amis de ma vie. Les expériences que j'ai connues avec eux sont si innombrables que la marge est trop étroite pour que je les évoque toutes. Je pense à Bou mon grand pote de 20 ans qui, je l'espère deviendra celui de 30,40 et 50 ans ! À Gab qui ne soupçonne pas à quel point je lui suis redevable de tout ce qu'il m'a appris ; à Syl auquel j'exposai mes premiers points de vue sur la géométrie non-euclidienne et qui fut, bien entendu, scandalisé par de tels racontards. Je pense aussi à Stéph l'Arkansas, à Sol de Mul-house et à Houda. Ce groupe d'amis est mon plus beau souvenir de jeunesse d'étudiant.

Même si cela peut sembler ici dérisoire, je voudrais finir en évoquant Johanna. À mes yeux, ce travail n'aurait pas eu beaucoup de sens si elle n'avait été là pour le voir avancer. Elle est sans conteste une source inépuisable de défis, d'inspiration et d'énergie ; la femme la plus brillante et la plus humaine que j'ai jamais rencontrée.

¹Qu'ils me pardonnent pour ce terme barbare, mais comment vous appelez autrement ?

Introduction.

Les objets étudiés dans cette thèse sont les germes de feuilletages holomorphes dans \mathbb{C}^2 . En substance, les invariants d'un feuilletage se divisent en les invariants des feuilles analytiques d'une part et le pseudo-groupe d'holonomie d'autre part. Nous nous proposons de construire des outils permettant d'étudier l'indépendance des premiers vis à vis du second. L'objet central de ce travail est la notion de *déformation isoholonomique* qui est le pendant local non-linéaire des déformations isomonodromiques de la théorie linéaire classique. Après avoir construit cet outil, nous l'utilisons pour comparer les deux classes de modules analytiques et pour étudier un certain nombre de problèmes de classification.

Position du problème.

A. Seidenberg a montré qu'un germe de feuilletage singulier à singularité isolée dans \mathbb{C}^2 admet une réduction de sa singularité : c'est un processus constitué d'une suite finie d'éclatements standards centrés sur des points aboutissant à un feuilletage holomorphe au voisinage d'un diviseur ne présentant que des singularités *réduites* [38]. La donnée de cette réduction détermine les premiers invariants d'une singularité :

1. la combinatoire du processus d'éclatements est incarnée par *l'arbre dual* de la réduction et correspond à la donnée du type topologique de l'inclusion du diviseur exceptionnel dans son voisinage. Cet invariant est bien compris pour une large classe de singularités [2][31][44].
2. Le type analytique du diviseur exceptionnel de la réduction est un invariant qui rend compte de la position des singularités du feuilletage réduit. En dépit de son apparente globalité, c'est un invariant *semi-local*. Lorsque l'arbre dual est fixé, c'est-à-dire le type topologique de la réduction, l'espace des modules du diviseur est de la forme \mathbb{C}^N , l'équivalence analytique de deux diviseurs topologiquement conjugués s'exprimant en termes de birapports des points singuliers.
3. Le type analytique de l'inclusion du diviseur dans son voisinage est un invariant strictement plus riche que les deux précédents. Son espace de module analytique à type topologique fixé s'avère généralement très singulier et difficile à décrire : en effet, ce problème contient celui des modules d'un germe de courbe ; or en dehors de cas très particuliers traités par exemple dans [46], on ne sait pas construire de famille complète relative à ce problème de module.

Pour mettre en évidence la différence critique entre le type analytique du diviseur exceptionnel et de son inclusion dans son voisinage, considérons l'exemple du germe de courbe S de \mathbb{C}^2 défini par une équation de la forme

$$(x^3 + y^3)(x - y + \dots) = 0.$$

La courbe S est une réunion de trois droites transverses deux à deux et d'un doublon de la composante d'équation $\{x - y = 0\}$ où l'on perturbe l'ordre de contact. Soit S_δ la courbe d'équation

$$(x^3 + y^3)(x - y + \delta x^2) = 0, \quad \delta \in \mathbb{C}^*.$$

On montre que deux germes de courbes S_δ et $S_{\delta'}$ sont analytiquement conjugués si et seulement si $\delta = \delta'$.

Deux voisinages de diviseurs $\mathcal{D}_0^n \subset \mathcal{M}_0^n$ et $\mathcal{D}_1^n \subset \mathcal{M}_1^n$ ayant pour arbre dual le graphe représenté par la figure 1 présentent des diviseurs biholomorphes car le groupe des transformations pro-

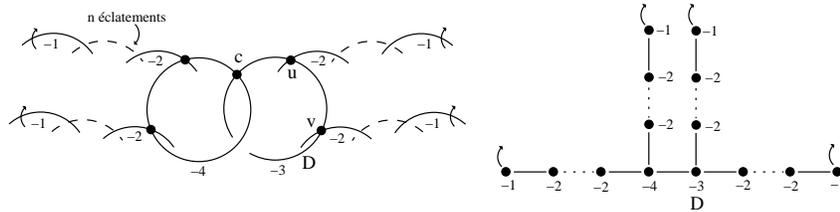


FIG. 1 – \mathcal{M}_0^n et son arbre dual.

jectives agit transitivement sur les triplets de points de \mathbb{P}^1 . Il suffit que chaque couple de composantes irréductibles pointées par les singularités des diviseurs et se correspondant dans l'arbre dual soient biholomorphes pour que les diviseurs soient globalement biholomorphes : il s'agit ici du caractère *semi-local* des modules d'un diviseur que nous avons évoqué. En revanche, en faisant varier uniquement la position d'un point singulier v sur la composante D privé des autres points singuliers u et c (voir la figure 1), on obtient une famille de voisinages $(\mathcal{M}_0^n(v))_v$ deux à deux non biholomorphes. En effet, fixons sur chaque composante extrême de l'arbre un germe de courbe lisse transverse au diviseur. La réunion de ces germes de courbes descend à l'origine de \mathbb{C}^2 en un germe de courbe analytique. Ce germe de courbe S_v admet une équation de la forme

$$(x^3 + y^3)(x - y + \psi(v)x^2) = 0$$

où $\psi(v)$ est une fonction injective de \mathbb{C}^* dans lui-même. On sait montrer que, pour n assez grand, si les voisinages $\mathcal{M}_0^n(v)$ et $\mathcal{M}_0^n(v')$ sont analytiquement équivalents alors les germes de courbes S_v et $S_{v'}$ le sont aussi; ce qui implique précisément que v et v' sont égaux. Ainsi, l'espace des modules du diviseur \mathcal{D}_0^n s'identifie à un point tandis que l'espace des modules de son voisinage \mathcal{M}_0^n contient une composante isomorphe à \mathbb{C}^* .

Beaucoup plus complexes que les invariants déjà introduits, le *pseudo-groupe transverse* et le *pseudo-groupe d'holonomie* sont des invariants analytiques intimement liés au feuilletage lui-même. En substance, le pseudo-groupe d'holonomie est engendré par toutes les transformations qui envoient une feuille du feuilletage sur elle-même. Il est toujours de dimension infinie. Aussi

définit-on le pseudo-groupe transverse qui est la restriction du pseudo-groupe d'holonomie sur une transversale complète, c'est-à-dire, une famille de germes de courbes transverses au feuilletage qui rencontrent toutes les feuilles. Ces pseudo-groupes contiennent une bonne partie de l'information dynamique du feuilletage. Leur étude aboutit par exemple à un dictionnaire établissant un lien entre le type de transcendance d'une éventuelle intégrale première et une propriété lisible sur le pseudo-groupe transverse [33].

Lorsque l'on s'intéresse aux problèmes de classifications, il est naturel de se demander dans quelle mesure les invariants introduits ci-dessus sont indépendants les uns des autres :

quelles sont a priori les données de ces invariants effectivement atteintes par un germe concret de feuilletage singulier ?

Un théorème classique de Alcides Lins Neto constitue une première réponse [19]. Au voisinage d'un diviseur irréductible, il est aisé de réaliser un feuilletage à pseudo-groupe transverse déterminé d'avance. En recollant une famille de tels feuilletages le long des *coins* d'un diviseur, A.L. Neto montre le théorème suivant sous certaines hypothèses génériques portant sur le pseudo-groupe transverse :

Théorème (A.L. Neto). *Ayant prescrit le type topologique du processus de réduction des singularités -invariant de type (1)- et le pseudo-groupe transverse, il existe un germe de feuilletage singulier qui présente ces invariants.*

Si l'on veut désormais modifier la position des singularités du feuilletage, c'est-à-dire, faire varier le type analytique du diviseur sans toucher au pseudo-groupe transverse ou au pseudo-groupe d'holonomie, il est naturel de s'intéresser aux déformations intégrables de feuilletages qui laissent invariants ces pseudo-groupes. A cet effet, la notion de *germes de déploiements équisinguliers* a été introduite par J.F. Mattei dans [27] pour étudier les modules locaux de feuilletages, c'est-à-dire, les types analytiques voisins de feuilletages dans une même classe de conjugaison topologique. Dans le contexte des déformations intégrables à espace de paramètres compact, nous appelons *déformation intégrable de feuilletage de $(\mathbb{C}^2, 0)$* tout feuilletage de codimension 1 dans $(\mathbb{C}^{2+p}, \mathbb{C}^2 \times K)$ où K est un compact de \mathbb{C}^p . Cette déformation est *isoholonomique* dès lors qu'elle est équisingulière, c'est-à-dire, lorsqu'elle admet une réduction des singularités *en famille*. Ce type de déformations de feuilletage s'avère en effet topologiquement trivial et à pseudo-groupe d'holonomie constant. Dans [27], J.F. Mattei donne un algorithme de calcul de la dimension de l'espace des modules de germes déploiements équisinguliers d'un feuilletage. En particulier, il retrouve la lissité de la strate à μ constant dans l'espace des déploiements d'une courbe établie par J. Wahl [42] et calcule la dimension de celle-ci. Il n'existe cependant pas actuellement de méthode constructive pour décrire une famille universelle pour les déformations intégrables isoholonomiques d'un feuilletage donné. Pour autant, dans sa thèse M.Seguy [37] obtient le résultat suivant pour une classe de feuilletage que nous décrirons facilement par la suite :

Théorème (M.Seguy). *Soit G le pseudo-groupe d'holonomie d'un feuilletage \mathcal{F} . Ayant prescrit un type analytique de diviseur -invariant de type (2)- dans la classe topologique de la réduction de \mathcal{F} -invariant de type (1)-, il existe un germe de feuilletage singulier qui réalise cet invariant et admet un pseudo-groupe d'holonomie équivalent à G , en un sens que nous expliciterons par la suite.*

La démonstration consiste à déplacer les singularités de \mathcal{F} le long du diviseur vers la position recherchée à l'aide d'une déformation intégrable isoholonomique. M. Seguy montre que pour une classe générique de feuilletages, cette dernière construction est toujours possible. Ce résultat et le théorème de A.L. Neto permettent ainsi la réalisation d'un feuilletage où l'on fixe d'avance la position des singularités du feuilletage obtenu après réduction et le pseudo-groupe transverse.

Présentation des résultats.

Le **premier chapitre** de cette thèse est consacré à l'exposition des définitions et propriétés des objets que nous manipulerons dans cette thèse. Nous y présentons la notion de *déformation isoholonomique* qui est l'élément central de ce travail : un de nos objectifs est de montrer finalement la souplesse de l'outil déformation isoholonomique malgré sa relative non-constructibilité. Dans cette optique, l'interprétation cohomologique des déformations isoholonomiques infinitésimales sera exposée à partir des résultats de [27]. Pour une classe très particulière de déformations isoholonomiques à espaces de paramètres compacts, on retrouve une interprétation cohomologique qui initie en fait, la majorité des constructions présentées dans les chapitres suivants.

Le premier résultat de cette thèse dont la preuve constitue l'essentiel des **deuxième et troisième chapitres** est le théorème suivant :

Théorème (Réalisation). *Soit \mathcal{F}_0 un germe de feuilletage singulier à singularité isolée de type courbe généralisée non-dicritique et $E_0 : (\mathcal{M}_0, \mathcal{D}_0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ la réduction de ses singularités. Pour toute application holomorphe $E : (\mathcal{M}, \mathcal{D}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ ayant le même type topologique que E_0 , il existe un germe de feuilletage \mathcal{F} fibre d'une déformation isoholonomique de \mathcal{F}_0 dont E est exactement la réduction des singularités.*

Dans un premier moment, nous développons un formalisme attaché à une classe très spéciale de germes de variétés. Introduisant une construction dite de *collage*, les propriétés des catégories de variétés ainsi définies incarnent du point de vue géométrique leurs éventuelles relations cohomologiques. Au sein de ces catégories, le théorème de réalisation se laisse démontrer par récurrence sur la longueur du processus d'éclatements. Le schéma de la preuve est le suivant : on filtre \mathcal{M} par les voisinages infinitésimaux de son diviseur exceptionnel. On établit d'abord le résultat sur le premier voisinage. Un cocycle de collage étant ensuite *préparé*, on effectue une double induction sur la longueur des processus de réduction et sur l'ordre du voisinage dans la filtration. On développe alors un algorithme de normalisation fondé sur deux éléments : l'équation cohomologique associée au résultat infinitésimal (III.2.2) et la formule de Campbell-Hausdorff. Cet algorithme termine grâce à un théorème de stabilité des voisinages de diviseurs exceptionnels. Un corollaire du résultat d'A.L. Neto et du théorème précédent répond définitivement au problème initialement posé :

Théorème. *Soit G le pseudo-groupe d'holonomie d'un feuilletage \mathcal{F} . Ayant prescrit le type analytique de la réduction -invariant de type (3)- dans la classe topologique de la réduction de \mathcal{F} , il existe un germe de feuilletage singulier qui présente cet invariant et admet un pseudo-groupe d'holonomie équivalent à G .*

On peut ainsi réaliser tout pseudo-groupe transverse par un feuilletage dont on fixe d'avance le processus de réduction.

Le **quatrième chapitre** est consacré à la preuve du théorème principal de cette thèse qui est une version à paramètres du théorème de réalisation.

Soit K un compact de Stein de \mathbb{C}^p , c'est-à-dire admettant un système de voisinages de Stein, et C un sous-ensemble analytique de K .

Théorème (Réalisation à paramètres). *Soit \mathcal{F}_0 une déformation isoholonomique au-dessus de K d'une courbe généralisée non-dicritique. Notons S une déformation équisingulière au-dessus de K de germes de courbes telle que S et $\text{Sep}(\mathcal{F}_0)$ sont conjuguées au-dessus de C . Alors il existe une déformation isoholonomique \mathcal{F} de base K avec $\text{Sep}(\mathcal{F}) = S$ telle que \mathcal{F}_0 et \mathcal{F} sont reliées d'une déformation isoholonomique de base $\mathbb{D} \times K$ analytiquement triviale le long de tout sous-ensemble analytique $\mathbb{D} \times \{t\}$, $t \in C$.*

La démonstration de ce résultat s'appuie sur celle de l'énoncé sans paramètre. Nous expliquons comment une large majorité des arguments de l'algorithme de normalisation se laisse généraliser sans difficulté au contexte à paramètres. L'essentiel des difficultés associées à l'introduction d'un paramètre est surmonté grâce aux propriétés géométriques et cohomologiques du compact K liées à sa nature Stein : en particulier, toute fonction holomorphe sur un sous-ensemble analytique est de K la restriction d'une fonction holomorphe sur K tout entier.

La classe de cobordisme $\text{Cob}(\mathcal{F}_0)$ d'un feuilletage introduite au **cinquième chapitre** est l'ensemble des feuilletages qui sont dans la fibre d'une déformation isoholonomique du feuilletage \mathcal{F}_0 . Nous montrons que pour une classe générique de feuilletages, $\text{Cob}(\mathcal{F}_0)$ se surjecte naturellement sur la classe d'équisingularité des séparatrices de \mathcal{F}_0 , c'est-à-dire l'ensemble des courbes topologiquement conjuguées à \mathcal{F}_0 .

Théorème. *Soit \mathcal{F}_0 un germe de feuilletage de type courbe généralisée non-dicritique. Tout germe de courbe topologiquement conjugué aux séparatrices de \mathcal{F}_0 est la réunion des séparatrices d'un feuilletage dans la classe de cobordisme de \mathcal{F}_0 .*

En fait, nous démontrons un résultat plus précis dont l'énoncé fait appel à la notion de *marquage* développée dans les premiers chapitres. La démonstration de ce résultat repose d'abord sur un théorème de C. Camacho, A.L. Neto et P. Sad [2] qui assure l'égalité de la réduction des singularités d'un feuilletage de type courbe généralisée et de celle de ses séparatrices. Dès lors, une propriété de type *détermination finie pour les familles équisingulières de courbes* dont l'usage est couplé au théorème de réalisation permet de ramener le problème sur les séparatrices à un problème sur les voisinages des diviseurs.

Dans un second moment, on s'intéresse au problème de la classification analytique des feuilletages quasi-homogènes. C'est une classe à laquelle il est naturel de s'intéresser en premier lieu car ces feuilletages présentent une réduction des singularités très simple. En utilisant une propriété de rigidité établie par J.F. Mattei [28] concernant les déformations isoholonomiques de feuilletages quasi-homogènes, nous avons obtenu un résultat de classification à séparatrices fixées comme corollaire du théorème de réalisation à paramètres :

Théorème. *Soit \mathcal{F} et \mathcal{F}' deux feuilletages quasi-homogènes ayant des séparatrices analytiquement conjuguées (resp. formellement conjuguées). Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *\mathcal{F} et \mathcal{F}' sont analytiquement conjugués (resp. formellement conjugués).*
2. *Les représentations d'holonomies des composantes centrales de \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont analytiquement conjuguées (resp. formellement conjugués).*

Ce résultat a été prouvé par D. Cerveau et R. Moussu dans le cas de certaines singularités nilpotentes [7] et par D. Cerveau et P. Sad dans le cas d'une singularité homogène [8]. Depuis les travaux de F. Loray [21], de H. Żoladek et de E. Stróżyńska [41] dans le cas nilpotent et les travaux plus récent de E. Paul [34], on sait construire des formes normales formelles uniques pour les feuilletages quasi-homogènes. Les travaux de M. Canalis-Durand, J.P. Ramis, R. Schäfke et Y. Sibuya [5] permettent même le calcul du degré Gevrey de ces formes normales. Le théorème précédent stipule que la donnée de cette forme normale formelle est équivalente à la donnée d'un élément dans l'espace des représentations d'un groupe libre dans le groupe $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$. Le sens de cette correspondance reste encore à établir. Enfin, ce résultat est à rapprocher des résultats obtenus par D. Marin [23] sur l'espace des modules d'un feuilletage quasi-homogène. La technique de démonstration employée dans les cas cités précédemment consiste à prolonger comme dans [32] une conjugaison des holonomies le long d'une fibration transverse en dehors d'un certain nombre de courbes. Malheureusement, cette technique semble difficile à mettre en œuvre dans le cas général : l'obstruction résulte de ce qu'il est possible de réaliser des déploiements de courbe quasi-homogène en dehors de la classe quasi-homogène. Ici précisément intervient le résultat de réalisation à paramètres qui permet de lever cette obstruction.

Dans le **sixième et dernier chapitre** de cette thèse, nous construisons une notion de feuilletage formel de deuxième espèce incluant le cas des feuilletages dicritiques. Il s'agit d'une classe générique de feuilletages relativement facile à présenter. Définissant une notion d'*équation équilibrée* des séparatrices d'un feuilletage dicritique, nous sommes en mesure de généraliser les critères standards établis dans [31] pour qu'un feuilletage soit de deuxième espèce. En particulier, nous établissons le résultat suivant :

Théorème. *Soit $\widehat{\mathcal{F}}$ un germe de feuilletage formel et \widehat{F} une équation équilibrée de ses séparatrices. Les propositions suivantes sont équivalentes*

1. *$\widehat{\mathcal{F}}$ est de deuxième espèce.*
2. *$\nu_0(\mathcal{F}) = \nu_0(d\widehat{F})$.*
3. *La suite de faisceaux*

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{\mathcal{F}}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{N}} \xrightarrow{E^* \frac{\widehat{\omega}}{\widehat{F}}(\cdot)} \widehat{\mathcal{J}}_{\geq 3} \longrightarrow 0$$

est exacte où $\widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{\mathcal{F}}} \subset \widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{N}}$ sont les faisceaux des champs transversalement formels tangents respectivement au feuilletage $\widehat{\mathcal{F}}$ et aux zéros de \widehat{F} . Le faisceau $\widehat{\mathcal{J}}_{\geq 3}$ est le faisceau des fonctions nulles le long des pôles de \widehat{F} .

Ce théorème ouvre une voie vers l'étude des obstructions au théorème de réalisation pour les feuilletages dicritiques. Nous exhibons un exemple de feuilletage dicritique de deuxième espèce

qui ne satisfait pas le théorème de réalisation, du moins, à l'échelle infinitésimale. Les obstructions se concentrent sur les composantes dicritiques de valence supérieure à trois. Elles sont à rapprocher de la notion de *points de fugues* introduite dans [6] par F. Cano et N. Corral qui sont les obstructions à la réalisation d'un modèle logarithmique pour les feuilletages dicritiques. Il semble cependant envisageable de lever ces obstructions par un théorème de réalisation faible aboutissant à un *feuilletage dominant* le feuilletage initial qui pourrait en particulier, remonter l'existence du *modèle logarithmique dominant* de F. Cano et N. Corral : soit \mathcal{F}_0 un feuilletage dicritique de deuxième espèce, F_0 une équation équilibrée de ses séparatrices et $E_0 : (\mathcal{M}_0, \mathcal{D}_0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ le processus de réduction de \mathcal{F}_0 . On démontre alors le résultat suivant :

Théorème. *Soit $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ une variété topologiquement conjuguée à $(\mathcal{M}_0, \mathcal{D}_0)$. Il existe un feuilletage \mathcal{F} sur \mathcal{M} tel que S désignant l'ensemble des singularités non-réduites de \mathcal{F} , les feuilletages restreints*

$$\mathcal{F}_0|_{(\mathcal{M}_0, \mathcal{D}_0 \setminus \{F_0=\infty\})} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}|_{(\mathcal{M}, \mathcal{D} \setminus S)}$$

sont reliés par une déformation isoholonomique.

Table des matières

| | | |
|------------|--|-----------|
| I | Déformation isoholonomique d'un feuilletage de \mathbb{C}^2. | 19 |
| I.1 | Germe de feuilletage de \mathbb{C}^2 . | 19 |
| I.1.1 | Singularité réduite. | 20 |
| I.1.2 | Réduction des singularités d'un feuilletage. | 21 |
| I.1.3 | Marquage de feuilletage. | 22 |
| I.2 | Holonomie projective et pseudo-groupe d'holonomie. | 23 |
| I.3 | Déformation isoholonomique. | 26 |
| I.3.1 | Définitions. | 26 |
| I.3.2 | Cohomologie et isoholonomie des déformations intégrables équisingulières. | 27 |
| I.3.3 | Marquage d'une déformation isoholonomique. | 28 |
| II | Les catégories $\text{Col}_n(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$. | 31 |
| II.1 | La catégorie des arbres marqués. | 31 |
| II.2 | Les faisceaux \mathcal{G}_Z^n , $n \geq 0$. | 33 |
| II.3 | Les collages d'arbres. | 38 |
| II.3.1 | Les recouvrements distingués. | 39 |
| II.3.2 | Collage. | 39 |
| II.3.3 | Les catégories $\text{Col}_n(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$. | 40 |
| II.3.4 | Calculs dans $\text{Col}_0(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$. | 42 |
| II.3.5 | Propriété de stabilité. | 43 |
| III | Théorème de réalisation. | 47 |
| III.1 | Cobordismes dans $\text{Col}_n(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$. | 47 |
| III.2 | Construction des cobordismes. | 49 |
| III.2.1 | étape 1 : le problème infinitésimal. | 50 |
| III.2.2 | étape 2 : cobordisme dans $\text{Col}_1(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$. | 55 |
| III.2.3 | étape 3 : cobordisme dans $\text{Col}_0(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$. | 57 |
| III.3 | Théorème de réalisation. | 61 |
| III.3.1 | Première étape : préparation du cocycle. | 61 |
| III.3.2 | Seconde étape : passage à un recouvrement fin distingué. | 64 |
| IV | Théorème de réalisation à paramètres. | 69 |
| IV.1 | Arbres au-dessus de K . | 69 |
| IV.2 | Familles équisingulières de germes de courbes. | 71 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| IV.2.1 | Paires de Puiseux et réduction. | 71 |
| IV.2.2 | Marquage des germes de courbes. | 72 |
| IV.2.3 | Détermination finie pour les familles équisingulières de germes de courbes. | 73 |
| IV.3 | Analogues à paramètres. | 76 |
| IV.4 | Preuve du théorème de réalisation à paramètres. | 77 |
| IV.4.1 | Le théorème de stabilité dans $\text{Col}_0^C(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$ | 79 |
| IV.4.2 | Étape 1 : le cas infinitésimal à paramètres. | 80 |
| IV.4.3 | Étapes 2 et 3 : cobordisme dans $\text{Col}_1^C(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$ et dans $\text{Col}_0^C(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$ | 82 |
| IV.4.4 | Démonstration du théorème de réalisation à paramètres. | 82 |
| V | Modules d'un feuilletage. | 89 |
| V.1 | Classe de cobordisme d'un feuilletage. | 89 |
| V.1.1 | Variété des arbres d'éclatements. | 89 |
| V.1.2 | Réalisation d'un feuilletage à séparatrices fixées. | 91 |
| V.1.3 | Classe de cobordisme d'un feuilletage. | 92 |
| V.2 | Les feuilletages quasi-homogènes. | 94 |
| V.2.1 | Réduction et rigidité. | 94 |
| V.2.2 | Modules des feuilletages quasi-homogènes. | 96 |
| VI | Les feuilletages de deuxième espèce. | 103 |
| VI.1 | Forme normale des singularités réduites formelles. | 103 |
| VI.2 | Multiplicité d'un feuilletage formel. | 104 |
| VI.3 | Feuilletage dicritique de deuxième espèce. | 106 |
| VI.3.1 | Les faisceaux transversalement formels. | 108 |
| VI.4 | Théorème d'existence pour les feuilletages de deuxième espèce non-dicritiques. | 110 |
| VI.4.1 | Cobordisme formel | 110 |
| VI.4.2 | Du formel au convergent. | 111 |
| VI.5 | Obstruction dicritique. | 113 |
| VI.5.1 | Contre-exemples dans le cas dicritique. | 113 |
| VI.5.2 | Les points de fugues | 115 |

Chapitre I

Déformation isoholonomique d'un feuilletage de \mathbb{C}^2 .

De façon générale, un *feuilletage holomorphe* \mathcal{F} de dimension p sur une variété complexe M de dimension n est la donnée d'un atlas

$$\{\psi_i : U_i \subset M \rightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{n-p}\}$$

tel que les changements de cartes soient holomorphes et de la forme

$$(x, t) \mapsto (\psi(x, t), \phi(t)), \quad x = (x_1, \dots, x_p), \quad t = (t_1, \dots, t_{n-p})$$

C'est aussi la donnée d'un recouvrement par des ouverts $\{U_i\}_{i \in J}$ équipés de submersions

$$(H_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^{n-p})_{i \in I}$$

satisfaisant, sur chaque intersection $U_i \cap U_j$, la condition de recollement

$$H_j = \psi_{ij} \circ H_i$$

pour un biholomorphisme $\psi_{ij} : H_i(U_i \cap U_j) \rightarrow H_j(U_i \cap U_j)$. Sur l'ouvert U_i , la relation *x et y appartiennent à la même composante connexe par arcs d'une fibre de H_i* définit une relation d'équivalence \mathcal{R}_i . Toute classe d'équivalence de la relation d'équivalence sur M engendrée par la famille de relations $(\mathcal{R}_i)_{i \in I}$ est appelée *feuille* du feuilletage \mathcal{F} . Les conditions de recollements assurent que les relations \mathcal{R}_i et \mathcal{R}_j coïncident sur $U_i \cap U_j$.

I.1 Germe de feuilletage de \mathbb{C}^2 .

Un germe de feuilletage \mathcal{F} holomorphe singulier dans \mathbb{C}^2 correspond à la donnée d'un germe de 1-forme holomorphe

$$a(x, y)dx + b(x, y)dy \tag{I.1}$$

à action près du groupe des germes d'unités \mathcal{O}_2^* . Ici, les fonctions a et b sont des germes de fonctions holomorphes s'annulant à l'origine de \mathbb{C}^2 . Le *lieu singulier* du feuilletage est le lieu

des zéros communs à a et b . Lorsque ce lieu est de codimension 1, a et b possèdent un facteur commun non-trivial dans $\mathbb{C}\{x, y\}$. Le feuilletage associé à la 1-forme

$$\frac{a(x, y)}{\text{pgcd}(a, b)}dx + \frac{b(x, y)}{\text{pgcd}(a, b)}dy$$

prolonge le feuilletage (I.1) en un feuilletage régulier en dehors de l'origine. Aussi désormais, la singularité de (I.1) sera supposée isolée, ce qui revient à demander que a et b soient sans facteur commun dans $\mathbb{C}\{x, y\}$.

I.1.1 Singularité réduite.

Un germe de feuilletage est dit *réduit* s'il existe un système de coordonnées dans lequel il est défini par une 1-forme s'écrivant

$$\lambda xdy + \mu ydx + \dots, \quad \mu \neq 0, \quad \frac{\lambda}{\mu} \notin \mathbb{Q}_{<0}. \quad (\text{I.2})$$

Le quotient $\frac{\lambda}{\mu}$ est un invariant important de ce feuilletage. Il est appelé *indice* du feuilletage. On adopte le vocabulaire suivant : cette singularité de feuilletage est dite de type

1. *hyperbolique* si $\frac{\lambda}{\mu} \notin \mathbb{R}$,
2. *nœud* si $\frac{\lambda}{\mu} \in \mathbb{R}^{-*}$,
3. *selle* si $\frac{\lambda}{\mu} \in \mathbb{R}^{+*}$,
4. *selle-nœud* si $\lambda = 0$.
5. *résonnante* si $\frac{\lambda}{\mu} \in \mathbb{Q}$

La littérature traitant de ces singularités est vaste et les résultats les concernant ont atteint une grande précision. Lorsque la singularité est hyperbolique, le caractère linéarisable, c'est-à-dire l'existence de coordonnées pour lesquelles le feuilletage est donné par la 1-forme

$$\lambda xdy + \mu ydx,$$

remonte aux travaux de H. Poincaré. Les singularités résonnantes et de type selle-nœud sont complètement classifiées depuis les travaux de J.-P. Ramis et J. Martinet [25][24]. On sait de plus caractériser les valeurs $\frac{\lambda}{\mu} \notin \mathbb{Q}_{<0}$ pour lesquelles toute singularité de type (I.2) est *linéarisable* [43]. Lorsque la singularité est une selle dont l'indice est irrationnel, les travaux de Brjuno-Yoccoz ont mis en évidence un ensemble \mathcal{B} ayant la propriété suivante : toute selle d'indice α est linéarisable si et seulement si α est dans \mathcal{B} . Le critère d'appartenance à l'ensemble \mathcal{B} porte sur le développement en fraction continue de l'indice de la singularité ; de plus, \mathcal{B} est de mesure totale dans \mathbb{R}^{+*} .

Les singularités réduites constituent les singularités *les plus simples* pour les différentes perspectives adoptées ici : une singularité réduite reste réduite après éclatement standard centré sur la singularité et elle est rigide pour le type de déformations que nous utiliserons. Nous allons expliciter maintenant le principe de réduction des singularités non-réduites.

I.1.2 Réduction des singularités d'un feuilletage.

Dans l'optique de la réduction des singularités non-réduites, la notion de *singularité réduite relativement à un germe de courbe* spécifie celle de singularité réduite. Elle aboutit à une réduction des singularités plus fine que celle associée à la simple notion de singularité réduite.

Définition I.1.1. Soit \mathcal{F} un germe de feuilletage et S un germe de courbe. Le couple (\mathcal{F}, S) est dit *réduit* lorsque l'une des conditions suivantes est vérifiée

1. \mathcal{F} est réduit et singulier et S est invariant.
2. \mathcal{F} est régulier, S est non-invariant et toutes les feuilles de \mathcal{F} sont transverses à S .

Pour énoncer la réduction des singularités, nous appelons ici *processus d'éclatements au-dessus de $0 \in \mathbb{C}^2$* la donnée d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{M}^h & \xrightarrow{E^h} & \dots & \rightarrow & \mathcal{M}^j & \xrightarrow{E^j} & \mathcal{M}^{j-1} & \rightarrow & \dots & \xrightarrow{E^1} & \mathcal{M}^0 & = & \mathbb{C}^2 \\ \bigcup & & & & \bigcup & & \bigcup & & & & \bigcup & & \\ \Sigma^h & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \Sigma^j & \rightarrow & \Sigma^{j-1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \Sigma^0 & = & \{0\} \\ \bigcup & & & & \bigcup & & \bigcup & & & & \bigcup & & \\ S^h & \rightarrow & \dots & \rightarrow & S^j & \rightarrow & S^{j-1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & S^0 & = & \{0\} \end{array}$$

où \mathcal{M}^j est une variété analytique complexe lisse de dimension 2; Σ^j , appelé *ensemble des singularités*, est un ensemble fini de points contenu dans la courbe

$$\mathcal{D}^j := (E^1 \circ \dots \circ E^j)^{-1}(S^0)$$

appelée *j^{ieme} diviseur exceptionnel* de l'éclatement; E^{j+1} est l'éclatement standard de centre S^j , appelé *j^{ieme} centre d'éclatement*. L'application composée $E_h := E^1 \circ \dots \circ E^h$ est appelée *morphisme total* du processus. On note $\text{Comp}(\mathcal{D}^j)$ l'ensemble des composantes irréductibles de \mathcal{D}^j . L'entier h est appelé *hauteur* du processus d'éclatements et le triplet $(\mathcal{M}^h, \mathcal{D}^h, \Sigma^h)$ l'*arbre cime* du processus d'éclatements. Le triplet $(\mathcal{M}^0, \mathcal{D}^0, \Sigma^0)$ est *le socle* du processus d'éclatement.

Étant donné un germe de feuilletage \mathcal{F} , le théorème de Seidenberg est l'énoncé suivant

Théorème I.1.1 ([38][29]). *Il existe un processus d'éclatements de hauteur h tel que*

1. *pour tout $j = 0, \dots, h$, le centre S^j est l'ensemble des singularités non-réduites de $E^{j*}\mathcal{F}$ relativement au diviseur \mathcal{D}^j ,*
2. *pour tout $j = 0, \dots, h$, le centre Σ^j est l'ensemble des singularités du feuilletage $E^{j*}\mathcal{F}$,*
3. $S^h = \emptyset$.

La condition (2) de la définition (I.1.1) évite la situation d'un feuilletage localement régulier dont une feuille serait tangente au diviseur. Lorsque le processus d'éclatements considéré est le processus minimal parmi ceux qui vérifient les propriétés du théorème (I.1.1), on parle du *processus de réduction* de \mathcal{F} et l'arbre $(\mathcal{M}^h, \mathcal{D}^h, \Sigma^h)$ est appelé *arbre de réduction* de \mathcal{F} . Cet arbre est unique ainsi que son morphisme total à permutation près de l'ordre de certaines applications d'éclatements intermédiaires.

Une *séparatrice* est une composante irréductible de l'adhérence d'une courbe invariante du feuilletage régulier induit par \mathcal{F} en dehors de la singularité dont l'adhérence est une courbe analytique. L'existence d'un processus de réduction est à l'origine de la démonstration du théorème classique :

Théorème I.1.2 ([4]). *Tout germe de feuilletage holomorphe singulier admet au moins une séparatrice.*

Comme toute séparatrice se relève dans l'arbre de réduction en une courbe transverse au diviseur devenant ainsi une séparatrice lisse d'une singularité réduite, le processus de réduction du feuilletage désingularise les singularités des séparatrices. La stratégie adoptée pour la preuve de (I.1.2) consiste, par un argument combinatoire, à montrer l'existence d'une singularité réduite pour le feuilletage réduit admettant une séparatrice transverse au diviseur de l'arbre de réduction. Cette courbe descend alors à l'origine en un germe de courbe analytique constituant une séparatrice.

Lorsque le diviseur de l'arbre de réduction n'est pas une courbe invariante, le feuilletage est dit *dicritique* et *non-dicritique* dans le cas contraire. Cette alternative correspond à la présence ou non d'un nombre infini de séparatrices. L'hypothèse de dicriticité est source d'obstructions à la majeure partie des résultats présentés dans cette thèse ; cependant, nous essaierons d'analyser cette difficulté sur l'exemple d'un feuilletage admettant une intégrale première méromorphe (VI.5.1).

Si le feuilletage réduit sur l'arbre de réduction ne présente aucune singularité selle-nœud, il est dit de type *courbe généralisée*. On ne demande pas que le feuilletage soit non-dicritique. Les feuilletages de type courbe généralisée admettent un processus de réduction qu'il est aisé de décrire :

Théorème I.1.3 ([2]). *Les processus de réduction d'un germe de feuilletage de type courbe généralisée et de ses séparatrices sont égaux.*

Ce résultat explique la terminologie *courbe généralisée*.

Pour décrire la topologie de l'arbre de réduction, on définit un invariant combinatoire contrôlant le type topologique du processus de réduction : ainsi, en utilisant les notations du (I.1.1), *l'arbre dual* $\mathbb{A}^*(\mathcal{F})$ du feuilletage \mathcal{F} est défini par la donnée d'un graphe pondéré fléché dont l'ensemble des sommets est l'ensemble $\text{Comp}(\mathcal{D}^h)$; les sommets D et D' sont reliés par une arête si et seulement si $D \cdot D' = 1$; les sommets sont pondérés par l'auto-intersection $D \cdot D$; à chaque sommet D correspondant à une composante non-dicritique du feuilletage $E_h^* \mathcal{F}$ sont attachées autant de flèches que de transformées strictes de séparatrices transverses à D .

I.1.3 Marquage de feuilletage.

La notion d'arbre marqué a été introduite dans [37] pour comparer les invariants semi-locaux des germes de feuilletages qui possèdent des arbres de réduction similaires.

Soit \mathcal{F}_0 et \mathcal{F} deux germes de feuilletages dont les arbres cimes des processus de réduction sont respectivement notés $(\mathcal{M}_0, \mathcal{D}_0, \Sigma_0)$ et $(\mathcal{M}, \mathcal{D}, \Sigma)$. Une *indexation* de \mathcal{F}_0 par \mathcal{F} est la donnée de deux bijections

$$\sigma : \Sigma_0 \xrightarrow{\sim} \Sigma \quad \text{et} \quad \kappa : \text{Comp}(\mathcal{D}_0) \xrightarrow{\sim} \text{Comp}(\mathcal{D})$$

telles que pour toute composante irréductible D de \mathcal{D}_0 , on ait

$$\sigma(D \cap \Sigma_0^h) = \kappa(D) \cap \Sigma.$$

Un *système complet de lacets* de $(\mathcal{M}, \mathcal{D}, \Sigma)$ est la donnée d'une collection

$$\Gamma = \{\gamma_{s,D}\}_{(s,D) \in \Sigma \check{\times} \mathcal{D}}, \quad \Sigma \check{\times} \mathcal{D} = \{(s, D) \mid s \in D\} \subset \Sigma \times \text{Comp}(\mathcal{D})$$

où $\gamma_{s,D}$ est un lacet à image compacte dans $\mathcal{D} \setminus \Sigma$ tel que, pour toute composante D , les lacets $\gamma_{s,D}$ ont même origine et engendrent le groupe fondamental de D privé des points de $\Sigma \cap D$. Le groupe $\text{Homéo}^+(\mathcal{D}, \Sigma)$ des homéomorphismes préservant l'orientation, préservant \mathcal{D} et laissant fixe chaque point de Σ agit sur l'ensemble des systèmes complets de lacets. On dit que deux systèmes complets de lacets Γ et Λ sont isotopes, s'il existe un chemin continu $t \mapsto h_t$, $t \in [0, 1]$ dans $\text{Homéo}^+(\mathcal{D}, \Sigma)$ tel que h_0 soit l'identité et $\Lambda = h_1^* \Gamma$.

Définition 1.1.2. On appelle *marquage* de \mathcal{F} par \mathcal{F}_0 la donnée d'un triplet (σ, κ, Γ) constitué d'une *indexation* (σ, κ) de \mathcal{F}_0 par \mathcal{F} et d'une *classe d'isotopie* Γ de système complet de lacets pour chaque composante du diviseur \mathcal{D} telle que κ respecte les intersections des composantes :

$$\kappa(D) \cdot \kappa(D') = D \cdot D', \quad D, D' \in \text{Comp}(\mathcal{D}).$$

Si le feuilletage \mathcal{F} est marqué par \mathcal{F}_0 , les processus de réduction de ces deux feuilletages ont même type topologique. La notion de marquage permet en somme de *numéroter* les séparatrices et les points singuliers d'un feuilletage et d'éviter ainsi les symétries exceptionnelles du feuilletage. Par exemple, le feuilletage donné par la 1-forme exacte $d(x^2 - y^3)(x^3 - y^2)$ admet un automorphisme s'écrivant

$$(x, y) \mapsto (y, x)$$

qui permute les deux composantes irréductibles des séparatrices. Il ne peut donc respecter aucun marquage. Tandis que les automorphismes de la forme

$$(x, y) \mapsto (\alpha x, \beta y), \quad \alpha^3 = \beta^2, \quad \beta^3 = \alpha^2$$

laissent invariant le feuilletage et chaque séparatrice et respectent tout marquage.

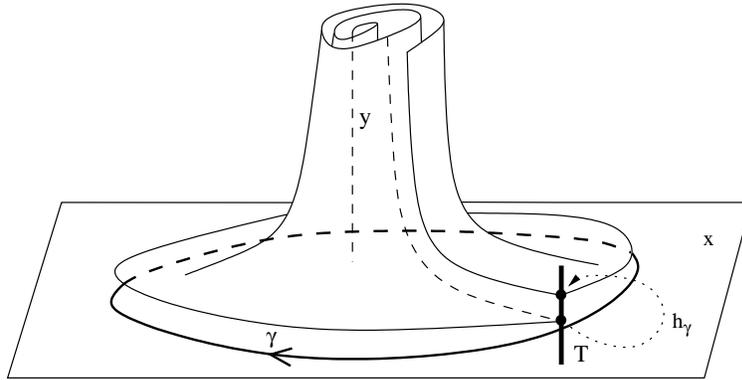
1.2 Holonomie projective et pseudo-groupe d'holonomie.

Soit \mathcal{F} un germe de feuilletage réduit singulier en $0 \in \mathbb{C}^2$ tel que, dans des coordonnées adaptées (x, y) la courbe $\{x = 0\}$ est une séparatrice. Les fibres de la projection

$$(x, y) \mapsto (0, y), \quad y \neq 0$$

sont transverses au feuilletage. Traçons sur $(x = 0)$ un lacet γ d'origine $(0, \epsilon)$ tournant une fois autour de la singularité. Soit $i : (\mathbb{C}, 0) \hookrightarrow T$ un germe de paramétrisation de la transversale $T = \{y = \epsilon\}$. Pour tout $x \in \mathbb{C}$ assez petit, le lacet γ admet un relèvement dans la feuille passant par $(i(x), \epsilon)$ qui respecte la fibration $(x, y) \mapsto (0, y)$. L'extrémité $h_\gamma(x)$ de ce relèvement définit une application

$$x \in (\mathbb{C}, 0) \mapsto i^{-1}(h_\gamma(x)) \in (\mathbb{C}, 0)$$

FIG. I.1 – Holonomie de γ calculée sur la transversale T

appelée *holonomie du lacet* γ . Cette application est un germe d'automorphisme de $(\mathbb{C}, 0)$ dont la classe à conjugaison intérieure près ne dépend ni de la transversale T ni du chemin γ dans sa classe d'homotopie.

La réduction E d'un feuilletage \mathcal{F} permet de faire la construction suivante : sur chaque composante D du diviseur exceptionnel invariante par \mathcal{F} , on peut comme ci-dessus calculer sur une courbe transverse au diviseur en un point de $D \setminus \text{Sing}(E^*\mathcal{F})$ l'holonomie de tout lacet tracé dans D privé des points singuliers de \mathcal{F} . On obtient ainsi un morphisme de groupe

$$\Pi_1(D \setminus \Sigma, a) \longrightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0).$$

La classe analytique de cette représentation est appelée *représentation d'holonomie projective*.

La famille des représentations d'holonomie projective

$$\left(\Pi_1(D \setminus \Sigma, x) \longrightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \right)_{D \in \text{Comp}(\mathcal{D})}$$

se trouve être contenue dans un objet plus complexe : *le pseudo-groupe d'holonomie*. Ce pseudo-groupe est engendré par tous les automorphismes locaux qui agissent dans la feuille locale. Précisément, si les feuilles sont localement les fibres d'une submersion s'écrivant $(x, y) \mapsto y$, alors la fibre du pseudo-groupe d'holonomie est l'ensemble des automorphismes de la forme

$$(x, y) \mapsto (\phi(x, y), y).$$

Dans [20], F. Loray explique comment ce pseudo-groupe contient toutes les représentations d'holonomies et la façon dont celles-ci se recollent le long des coins par les applications de Dulac des singularités réduites. Ces applications sont multiformes. Par exemple, pour une singularité linéaire s'écrivant en coordonnée

$$\lambda x dy + \mu y dx, \quad \frac{\lambda}{\mu} \notin \mathbb{R}_{<0}$$

l'application de Dulac D s'écrit

$$D : \{(1, u) \mid |u| < \epsilon\} \mapsto (u^{\frac{\lambda}{\mu}}, 1).$$

Celle-ci fait correspondre à un point de la transverse $\{x = 1\}$ un point de la transverse $\{y = 1\}$ dans la même feuille. En général, on peut trouver une description exhaustive des pseudo-groupes d'holonomie et des applications de Dulac des singularités réduites dans [22].

Pour définir l'équivalence de pseudo-groupes d'holonomie, on décrit un système de générateurs de ces pseudo-groupes lorsque l'on considère leur trace sur une transversale complète T : une transversale complète est la donnée d'une famille de germes de courbes transverses au feuilletage tel que toute feuille rencontre au moins l'une de ces courbes. Pour constituer une famille complète, il suffit donc de se donner :

- un germe de courbe lisse T_D transverse au feuilletage pour chaque composante irréductible D invariante par le feuilletage ;
- la famille des composantes irréductibles du diviseur qui sont transverses au feuilletage ;
- des transversales supplémentaires nécessaires à la complétude dûes à la présence de singularités réduites de type nœud et selle-nœud qui disconnectent le feuilletage.

Suivant [22], le pseudo-groupe d'holonomie est engendré sur la transversale T par :

- les générateurs de l'holonomie projective représentés sur les transversales T_D ;
- les applications de Dulac pour chaque point singulier du diviseur intersection de deux composantes invariantes par le feuilletage ;
- les plongements d'identifications $\psi_{D,D'} : T_D \rightarrow D'$ pour chaque intersection entre une composante invariante D et composante transverse D' ;
- les générateurs des pseudo-groupes d'holonomie de chaque singularité réduite du feuilletage.

Soit \mathcal{F} et \mathcal{F}' deux germes de feuilletages singuliers marqués par \mathcal{F}_0 .

Définition 1.2.1. *Nous disons que les pseudo-groupes d'holonomie de \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont équivalents lorsqu'il existe une transversale complète T pour \mathcal{F} , une transversale complète T' pour \mathcal{F}' et un biholomorphisme $\mathcal{H} : T \rightarrow T'$ tels que \mathcal{H} conjugue les générateurs des pseudo-groupes tels que décrits ci-dessus.*

L'équivalence des pseudo-groupes d'holonomie correspond intuitivement à l'équivalence analytique des espaces de feuilles.

Le pseudo-groupe d'holonomie est un objet difficile à appréhender ; aussi définit-on un pseudo-groupe plus accessible ne retenant que l'information transverse du pseudo-groupe d'holonomie : on considère un système de submersions $\{H_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{C}\}_{i \in I}$ définissant localement le feuilletage où $\{U_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement de la partie régulière du feuilletage. La réunion disjointe $T = \coprod_{i \in I} V_i$ est le support du pseudo-groupe engendré par les applications de transitions, c'est-à-dire les applications ψ_{ij} telles que sur $U_i \cap U_j$, l'égalité suivante soit vérifiée

$$\psi_{ij} \circ H_i = H_j.$$

Ce pseudo-groupe est appelé *pseudo-groupe transverse* du feuilletage.

Un résultat dû à A.L. Neto couplé aux travaux de J.-C Yoccoz et R. Pérez-Marco [35] assure qu'il est possible de réaliser la donnée *a priori* de « tout pseudo-groupe transverse » par un feuilletage de \mathbb{C}^2 . Son énoncé étant assez conséquent, nous en donnons ici une version concise et donc nécessairement incomplète. Nous renvoyons à [19] ou à [22] pour toute précision :

Théorème 1.2.1 (A.L. Neto [19]). *Il existe un feuilletage holomorphe de \mathbb{C}^2 à arbre dual de réduction, à composantes dicritiques et à pseudo-groupe transverse prescrits.*

I.3 Déformation isoholonomique.

La notion de déformation isoholonomique est centrale dans cette thèse. Elle permet de déformer un feuilletage sans toucher aux invariants *basiques* que sont la réduction et le pseudo-groupe d'holonomie. L'interprétation cohomologique des déformations isoholonomiques examinée dans [27] est présentée ici. Elle contourne la difficulté liée à l'absence de méthode constructive produisant des déformations isoholonomiques non-triviales.

I.3.1 Définitions.

Soit K un compact de \mathbb{C}^p . Nous appelons ici *déformation intégrable de base K* la donnée d'un germe de feuilletage \mathcal{F}_K de codimension 1 dans $(\mathbb{C}^{2+p}, \{0\} \times K)$ le long de $\{0\} \times K$ de lieu singulier $\{0\} \times K$ tel que les feuilles de \mathcal{F}_K soient transverses aux fibres de π

$$\pi : (\mathbb{C}^{2+p}, \{0\} \times K) \rightarrow (\mathbb{C}^p, K), \quad \pi(x, t) = t.$$

De façon équivalente, c'est la donnée d'un germe de 1-forme holomorphe au voisinage de $\{0\} \times K$

$$\Omega(x, y, t) = a(x, y, t)dx + b(x, y, t)dy + \sum_{i=1}^p c(x, y, t)dt_i$$

où $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, $t = (t_1, \dots, t_p)$ telle que

1. a, b et c_1, \dots, c_p sont des germes de fonctions holomorphes aux voisinages de $\{0\} \times K$,
2. Ω est intégrable, i.e. $\Omega \wedge d\Omega \equiv 0$
3. $\{a = 0, b = 0, c_1 = 0, \dots, c_p = 0\} = \{0\} \times K$,
4. (c_1, \dots, c_p) est un sous-idéal de $\sqrt{(a, b)}$.

Cette dernière condition correspond à la transversalité des feuilles et des fibres.

Deux déformations intégrables \mathcal{F}_K et \mathcal{F}'_K de base K sont dites *conjuguées* lorsqu'il existe un germe d'automorphisme Φ de $(\mathbb{C}^{2+p}, \{0\} \times K)$ vérifiant

$$\Phi^* \mathcal{F}_K = \mathcal{F}'_K \quad \text{et} \quad \pi \Phi = \pi.$$

On notera, de manière abrégée,

$$\mathcal{F}_K \simeq \mathcal{F}'_K.$$

Le feuilletage produit $\mathcal{F} \times (\mathbb{C}^p, K)$ au voisinage de $\{0\} \times K$ où \mathcal{F} est un feuilletage au voisinage de 0 dans \mathbb{C}^2 est appelé *déformation triviale de base K de \mathcal{F}* . Une déformation est dite *holomorphiquement (resp. C^k) triviale* si elle est holomorphiquement (resp. C^k) conjuguée à une déformation triviale.

L'équiréductibilité d'une déformation intégrable correspond à l'existence d'une réduction des singularités en *famille* pour les feuilletages $\mathcal{F}|_{\pi^{-1}(t)}$, $t \in K$; précisément, on adopte la définition suivante :

Définition I.3.1. *La déformation \mathcal{F}_K est dite équisingulière s'il existe une suite d'éclatements $E_K^i : \mathcal{M}_K^i \rightarrow \mathcal{M}_K^{i-1}$ telle que*

1. le morphisme E_K^i est un éclatement de centre $C_K^{i-1} \subset \mathcal{M}_K^{i-1}$ lisse et de codimension 2 .
2. Notons $E_{i,K} := E_K^1 \circ \dots \circ E_K^i$, $\mathcal{D}_K^i := E_{i,K}^{-1}(K)$ et $\pi_i := \pi \circ E_{i,K}$. Le lieu singulier du feuilletage $E_{i,K}^*(\mathcal{F}_K)$ est lisse et étale au-dessus de K via π_i , c'est-à-dire π_i induit un isomorphisme entre chaque composante connexe de $\text{Sing}(E_{i,K}^*(\mathcal{F}_K))$ et K ,

$$\text{Sing}(E_{i,K}^*(\mathcal{F}_K)) \xrightarrow{\pi_i} K \times H^0(\text{Sing}(E_{i,K}^*(\mathcal{F}_K))).$$

3. Les feuilletages $E_{i,K}^* \mathcal{F}_K$ sont transverses aux fibres de π_i en tout point régulier.
4. Pour tout $t \in K$, la succession d'éclatements obtenue par restriction de chaque $E_{i,K}$ aux fibres de π_i et π_{i-1} est exactement la succession d'éclatements du processus de réduction du feuilletage fibre $i_t^* \mathcal{F}_K$ où i_t désigne le plongement $i_t(x) = (x, t)$, $x \in \mathbb{C}^2$.

Deux feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont reliés par déformations intégrables équisingulières lorsqu'il existe une famille finie de déformations intégrables équisingulières $\mathcal{F}^i, 1 \leq i \leq N$ de base $\overline{\mathbb{D}}$ telle que

1. $\mathcal{F}^1|_{-1 \in \overline{\mathbb{D}}} \simeq \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^N|_{1 \in \overline{\mathbb{D}}} \simeq \mathcal{F}'$,
2. pour tout $1 \leq i \leq N-1$, $\mathcal{F}^i|_{1 \in \overline{\mathbb{D}}} \simeq \mathcal{F}^{i+1}|_{-1 \in \overline{\mathbb{D}}}$.

1.3.2 Cohomologie et isoholonomie des déformations intégrables équisingulières.

Comme déjà évoqué, en dehors de certains cas particuliers, il n'existe pas de méthode constructive systématique pour obtenir une déformation intégrable équisingulière d'une 1-forme qui ne soit pas analytiquement triviale. Par exemple, étant donnée une 1-forme ω holomorphe à l'origine de \mathbb{C}^2 , on ne sait pas décrire l'espace des germes de fonctions c telles qu'il existe une déformation intégrable équisingulière s'écrivant

$$\Omega = \omega + cdt + \dots .$$

Cet inconvénient nous amène à décrire nos déformations par un moyen détourné : la cohomologie. Le cas du compact $K = \{0\} \in \mathbb{C}^p$ correspondant aux germes de *déploiements équisinguliers* a été étudié dans [27]. Soit $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ le faisceau en groupes de base \mathcal{D} dont la fibre est le groupe des germes d'automorphismes de $\mathcal{M} \times (\mathbb{C}^p, 0)$ vérifiant :

1. $\phi|_{\mathcal{D} \times \{0\}} = \text{Id}_{\mathcal{D} \times \{0\}}$,
2. ϕ est un germe d'automorphisme local de la déformation triviale de $\mathcal{F} \times (\mathbb{C}^p, 0)$ qui laisse invariante chaque feuille locale.

Théorème 1.3.1 (J.F.Mattei[27]).

1. Tout germe de déformation intégrable équisingulière d'un germe de feuilletage réduit est holomorphiquement trivial.
2. Tout germe de déformation intégrable équisingulière d'un germe de feuilletage est \mathcal{C}^∞ trivial.
3. L'espace des modules de germes de déformations intégrables équisingulières de base $(\mathbb{C}^p, 0)$ du feuilletage \mathcal{F} est en bijection avec $H^1(\mathcal{D}, \mathcal{G}_{\mathcal{F}})$.

Comme les sections du faisceau $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ laissent invariante la feuille locale, la famille de feuilletages $i_t^* \mathcal{F}_K$ admet des pseudo-groupes transverses et pseudo-groupes d'holonomies équivalents. Pour une classe générique de germes de feuilletages singuliers, cette propriété semble caractériser ces déformations. Pour cette raison, nous adoptons le vocabulaire suivant :

Définition I.3.2. *Nous appelons **déformation isoholonomique** toute déformation intégrable et équisingulière de germe de feuilletage.*

Cette définition est pertinente dans la mesure où, pour un feuilletage générique, toute déformation isoholonomique au sens usuel et équisingulière doit être intégrable.

L'interprétation cohomologique pour les déformations isoholonomiques à espace de paramètres compacts persiste dès lors que l'on considère des déformations qui laissent invariante la classe analytique du diviseur, autrement dit qui *ne touchent pas à la position des singularités*. Soit $\mathcal{G}_{\mathcal{F} \times K}$ le faisceau en groupes de base $\mathcal{D} \times K$ dont la fibre est le groupe des germes d'automorphismes de $\mathcal{M} \times (\mathbb{C}^p, K)$ vérifiant :

1. $\phi|_{\mathcal{D} \times K} = \text{Id}_{\mathcal{D} \times K}$,
2. ϕ est un germe d'automorphisme local de la déformation triviale de $\mathcal{F} \times (\mathbb{C}^p, K)$ qui laisse invariante chaque feuille.

En calquant les arguments de la preuve de I.3.1, on montre le résultat suivant :

Théorème I.3.2. *L'espace des modules de déformations isoholonomiques de base K à diviseur constant du feuilletage \mathcal{F} est en bijection avec $H^1(\mathcal{D} \times K, \mathcal{G}_{\mathcal{F} \times K})$*

En dehors de ces deux cas, l'interprétation cohomologique n'est pas cohérente. Néanmoins, de façon générale, une variété \mathcal{M} feuilletée par un feuilletage \mathcal{F} au voisinage d'une sous-variété \mathcal{D} donne naissance à trois faisceaux en groupes de base \mathcal{D} : le faisceau $\text{Aut}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M})$ des germes d'automorphismes locaux de \mathcal{M} qui sont l'identité en restriction au sous-espace \mathcal{D} , $\text{Aut}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F})$ le sous-faisceau des automorphismes préservant le feuilletage et $\text{Fix}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F})$ le sous-faisceau des automorphismes préservant chaque feuille locale. Un 1-cocycle $(\phi_{ss'})$ appartenant à $Z^1(\mathcal{U}_s, \text{Aut}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}))$ définit une variété *modélée* sur \mathcal{M} au voisinage de \mathcal{D} par recollement

$$\mathcal{D}' \subset \mathcal{M}' = \coprod \mathcal{U}_s / \phi_{ss'} .$$

Si le cocycle est cohomologue à un cocycle de $\text{Fix}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F})$ alors \mathcal{M}' admet un feuilletage fibre d'une déformation isoholonomique de \mathcal{F} . Cette remarque est à l'origine de la construction présentée dans les chapitres suivants.

I.3.3 Marquage d'une déformation isoholonomique.

Par trivialité \mathcal{C}^∞ , le marquage d'un feuilletage fibre d'une déformation isoholonomique induit un marquage de tous les feuilletages fibres de cette déformation. Aussi, est-il cohérent de définir *le marquage d'une déformation isoholonomique* comme le marquage d'un de ces feuilletages fibres.

L'intérêt de la notion de déformation isoholonomique marquée est illustré par l'exemple suivant : considérons un feuilletage de type courbe généralisée \mathcal{F} dont les séparatrices admettent pour équation

$$(x^2 - y^3)(x^3 - y^2) = 0.$$

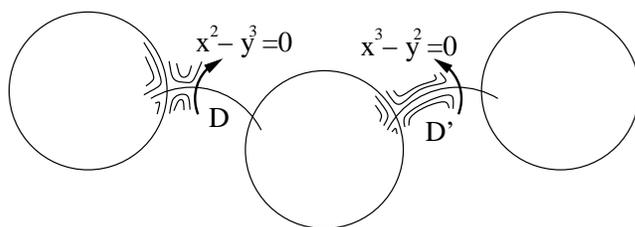


FIG. I.2 – Arbre de réduction du double-cusp.

Le marquage permet de formaliser la question intuitive suivante : existe-t-il une déformation qui échange les deux composantes irréductibles des séparatrices ? Dans le formalisme du marquage, ce problème s'énonce ainsi : soit \mathcal{F}_1 le feuilletage \mathcal{F} marqué trivialement par lui-même et \mathcal{F}_2 le feuilletage \mathcal{F} où le marquage permute les séparatrices ; \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont-ils les feuilletages fibres d'une déformation isoholonomique marquée ? Lorsque \mathcal{F} est le feuilletage admettant l'intégrale première holomorphe

$$(x^2 - y^3)(x^3 - y^2)$$

la réponse est définitivement positive, la déformation étant réalisée par une isotopie reliant les applications identité et $(x, y) \mapsto (y, x)$ dans $\text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$. Pour un feuilletage de type courbe généralisée quelconque, cette construction est visiblement impossible dès que les représentations d'holonomie au-dessus des composantes D et D' de la figure (I.2) ne sont pas conjuguées, ce qui est génériquement le cas.

Chapitre II

Les catégories $\text{Col}_n(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$.

L'objectif de cette partie est de décrire une famille de sous-catégories de *la catégorie des arbres marqués* (II.1) construites à partir d'un principe de *collage* puis de démontrer un certain nombre de règles de calcul au sein de ces sous-catégories (II.3.4).

II.1 La catégorie des arbres marqués.

Nous appelons *arbre* un triplet $(\mathcal{M}, \mathcal{D}, \Sigma)$ où \mathcal{M} est un germe de variété holomorphe de dimension deux voisinage tubulaire d'une hypersurface fermée \mathcal{D} à croisements normaux tel que chaque composante irréductible de \mathcal{D} soit biholomorphe à \mathbb{P}^1 ; Σ est un sous-ensemble fini de \mathcal{D} contenant le lieu singulier de \mathcal{D} . L'ensemble $\text{Comp}(\mathcal{D})$ désigne toujours l'ensemble des composantes irréductibles de \mathcal{D} . On appelle *matrice d'intersection de l'arbre* la matrice

$$[\mathcal{M}] = [D \cdot D']_{D, D' \in \text{Comp}(\mathcal{D})}$$

où $D \cdot D'$ désigne la multiplicité d'intersection des composantes D et D' . Cette matrice caractérise le type topologique de l'inclusion [12]

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{M}.$$

En particulier, chaque coefficient diagonal est la classe de Chern d'une composante irréductible D qui est le seul invariant topologique et même holomorphe du plongement $D \subset \mathcal{M}$.

Soit $(\mathcal{M}_0^h, \mathcal{D}_0^h, \Sigma_0^h)$ l'arbre cime d'un processus d'éclatements. Une *indexation* de $(\mathcal{M}, \mathcal{D}, \Sigma)$ par $(\mathcal{M}_0^h, \mathcal{D}_0^h, \Sigma_0^h)$ est la donnée de deux bijections

$$\sigma : \Sigma_0^h \xrightarrow{\sim} \Sigma, \quad \kappa : \text{Comp}(\mathcal{D}_0^h) \xrightarrow{\sim} \text{Comp}(\mathcal{D})$$

telles que pour toute composante irréductible D de \mathcal{D}_0^h , la relation de compatibilité suivante est satisfaite

$$\sigma(D \cap \Sigma_0^h) = \kappa(D) \cap \Sigma.$$

Définition II.1.1. *Un marquage de $(\mathcal{M}, \mathcal{D}, \Sigma)$ par $(\mathcal{M}_0^h, \mathcal{D}_0^h, \Sigma_0^h)$ est une indexation (σ, κ) de $(\mathcal{M}, \mathcal{D}, \Sigma)$ par $(\mathcal{M}_0^h, \mathcal{D}_0^h, \Sigma_0^h)$ telle que κ conjugue les matrices d'intersection des arbres :*

$$[\kappa(D) \cdot \kappa(D')]_{D, D' \in \text{Comp}(\mathcal{D}_0^h)} = [\mathcal{M}_0^h]$$

En particulier, l'arbre cime du processus de réduction d'un feuilletage marqué hérite naturellement d'un marquage : il suffit d'oublier la donnée du système complet de lacets dans le marquage du feuilletage.

On dit que deux arbres $(\mathcal{M}, \mathcal{D}, \Sigma)$ et $(\mathcal{N}, \mathcal{E}, \Delta)$ de marquages respectifs (σ, κ) et (ρ, θ) sont *conjugués* s'il existe un germe H de biholomorphisme défini au voisinage de \mathcal{D} vérifiant :

1. $H(\mathcal{D}) = \mathcal{E} \quad H(\Sigma) = \Delta$
2. $H^*\sigma = \rho \quad H^*\kappa = \theta$

La condition (2) traduit *la compatibilité de la conjugaison* aux marquages. La notation

$$\mathfrak{A}(\mathcal{M}_0^h, \mathcal{D}_0^h, \Sigma_0^h)$$

désigne la catégorie des arbres marqués par $(\mathcal{M}_0^h, \mathcal{D}_0^h, \Sigma_0^h)$ dont les flèches sont les conjugaisons d'arbres compatibles aux marquages.

Tout arbre marqué par l'arbre cime d'un processus d'éclatements est en fait lui-même l'arbre cime d'un processus d'éclatements. Précisément, on dispose de la proposition suivante :

Proposition II.1.1. *Soit $(\mathcal{M}, \mathcal{D}, \Sigma)$ un arbre marqué par la cime d'un processus d'éclatements $(\mathcal{M}_0^h, \mathcal{D}_0^h, \Sigma_0^h)$ de marquage (σ, κ) . Alors il existe un processus d'éclatements*

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{N}^h & \xrightarrow{E^h} & \dots & \mathcal{N}^j & \xrightarrow{E^j} & \dots & \xrightarrow{E^1} & \mathcal{N}^0 \\ \cup & & & \cup & & & & \cup \\ \Delta^h & \rightarrow & \dots & \Delta^j & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \Delta^0 \\ \cup & & & \cup & & & & \cup \\ C^h & \rightarrow & \dots & C^j & \rightarrow & \dots & \rightarrow & C^0 \end{array}$$

et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{M} = \mathcal{M}^h & \xrightarrow{F^h} & \dots & \mathcal{M}^j & \xrightarrow{F^j} & \dots & \xrightarrow{F^1} & \mathcal{M}^0 \\ \cup & & & \cup & & & & \cup \\ \Sigma = \Sigma^h & \rightarrow & \dots & \Sigma^j & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \Sigma^0 \\ \cup & & & \cup & & & & \cup \\ S^h & \rightarrow & \dots & S^j & \rightarrow & \dots & \rightarrow & S^0 \end{array}$$

tels que pour tout $j = 1, \dots, h$, le triplet $(\mathcal{M}^j, \mathcal{D}^j, \Sigma^j)$ est un arbre marqué conjugué à l'arbre $(\mathcal{N}^j, \mathcal{E}^j, \Delta^j)$ muni d'un marquage ad hoc.

Démonstration: La démonstration est une récurrence sur la hauteur h de l'arbre. Supposons $h = 1$. La variété \mathcal{M} est alors le voisinage d'un diviseur \mathcal{D} plongé biholomorphe à \mathbb{P}^1 avec $\mathcal{D}^2 = -1$. D'après le théorème de Grauert [3], le germe \mathcal{M} est, au voisinage de \mathcal{D} , biholomorphe à la variété \mathcal{N}^1 obtenue par éclatement standard de l'origine dans un voisinage de \mathbb{C}^2 . Notons

Θ un biholomorphisme entre \mathcal{M} et \mathcal{N}^1 , $\Sigma^1 = \Theta(\Sigma)$ et $(\sigma^1, \kappa^1) = (\Theta^*\sigma, \Theta^*\kappa)$. L'arbre marqué $(\mathcal{N}^1, \mathcal{D}^1, \Sigma^1)$ de marquage (σ^1, κ^1) est alors conjugué à $(\mathcal{M}, \mathcal{D}, \Sigma)$.

Supposons $h > 1$. Soit $\{D_i\}_{i=1\dots m}$ la famille des composantes de \mathcal{D} telles que $D_i^2 = -1$. Comme pour l'initialisation, le théorème de Grauert assure que \mathcal{M} est biholomorphe à la variété obtenue par l'éclatement simultané d'une famille de points $\{s_i\}_{i=1\dots m}$ sur un arbre $(\mathcal{M}', \mathcal{D}', \Sigma')$ marqué par $(\mathcal{M}_0^{h-1}, \mathcal{D}_0^{h-1}, \Sigma_0^{h-1})$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un biholomorphisme Θ compatible aux marquages entre $(\mathcal{M}', \mathcal{D}', \Sigma')$ et la cime d'un processus d'éclatements $(\mathcal{N}^{h-1}, \mathcal{D}^{h-1}, \Sigma^{h-1})$. L'arbre cime du processus d'éclatements obtenu au-dessus de \mathcal{N}^{h-1} en éclatant simultanément les points $\{\Theta(s_i)\}_{i=1\dots m}$ est un arbre marqué conjugué à $(\mathcal{M}, \mathcal{D}, \Sigma)$. □

La proposition (II.1.1) permet de prolonger naturellement à la catégorie des arbres marqués la plupart des invariants basiques associés à un processus d'éclatements. On peut, par exemple, parler de la hauteur d'un arbre marqué. Nous allons utiliser cette remarque pour définir la *multiplicité* d'une composante irréductible du diviseur d'un arbre.

On note \mathcal{O} le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur \mathcal{M}_0^h . Soit $i_{\mathcal{D}_0^h}$ l'inclusion du diviseur \mathcal{D}_0^h dans son voisinage \mathcal{M}_0^h . Nous posons

$$\mathcal{O}_{\mathcal{M}_0^h} = i_{\mathcal{D}_0^h}^{-1}(\mathcal{O}).$$

Le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_0^h}$ est obtenu par restriction du faisceau \mathcal{O} au-dessus diviseur. Soit D une composante irréductible du diviseur. Nous notons

$$I_D \subset \mathcal{O}_{\mathcal{M}_0^h}$$

le sous-faisceau en idéaux des germes de fonctions nulles le long de la composante D . Considérons le sous-faisceau $\mathfrak{M} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{M}_0^h}$ image réciproque de l'idéal maximal en $0 \in \mathbb{C}^2$ par le morphisme total E_h . Le faisceau \mathfrak{M} est localement libre de rang 1 engendré par deux sections globales. De plus, il admet une décomposition selon les puissances des faisceaux I_D . Précisément, on dispose d'une relation

$$\mathfrak{M} = \prod_{D \in \text{Comp}(\mathcal{D})} I_D^{\nu(D)}, \quad \nu(D) \in \mathbb{N}^*.$$

L'entier $\nu(D)$ est appelé *multiplicité de la composante* D . Il est entièrement déterminé par la matrice d'intersection de l'arbre. Si $(\mathcal{M}, \mathcal{D}, \Sigma)$ est un arbre marqué par l'arbre $(\mathcal{M}_0, \mathcal{D}_0^h, \Sigma_0^h)$ et D une composante de \mathcal{D} , la multiplicité de D sera alors naturellement définie comme la multiplicité de la composante dans \mathcal{D}_0^h correspondante par l'indexation.

II.2 Les faisceaux \mathcal{G}_Z^n , $n \geq 0$.

Pour définir les sous-catégories de $\mathfrak{A}(\mathcal{M}_0, \mathcal{D}_0, \Sigma_0)$ qui nous intéressent, nous introduisons une famille de faisceaux en groupes de base \mathcal{D} dont l'intérêt sera illustré par la propriété clé (II.2.1).

Pour contourner une difficulté certes technique mais inhérente à la stratégie finale d'induction (III.2.3), l'arbre est enrichi de la donnée d'une *croix* : soit $(\mathcal{M}, \mathcal{D}, \Sigma)$ un arbre et $(\mathcal{N}^h, \mathcal{E}^h, \Delta^h)$ l'arbre cime d'un processus d'éclatements conjugué à $(\mathcal{M}, \mathcal{D}, \Sigma)$ donné par la proposition (II.1.1). Définissons l'application E par $E := \phi \circ E_h$ où E_h est le morphisme total du processus aboutissant à \mathcal{N}^h et ϕ une conjugaison entre \mathcal{N}^h et \mathcal{M} .

Définition II.2.1 (Germe de croix). *Un germe de croix sur \mathcal{M} est la transformée stricte E^*Z d'un germe de courbe lisse $Z = \{Z_1\}$ ou d'une paire de germes de courbes lisses transverses $Z = \{Z_1, Z_2\}$ à l'origine de \mathbb{C}^2 . Les points de $E^*Z \cap \mathcal{D}$ sont appelés les points d'attache de la croix.*

Désormais, on fixe un arbre marqué $(\mathcal{M}, \mathcal{D}, \Sigma)$ dans la catégorie $\mathfrak{A}(\mathcal{M}_0, \mathcal{D}_0, \Sigma_0)$ et une croix Z sur cet arbre.

La croix se relève sur l'arbre en deux germes de courbes lisses en deux points distincts. Tout système de coordonnées à l'origine de \mathbb{C}^2 induit une famille de systèmes de coordonnées algébriques canoniques sur des ouverts *ad hoc* du diviseur le recouvrant entièrement. Le lemme suivant est obtenu en utilisant ces systèmes algébriques de coordonnées associés à un système de coordonnées qui redresse, à l'origine de \mathbb{C}^2 , la croix sur les axes.

Lemme II.2.1. *Les points d'attache de la croix sont des points réguliers sur des composantes de multiplicité 1 de \mathcal{D} . De plus, il existe des coordonnées dans \mathcal{M} , (x_1, y_1) et (x_2, y_2) aux voisinages respectifs des points d'attache de la croix telles que*

- $\{y_1 = 0\}$ et $\{x_2 = 0\}$ sont des équations locales de la croix dans \mathcal{M} ;
- l'application E s'écrit

$$E(x_1, y_1) = (x_1, y_1 x_1^{N_1}) \quad \text{et} \quad E(x_2, y_2) = (x_2 y_2^{N_2}, y_2)$$

où N_1 et N_2 sont des entiers strictement positifs.

À plusieurs reprises, nous aurons besoin de décrire en coordonnées les objets que nous manipulons. A cet effet, nous parlerons ici de *coordonnées locales adaptées* (x, y) dans les cas suivants :

- au voisinage d'un point régulier c du diviseur, $\{x = 0\}$ est une équation locale de \mathcal{D} et $x(c) = y(c) = 0$;
- au voisinage d'un point singulier s de \mathcal{D} , $\{xy = 0\}$ est une équation locale de \mathcal{D} et $x(s) = y(s) = 0$;
- au voisinage d'un point d'attache z de la croix, $\{x = 0\}$ est une équation locale de \mathcal{D} et $\{y = 0\}$ une équation locale de Z .

Considérons $\text{Aut}(\mathcal{M}, Z)$ le faisceau en groupes de base \mathcal{D} des germes Φ d'automorphismes de \mathcal{M} définis au voisinage de \mathcal{D} et qui vérifient

$$\Phi|_{\mathcal{D}} = \text{Id} \quad \text{et} \quad \Phi|_Z = \text{Id}.$$

Examinons l'écriture des sections de $\text{Aut}(\mathcal{M}, Z)$. Au voisinage d'un point régulier c de $\mathcal{D} \cup Z$ et dans un système de coordonnées locales adaptées (x, y) , la fibre $\text{Aut}(\mathcal{M}, Z)_c$ est l'ensemble des germes d'automorphismes de la forme

$$(x, y) \mapsto (x(\alpha + A), y + xB),$$

où A et B appartiennent à $\mathbb{C}\{x, y\}$, $A(0, 0) = 0$ et $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

En un point singulier s de $\mathcal{D} \cup Z$ et dans un système de coordonnées adaptées (x, y) , l'expression des éléments de $\text{Aut}(\mathcal{M}, Z)_s$ est

$$(x, y) \mapsto (x(1 + yA), y(1 + xB))$$

où A et B appartiennent à $\mathbb{C}\{x, y\}$.

Au cours de ce travail, nous serons naturellement amenés à considérer les voisinages infinitésimaux du diviseur dans son arbre. Pour prendre en compte la présence de la croix, nous considérons la filtration $\{\mathfrak{M}_Z^n\}_{n \geq 1}$ du faisceau \mathcal{O}_M définie par

$$\mathfrak{M}_Z^n := I_Z \cdot \mathfrak{M}^n, \quad n \geq 1,$$

où I_Z désigne le sous-faisceau de \mathcal{O}_M des fonctions nulles le long de Z . Nous notons de même \mathfrak{I} et \mathfrak{I}_Z les sous-faisceaux de \mathcal{O}_M définis par

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} &:= \prod_{D \in \text{Comp}(\mathcal{D})} I_D, \\ \mathfrak{I}_Z &:= I_Z \cdot \mathfrak{I}. \end{aligned}$$

Considérons le diagramme d'éclatements aboutissant à \mathcal{M} donné par la proposition (II.1.1)

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^h \xrightarrow{E^h} \dots \mathcal{M}^j \xrightarrow{E^j} \dots \xrightarrow{E^1} \mathcal{M}^0.$$

Définition II.2.2 (Arbres infinitésimaux munis d'une croix). *Nous appelons $j^{\text{ième}}$ arbre infinitésimal d'ordre $n \geq 1$, l'espace analytique suivant*

$$\mathcal{M}^{j[n], Z} := (\mathcal{D}^j, \mathcal{O}_{\mathcal{M}^j} / \mathfrak{M}_Z^n), \quad 1 \leq j \leq h.$$

Le voisinage d'ordre 0 est l'espace analytique

$$\mathcal{M}^{j[0], Z} := (\mathcal{D}^j, \mathcal{O}_{\mathcal{M}^j} / \mathfrak{I}_Z).$$

Nous considérons aussi les espaces annelés suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{j\mathbb{Q}, Z} &:= (\mathcal{D}^j, \mathfrak{I}_Z / \mathfrak{I}_Z \mathfrak{M}_Z^n) \quad \text{et} \\ \mathcal{M}^{j\mathbb{Q}, Z} &:= (\mathcal{D}^j, \mathfrak{I}_Z / \mathfrak{I}_Z^2). \end{aligned}$$

Les applications du diagramme de la proposition (II.1.1) se factorisent en morphismes d'espaces analytiques et l'on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{M}^{h[n],Z} & \xrightarrow{E^h} & \dots & \xrightarrow{E^{j+1}} & \mathcal{M}^{j[n],Z} & \xrightarrow{E^j} & \dots & \xrightarrow{E^1} & \mathcal{M}^{0[n],Z} \\ \bigcup & & \rightarrow & & \bigcup & & \rightarrow & & \bigcup \\ \Sigma^h & & \rightarrow & & \Sigma^j & & \rightarrow & & \Sigma^0 \\ \bigcup & & \rightarrow & & \bigcup & & \rightarrow & & \bigcup \\ S^h & & \rightarrow & & S^j & & \rightarrow & & S^0 \end{array} .$$

Par ailleurs, la suite de plongements canoniques

$$\dots \mathcal{M}^{[p],Z} \hookrightarrow \mathcal{M}^{[p-1],Z} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathcal{M}^{[1],Z} \hookrightarrow \mathcal{M}^{[0],Z} \hookrightarrow \mathcal{M}$$

induit une filtration naturelle du faisceau $\text{Aut}(\mathcal{M}, Z)$:

Définition II.2.3. On note $\text{Aut}_n(\mathcal{M}, Z)$ le sous-faisceau de $\text{Aut}(\mathcal{M}, Z)$ des germes d'automorphismes qui coïncident avec l'identité en restriction au voisinage infinitésimal d'ordre n .

Maintenant, la suite d'inclusions distinguées

$$\dots \triangleleft \text{Aut}_p(\mathcal{M}, Z) \triangleleft \text{Aut}_{p-1}(\mathcal{M}, Z) \triangleleft \dots \triangleleft \text{Aut}_0(\mathcal{M}, Z) \triangleleft \text{Aut}(\mathcal{M}, Z)$$

suggère qu'il est possible de définir, comme en une variable, une application *partie principale* pour la filtration

$$\{\text{Aut}_n(\mathcal{M}, Z)\}_{n \geq 0} .$$

Pour cela, nous allons examiner l'écriture en coordonnées des germes de sections de $\text{Aut}_n(\mathcal{M}, Z)$.

En un point régulier c du diviseur : soit p la multiplicité de la composante contenant c . Dans un système (x, y) adaptées, les éléments de $\text{Aut}_n(\mathcal{M}, Z)_c$ s'écrivent

$$\phi(x, y) = (x + x^{pn} A, y + x^{pn} B)$$

où A et B appartiennent à $\mathbb{C}\{x, y\}$. Nous définissons alors l'application dont l'écriture est

$$\phi \in \text{Aut}_n(\mathcal{M}, Z)_c \xrightarrow{\mathcal{J}_n} x^{pn-1} A(x, y) \in (\mathcal{O}_{\mathcal{M}^{[n],Z}})_c .$$

On vérifie que cette application est un morphisme de groupes qui ne dépend pas des coordonnées choisies.

En un point singulier s de \mathcal{D} : on note p et q les multiplicités des composantes locales. Les éléments de $\text{Aut}^n(\mathcal{M}, Z)_s$ s'écrivent

$$\phi(x, y) = (x + x^{pn} y^{qn} A, y + x^{pn} y^{qn} B) .$$

Nous définissons, de même, un morphisme intrinsèque de groupes par

$$\phi \in \text{Aut}_n(\mathcal{M}, Z)_s \xrightarrow{\mathcal{J}_n} x^{pn-1} y^{qn-1} (yA(x, y) + xB(x, y)) \in (\mathcal{O}_{\mathcal{M}^{[n],Z}})_s .$$

En un point d'attache z de Z : l'écriture des éléments de $\text{Aut}_n(\mathcal{M}, Z)_z$ est

$$\phi(x, y) = (x + x^{pn} y A, y + x^{pn} y B)$$

et le morphisme est défini par

$$\phi \in \text{Aut}_n(\mathcal{M}, Z)_z \xrightarrow{\mathcal{J}_n} x^{pn-1} (yA(x, y) + xB(x, y)) \in (\mathcal{O}_{\mathcal{M}^{[n], Z}})_z.$$

La description locale des sections de $\text{Aut}_n(\mathcal{M}, Z)$ met ainsi en évidence un morphisme de faisceaux en groupes $\text{Aut}_n(\mathcal{M}, Z) \xrightarrow{\mathcal{J}_n} \mathcal{O}_{\mathcal{M}^{[n], Z}}$. On dispose, de même, d'un morphisme de faisceaux en groupes

$$\text{Aut}_0(\mathcal{M}, Z) \xrightarrow{\mathcal{J}_0} \mathcal{O}_{\mathcal{M}^{[0], Z}}.$$

Définition II.2.4. On note \mathcal{G}_Z^n le sous-faisceau en groupes de $\text{Aut}_n(\mathcal{M}, Z)$ noyau du morphisme de faisceaux \mathcal{J}_n .

Visiblement au voisinage d'un point singulier de \mathcal{D} dont les composantes locales sont de multiplicité p et q , les germes de sections de \mathcal{G}_Z^n , $n \geq 1$ sont de la forme

$$(x, y) \longmapsto (x + x^{pn+1}y^{qn}A, y + x^{pn}y^{qn+1}B)$$

et pour le faisceau \mathcal{G}_Z^0 , de la forme

$$(x, y) \longmapsto (x + x^2yA, y + xy^2B).$$

En outre, l'action des sections de $\text{Aut}(\mathcal{M}, Z)$ sur les voisinages infinitésimaux induit une caractérisation intrinsèque des germes de sections du faisceau \mathcal{G}_Z^n :

Lemme II.2.2. Soit ϕ un germe de section de $\text{Aut}(\mathcal{M}, Z)$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. ϕ est une section de \mathcal{G}_Z^n .
2. ϕ est l'identité en restriction à l'espace analytique $\mathcal{M}^{[n], Z}$ et à l'espace annelé $\mathcal{M}^{\mathbb{N}, Z}$.

Démonstration: Nous effectuons la démonstration pour le cas d'un point singulier du diviseur ; dans les autres cas, la preuve est sensiblement similaire. Soit donc s un point singulier de \mathcal{D} et p et q les multiplicités des composantes locales de \mathcal{D} . Soit ϕ vérifiant (2). Comme ϕ est l'identité en restriction à l'espace $\mathcal{M}^{[n], Z}$, il admet en coordonnées adaptées l'écriture

$$(x, y) \mapsto (x + x^{pn}y^{qn}A, y + x^{pn}y^{qn}B).$$

En évaluant le co-morphisme de $\mathcal{M}^{\mathbb{N}, Z}$ induit par ϕ sur la fonction xy , il vient

$$(x + x^{pn}y^{qn}A)(y + x^{pn}y^{qn}B) \equiv xy \quad [\mathfrak{J}_Z \mathfrak{M}_Z^n]$$

d'où l'on tire que xy divise $yA + xB$. Ainsi x et y divisent respectivement A et B . Le germe d'automorphisme $(x, y) \rightarrow (x + x^{pn+1}y^{qn}\frac{A}{x}, y + x^{pn}y^{qn+1}\frac{B}{y})$ est une section de \mathcal{G}_Z^n .

□

De manière générale, si X est un champ de vecteurs holomorphe singulier en $0 \in \mathbb{C}^2$ alors le flot de X est défini au voisinage de 0 pour n'importe quel temps pourvu que l'on réduise le domaine de définition ; en particulier, X induit un semi-groupe

$$t \in \mathbb{C} \longmapsto e^{(t)X} \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0).$$

Cette remarque triviale rend cohérent l'énoncé de la propriété qui suit. Celle-ci illustre *a posteriori* la pertinence des faisceaux \mathcal{G}_n^Z ; ces faisceaux sont les groupes de Lie associés à certaines algèbres de Lie naturelles dans notre contexte :

Propriété II.2.1 (Propriété clé). *Soit X un germe de champ de vecteur tangent au diviseur et à la croix et f un germe de section de \mathfrak{M}_Z^n . Alors le flot du champ fX au temps 1 est un germe de section de \mathcal{G}_Z^n .*

Démonstration: À nouveau, nous ne présentons la preuve que pour un point singulier du diviseur. La propriété se lit sur une écriture du flot en coordonnées adaptées (x, y) . Étant donné le germe de champ $Y = fX$, on note $Y^{(k)}$ la puissance k -ième de Y en tant qu'opérateur différentiel sur l'anneau \mathcal{O}_2^2 :

$$Y.(g, h) = (L_Y g, L_Y h).$$

Pour x et y assez petits et $t \in [0, 1]$, le flot à l'instant t de Y se développe en

$$e^{(t)Y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Y^{(k)}(x, y).$$

Or, une récurrence sur l'entier k montre que pour tout k , il existe A_k et B_k des sections de \mathfrak{M}_Z^{n+k} telles que $Y^{(k)}(x, y) = (xA_k(x, y), yB_k(x, y))$. Ainsi, au temps 1, le flot s'écrit

$$(x, y) \longmapsto (x, y) + x^{pn} y^{qn} (xA, yB),$$

ce qui est l'expression d'un germe de section de \mathcal{G}_Z^n .

□

II.3 Les collages d'arbres.

Equipés du faisceau $\text{Aut}(\mathcal{M}, Z)$, nous introduisons une opération dite de *collage* sur des recouvrements de l'arbre \mathcal{M} permettant la construction d'une classe très particulière d'arbres marqués relative à l'arbre \mathcal{M} . Les arbres de cette classe hériteront canoniquement d'une croix et d'un marquage induits par ceux de \mathcal{M} . En particulier, toute la classe partagera le même arbre dual et la même classe analytique de diviseur pointé.

II.3.1 Les recouvrements distingués.

Nous allons d'abord construire des systèmes remarquables de recouvrements ouverts du diviseur d'un arbre dont les ouverts seront les *briques* du collage.

Soit un recouvrement de \mathcal{D} s'écrivant $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{I} = \mathbb{I}_0 \cup \mathbb{I}_1}$ constitué de deux types d'ouverts :

- si i appartient à \mathbb{I}_0 , U_i est la trace sur \mathcal{D} d'un polydisque conforme contenant un unique point singulier de \mathcal{D} .
- si i appartient à \mathbb{I}_1 , U_i est une composante irréductible de \mathcal{D} privée des points singuliers de \mathcal{D} .

Définition II.3.1. *Tout recouvrement de ce type est dit distingué lorsque*

$$\overline{U_i} \cap \overline{U_j} = \emptyset, \quad \text{pour } i, j \in \mathbb{I}_0$$

Les recouvrements distingués sont visiblement constitués d'ouverts de Stein admettant des systèmes fondamentaux de voisinages de Stein dans \mathcal{M} (voir [39]). Dans la suite, un recouvrement noté \mathcal{U} sera toujours supposé distingué. Pour un faisceau en groupes G , les notations $\mathcal{Z}^0(\mathcal{U}, G)$ et $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, G)$ désignent, de façon usuelle, l'ensemble des 0-cocycles et 1-cocycles au sens de Čech pour le faisceau G et le recouvrement \mathcal{U} . Considérons l'ensemble

$$\mathbb{I}_0 \check{\times} \mathbb{I}_1 = \{(i, j) \in \mathbb{I}_0 \times \mathbb{I}_1 \mid U_i \cap U_j \neq \emptyset\}$$

et l'ensemble des 1-cocycles *non-redondants* défini par

$$\tilde{\mathcal{Z}}^1(\mathcal{U}, G) := \prod_{(i,j) \in \mathbb{I}_0 \check{\times} \mathbb{I}_1} \mathcal{Z}^0(U_i \cap U_j, G).$$

Comme les recouvrements distingués ne présentent pas d'intersection trois à trois, $\tilde{\mathcal{Z}}^1(\mathcal{U}, G)$ et $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, G)$ sont canoniquement isomorphes.

Si aucune confusion n'est possible, la notation \mathcal{Z}^1 désigne désormais l'ensemble des cocycles non-redondants.

II.3.2 Collage.

Muni d'un recouvrement distingué, nous sommes en mesure d'opérer un collage des ouverts de ce recouvrement selon un 1-cocycle du faisceau $\text{Aut}(\mathcal{M}, Z)$. Soit (ϕ_{ij}) un 1-cocycle de $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \text{Aut}(\mathcal{M}, Z))$. Nous posons

$$\mathcal{M}[\phi_{ij}] = \prod_{i \in \mathbb{I}_0 \cup \mathbb{I}_1} U_i \Big/ (x \sim \phi_{ij} x)$$

où U_i est un voisinage de U_i dans \mathcal{M} tel que la composante ϕ_{ij} du cocycle soit un automorphisme le long de $U_i \cap U_j$. Cette construction est cohérente car, en restriction au diviseur, les composantes du cocycle coïncident avec l'identité. De plus, la variété obtenue est munie d'un plongement

$$\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{M}[\phi_{ij}] \tag{II.1}$$

dont nous notons l'image $\mathcal{D}[\phi_{ij}]$. C'est à nouveau la trivialité de l'action du cocycle le long du diviseur qui permet de définir le plongement (II.1). La variété $\mathcal{M}[\phi_{ij}]$ définit dès lors un germe de variété au voisinage de $\mathcal{D}[\phi_{ij}]$ qui est le seul objet qui nous intéresse ici. Nous le notons encore $\mathcal{M}[\phi_{ij}]$. Les diviseurs \mathcal{D} et $\mathcal{D}[\phi_{ij}]$ sont visiblement analytiquement conjugués. Le faisceau structural de $\mathcal{M}[\phi_{ij}]$ s'identifie au collage par le cocycle (ϕ_{ij}) des faisceaux restrictions du faisceau structural de \mathcal{M} à chaque ouvert du recouvrement :

$$\mathcal{O}_{\mathcal{M}[\phi_{ij}]} \simeq \coprod_{i \in \mathbb{I}_0 \cup \mathbb{I}_1} \mathcal{O}_{\mathcal{M}|_{U_i}} \Big/ (f \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}|_{U_i}} \sim f \circ \phi_{ij} \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}|_{U_j}}). \quad (\text{II.2})$$

Définition II.3.2. *Le germe de variété $\mathcal{M}[\phi_{ij}]$ au voisinage de $\mathcal{D}[\phi_{ij}]$ est appelé collage de \mathcal{M} le long de \mathcal{U} par le cocycle (ϕ_{ij}) .*

Le collage d'un arbre marqué muni d'une croix est naturellement un arbre marqué muni d'une croix : le marquage est l'image du marquage de \mathcal{M} par l'injection (II.1) et la croix est obtenue en considérant l'image de Z par l'application de passage au quotient pour la relation de collage. On obtient ainsi, un arbre $(\mathcal{M}[\phi_{ij}], \mathcal{D}[\phi_{ij}], \Sigma[\phi_{ij}])$ muni d'une croix $Z[\phi_{ij}]$ et d'un marquage $\sigma[\phi_{ij}]$. Enfin, l'image du recouvrement \mathcal{U} par l'application de passage au quotient fournit un recouvrement distingué du nouvel arbre noté $\mathcal{U}[\phi_{ij}]$.

Nous allons enrichir le collage de la donnée de morphismes sur les voisinages infinitésimaux généralisant l'injection (II.1). Supposons (ϕ_{ij}) dans la classe \mathcal{G}_Z^n . La description du faisceau structural de $\mathcal{M}[\phi_{ij}]$ (II.2) montre que l'on dispose de deux morphismes de faisceaux surjectifs

$$\mathcal{O}_{\mathcal{M}[\phi_{ij}]} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{M}^{[n],Z}} \quad \text{et} \quad (\text{II.3})$$

$$\mathcal{O}_{\mathcal{M}[\phi_{ij}]} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{M}^{\underline{n},Z}} \quad (\text{II.4})$$

définis chaque fois par l'application passage au quotient $f \rightarrow \bar{f}$. La description intrinsèque des germes de sections de \mathcal{G}_Z^n (II.2.2) assure que cette application est bien définie. Les morphismes (II.3) et (II.4) se factorisent au travers des quotients respectifs $\mathcal{O}_{\mathcal{M}[\phi_{ij}]} / \mathfrak{M}_{Z[\phi_{ij}]}^n$ et $\mathfrak{I}_{Z[\phi_{ij}]} / \mathfrak{I}_{Z[\phi_{ij}]} \mathfrak{M}_{Z[\phi_{ij}]}^n$. Ces factorisations sont des isomorphismes. Nous obtenons ainsi la propriété suivante :

Propriété II.3.1. *Notons $\mathcal{N} = \mathcal{M}[\phi_{ij}]$. Les morphismes (II.3) et (II.4) sont les co-morphismes d'espaces analytiques et d'espaces annelés notés*

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{N}}^{[n]} &: \mathcal{M}^{[n],Z} \hookrightarrow \mathcal{N} \quad \text{et} \\ \rho_{\mathcal{N}}^{\underline{n}} &: \mathcal{M}^{\underline{n},Z} \hookrightarrow \mathcal{N}. \end{aligned}$$

Ce sont des plongements d'images respectives $\mathcal{N}^{[n],Z[\phi_{ij}]}$ et $\mathcal{N}^{\underline{n},Z[\phi_{ij}]}$.

II.3.3 Les catégories $\text{Col}_n(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$.

Soit n un entier. Considérons l'arbre marqué et muni d'une croix obtenu par une succession de collages

$$\mathcal{M}[\phi_{ij}^1][\phi_{ij}^2][\dots][\phi_{ij}^p] \quad (\text{II.5})$$

où

- (ϕ_{ij}^1) appartient à $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}_Z^n)$;
- pour $k = 2, \dots, p$, (ϕ_{ij}^k) appartient $\mathcal{Z}^1\left(\mathcal{U}[\phi_{ij}^1] \cdots [\phi_{ij}^{k-1}], \mathcal{G}_{Z[\phi_{ij}^1] \cdots [\phi_{ij}^{k-1}]}^n\right)$.

On rappelle que par construction on dispose d'une inclusion de faisceaux

$$\mathcal{G}_{Z[\phi_{ij}^1] \cdots [\phi_{ij}^{k-1}]}^n \subset \text{Aut}\left(\mathcal{M}[\phi_{ij}^1] \cdots [\phi_{ij}^{k-1}], Z[\phi_{ij}^1] \cdots [\phi_{ij}^{k-1}]\right).$$

Le marquage et la croix sont construits comme pour (II.3.2) par récurrence sur l'entier p . D'après le lemme (II.3.1), on dispose de plongements canoniques obtenus par compositions successives des plongements de la propriété (II.3.1) à chaque étape du collage (II.5) :

$$\rho_{\mathcal{M}[\phi_{ij}^1][\phi_{ij}^2][\cdots][\phi_{ij}^p]}^{[n]} : \mathcal{M}^{[n], Z} \hookrightarrow \mathcal{M}[\phi_{ij}^1][\phi_{ij}^2][\cdots][\phi_{ij}^p] \quad \text{et} \quad (\text{II.6})$$

$$\rho_{\mathcal{M}[\phi_{ij}^1][\phi_{ij}^2][\cdots][\phi_{ij}^p]}^n : \mathcal{M}^{n, Z} \hookrightarrow \mathcal{M}[\phi_{ij}^1][\phi_{ij}^2][\cdots][\phi_{ij}^p] \quad (\text{II.7})$$

Définition II.3.3 (Catégorie $\text{Col}_n(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$). La catégorie $\text{Col}_n(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$ est la catégorie dont les objets sont les triplets

$$\left(\mathcal{M}[\phi_{ij}^1][\phi_{ij}^2][\cdots][\phi_{ij}^p], \rho_{\mathcal{M}[\phi_{ij}^1][\phi_{ij}^2][\cdots][\phi_{ij}^p]}^{[n]}, \rho_{\mathcal{M}[\phi_{ij}^1][\phi_{ij}^2][\cdots][\phi_{ij}^p]}^n\right)$$

constitués d'un arbre construit comme en (II.5) auquel on a adjoint les morphismes (II.6) et (II.7). Les flèches entre deux triplets dont les arbres sont

$$\mathcal{M}[\phi_{ij}^1][\phi_{ij}^2][\cdots][\phi_{ij}^p] \quad \text{et} \quad \mathcal{M}[\psi_{ij}^1][\psi_{ij}^2][\cdots][\psi_{ij}^q]$$

sont les conjugaisons d'arbres H compatibles aux marquages respectifs

$$\sigma[\phi_{ij}^1][\phi_{ij}^2][\cdots][\phi_{ij}^p] \quad \text{et} \quad \sigma[\psi_{ij}^1][\psi_{ij}^2][\cdots][\psi_{ij}^q]$$

telles que

1. H conjugue les croix,

$$H \cdot Z[\phi_{ij}^1][\phi_{ij}^2][\cdots][\phi_{ij}^p] = Z[\psi_{ij}^1][\psi_{ij}^2][\cdots][\psi_{ij}^q];$$

2. H commute aux morphismes (II.6) et (II.7),

$$H \circ \rho_{\mathcal{M}[\phi_{ij}^1][\phi_{ij}^2][\cdots][\phi_{ij}^p]}^{[n]} = \rho_{\mathcal{M}[\psi_{ij}^1][\psi_{ij}^2][\cdots][\psi_{ij}^q]}^{[n]} \quad \text{et}$$

$$H \circ \rho_{\mathcal{M}[\phi_{ij}^1][\phi_{ij}^2][\cdots][\phi_{ij}^p]}^n = \rho_{\mathcal{M}[\psi_{ij}^1][\psi_{ij}^2][\cdots][\psi_{ij}^q]}^n.$$

Si \mathcal{M} et \mathcal{N} sont isomorphes dans $\text{Col}_n(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$, on note

$$\mathcal{M} \stackrel{\text{C}_n}{\cong} \mathcal{N}.$$

Des inclusions $\mathcal{G}_Z^{k+1} \subset \mathcal{G}_Z^k$, on tire la filtration

$$\cdots \subset \text{Col}_k(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U}) \subset \text{Col}_{k-1}(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U}) \subset \cdots \subset \text{Col}_1(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U}) \subset \text{Col}_0(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U}),$$

cadre de la stratégie de récurrence que nous adoptons. De plus, toute propriété *fonctorielle* d'un arbre obtenu par collage élémentaire $\mathcal{M}[\phi_{ij}^1]$ se propage naturellement aux collages multiples $\mathcal{M}[\phi_{ij}^1][\phi_{ij}^2][\cdots][\phi_{ij}^p]$ par induction sur l'entier p .

II.3.4 Calculs dans $\text{Col}_0(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$.

Les trois propriétés énoncées ci-après permettent d'effectuer des calculs dans la catégorie de collage en manipulant les objets de la catégorie de collage par l'intermédiaire des cocycles les définissant.

Propriété II.3.2. Soit \mathcal{N} et \mathcal{P} appartenant à $\text{Col}_n(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$ définis respectivement par les 1-cocycles de collage (ρ_{ij}) et (γ_{ij}) . Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. il existe un 0-cocycle (ϕ_i) à valeurs dans \mathcal{G}_Z^n tel que $\rho_{ij} = \phi_j \gamma_{ij} \phi_i^{-1}$, c'est-à-dire

$$[\rho_{ij}] = [\gamma_{ij}] \text{ dans } H^1(\mathcal{D}, \mathcal{G}_Z^n).$$

2. \mathcal{N} et \mathcal{P} sont isomorphes dans $\text{Col}_n(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$.

Démonstration: Considérons la famille d'applications suivante

$$U_i \xrightarrow{\phi_i^{-1}} \phi_i^{-1}(U_i). \quad (\text{II.8})$$

Le recouvrement $\{U_i\}$ est un recouvrement distingué sur lequel le cocycle $\{\phi_j^{-1} \rho_{ij} \phi_i\}$ est bien défini. On peut donc considérer l'application induite par la famille (II.8) :

$$\coprod_{i \in \mathbb{I}_0 \cup \mathbb{I}_1} \mathcal{U}_i \xrightarrow{\{\phi_i^{-1}\}} \coprod_{i \in \mathbb{I}_0 \cup \mathbb{I}_1} \phi_i^{-1}(\mathcal{U}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{M}[\phi_j^{-1} \rho_{ij} \phi_i] = \mathcal{P}.$$

Par construction, cette application passe au quotient à la source pour la relation

$$x \sim \rho_{ij}(x).$$

Le quotient obtenu est par définition $\mathcal{M}[\rho_{ij}] = \mathcal{N}$ et l'application induite est visiblement un $\text{Col}_n(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$ -isomorphisme. Ce qui prouve le sens direct. L'implication réciproque résulte de la définition des catégories de collage. □

Comme les composantes des cocycles coïncident avec l'identité le long du diviseur, la famille d'applications $\{I_i : U_i \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}[\phi_{ij}]\}_{i \in \mathbb{I}}$ induit un isomorphisme canonique entre les espaces de 0-cocycles par

$$\zeta^0 : \begin{cases} \mathcal{Z}^0(\mathcal{U}, \text{Aut}(\mathcal{M}, Z)) & \longrightarrow & \mathcal{Z}^0(\mathcal{U}[\phi_{ij}], \text{Aut}(\mathcal{M}[\phi_{ij}], Z[\phi_{ij}])) \\ (\phi_i) & \longmapsto & (I_i \phi_i I_i^{-1}) \end{cases}.$$

Pour obtenir un tel isomorphisme ζ^1 pour les 1-cocycles, on observe que l'application

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{Z}}^1 &\rightarrow \tilde{\mathcal{Z}}^1[\phi_{ij}] := \prod_{(i,j) \in \mathbb{I}_0 \times \mathbb{I}_1} \mathcal{Z}^0(U_i \cap U_j[\phi_{ij}], \text{Aut}(\mathcal{M}[\phi_{ij}], Z[\phi_{ij}])) \\ (\phi_{ij}) &\mapsto (I_j \phi_{ij} I_j^{-1}) \end{aligned}$$

utilisant les espaces de 1-cocycles non-redondants est aussi un isomorphisme. La composition

$$Z^1(\mathcal{U}, \text{Aut}(\mathcal{M}, Z)) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{Z}}^1 \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{Z}}^1[\phi_{ij}] \xrightarrow{\sim} Z^1(\mathcal{U}[\phi_{ij}], \text{Aut}(\mathcal{M}[\phi_{ij}], Z[\phi_{ij}]))$$

constitue l'isomorphisme ζ^1 recherché.

Propriété II.3.3. Soit (ϕ_{ij}) et (ψ_{ij}) appartenant à $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}_n^Z)$. Alors on dispose de l'isomorphisme

$$\mathcal{M}[\phi_{ij}][\zeta^1\psi_{ij}] \stackrel{\mathcal{C}_n}{\cong} \mathcal{M}[\phi_{ij}\psi_{ij}].$$

Démonstration: Considérons la famille de plongements canoniques $U_i \xrightarrow{I_i} \mathcal{M}[\phi_{ij}]$. Si y et x sont deux points identifiés dans le collage par $(\phi_{ij}\psi_{ij})$, alors on a $I_i(y) = I_i\phi_{ij}\psi_{ij}(x)$. Or par construction du recollement $\mathcal{M}[\phi_{ij}]$, la relation de compatibilité s'écrit $I_i\phi_{ij} = I_j$. D'où l'on tire l'égalité

$$I_i(y) = I_j\psi_{ij}(x) = \underbrace{I_j\psi_{ij}I_j^{-1}}_{\zeta^1\psi_{ij}}(I_j(x)).$$

Ainsi, les applications $\{I_i\}$ se factorisent en un isomorphisme de la catégorie $\text{Col}_n(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$ pour les relations définies à la source par $(\phi_{ij}\psi_{ij})$ et au but par $(\zeta^1\psi_{ij})$. □

II.3.5 Propriété de stabilité.

La propriété de stabilité identifie au sein de la catégorie de collage des classes d'arbres isomorphes entre eux : sommairement, lorsque le cocycle de collage admet un ordre de tangence au diviseur assez grand, le collage obtenu est isomorphe à l'arbre modèle.

Propriété II.3.4 (Stabilité). Pour n assez grand, l'image de l'inclusion naturelle

$$\text{Col}_n(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U}) \hookrightarrow \text{Col}_0(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$$

est constituée d'arbres isomorphes entre eux dans la catégorie $\text{Col}_0(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$.

Cette propriété s'énonce aussi de la façon suivante : la flèche naturelle

$$H^1(\mathcal{D}, \mathcal{G}_Z^n) \longrightarrow H^1(\mathcal{D}, \mathcal{G}_Z^0)$$

est constante égale à $[Id]_{\mathcal{G}_Z^0}$.

Lemme II.3.1. Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux arbres marqués munis de croix, tous deux cimes de processus d'éclatements de hauteur h (au sens de II.1.1). Soit Φ_0 un germe de biholomorphisme entre les socles \mathcal{M}^0 et \mathcal{N}^0 conjuguant les croix. Supposons que l'isomorphisme induit sur le voisinage infinitésimal $\Phi_0|_{\mathcal{M}^{0[n+h+1],Z}}$ se relève en un isomorphisme $\Psi = (\Psi_j)$ des processus d'éclatements infinitésimaux d'ordre $n+h+1$, c'est-à-dire, pour $1 \leq j \leq h-1$ les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}^{j+1[n+h+1],Z} & \xrightarrow{\Psi_{j+1}} & \mathcal{N}^{j+1[n+h+1],Z} \\ E^{j+1} \downarrow & & E^{j+1} \downarrow \\ \mathcal{M}^{j[n+h+1],Z} & \xrightarrow{\Psi_j} & \mathcal{N}^{j[n+h+1],Z} \end{array}$$

et la relation suivante est vérifiée

$$\Psi_0 = \Phi_0|_{\mathcal{M}_0^{[n+h+1], Z}}.$$

Alors Φ_0 se relève en un isomorphisme $\Phi = (\Phi_j)$ d'arbres marqués munis d'une croix vérifiant pour tout j ,

$$\Phi_j|_{\mathcal{M}_j^{[n], Z}} = \Psi_j|_{\mathcal{M}_j^{[n], Z}}.$$

Démonstration: La démonstration est une récurrence sur la hauteur de l'arbre. Le biholomorphisme Φ_0 se relève en un biholomorphisme Φ_1 entre \mathcal{M}^1 et \mathcal{N}^1 qui conjugue les croix. Comme par hypothèse on dispose de l'égalité

$$\Phi_0|_{\mathcal{M}^1[n+h+1], Z} = \Psi_0,$$

la restriction de Φ_1 au voisinage infinitésimal d'ordre $n + h$ vérifie la relation

$$\Phi_1|_{\mathcal{M}^1[n+h], Z} = \Psi_1|_{\mathcal{M}^1[n+h], Z}.$$

En particulier, la restriction de Φ_1 au diviseur \mathcal{D}^1 est égale à la restriction de Ψ_1 sur \mathcal{D}^1 . Comme (Ψ_j) est un isomorphisme d'arbre marqué, Φ_1 comme Ψ_1 conjugue les points singuliers et les centres d'éclatements de \mathcal{M} et \mathcal{N} . Ceci démontre le lemme pour $h = 1$. Lorsque $h > 1$, on applique l'hypothèse de récurrence à chaque germe de Φ_1 au voisinage de chaque point du centre d'éclatement S^1 .

□

Ce lemme a pour conséquence immédiate l'analogie de l'assertion (II.3.4) pour les faisceaux $\text{Aut}_n(\mathcal{M}, Z)$:

Lemme II.3.2. *Il existe une suite d'entiers $\delta(n)$ tendant vers l'infini lorsque n tend vers l'infini tel que le morphisme naturel*

$$H^1(\mathcal{D}, \text{Aut}_{\delta(n)}(\mathcal{M}, Z)) \rightarrow H^1(\mathcal{D}, \text{Aut}_n(\mathcal{M}, Z))$$

est identiquement égal à $[(\phi_{ij})] \mapsto [\text{Id}]$.

Démonstration: La preuve se calque sur celle de [31]. On peut supposer que \mathcal{M} est un arbre cime d'un processus d'éclatement. Soit $p \geq n$ et (ϕ_{ij}) un élément de $Z^1(\mathcal{D}, \mathcal{G}_Z^p)$. Il existe un germe de biholomorphisme θ entre $\mathcal{M}[\phi_{ij}]$ et la cime \mathcal{M}' d'un processus d'éclatements. Notons Z' la croix image de la croix $Z[\phi_{ij}]$ par le biholomorphisme θ . Le morphisme θ induit un isomorphisme $\theta|_{\mathcal{M}[\phi_{ij}]^{[p], Z[\phi_{ij}]}}$ entre les voisinages infinitésimaux d'arbres $\mathcal{M}[\phi_{ij}]^{[p], Z[\phi_{ij}]}$ et $\mathcal{M}'^{[p], Z'}$. Ainsi, l'application entre les voisinages infinitésimaux d'arbres définie par

$$\theta|_{\mathcal{M}[\phi_{ij}]^{[p], Z[\phi_{ij}]}} \circ \rho^{[p], Z}$$

est un biholomorphisme de cimes de processus d'éclatements infinitésimaux, $\rho^{[p], Z}$ désignant le plongement attaché à $\mathcal{M}[\phi_{ij}]$ comme élément de la catégorie $\text{Col}_p(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$. D'après le lemme

(II.3.1), pour $p = \delta(n)$ assez grand cette application se relève aux arbres en un germe de biholomorphisme T tel que

$$T|_{\mathcal{M}^{[n],Z}} = \theta|_{\mathcal{M}^{[\phi_{ij}]^{[n],Z[\phi_{ij}]}} \circ \rho^{[n],Z}.$$

Ainsi, l'application $H := T^{-1} \circ \theta$ est un germe de biholomorphisme entre $\mathcal{M}^{[\phi_{ij}]}$ et \mathcal{M} vérifiant

$$H|_{\mathcal{M}^{[n],Z}} \circ \rho^{[n],Z} = \text{Id},$$

ce qui signifie la trivialité du cocycle (ϕ_{ij}) dans $H^1(\mathcal{D}, \text{Aut}_n(\mathcal{M}, Z))$.

□

Nous sommes désormais en mesure d'établir la propriété de stabilité équivalente à (II.3.4) :

Corollaire II.3.1. ¹ *Il existe un entier n_0 minimal tel que pour tout $n \geq n_0$, le morphisme naturel*

$$H^1(\mathcal{D}, \mathcal{G}_Z^n) \rightarrow H^1(\mathcal{D}, \mathcal{G}_Z^0)$$

est trivial. De plus, cet entier n_0 ne dépend que de la hauteur de l'arbre.

Démonstration: À nouveau, on peut supposer grâce à (II.1.1) que l'arbre \mathcal{M} est l'arbre cime d'un processus d'éclatements. Soit (ϕ_{ij}) un 1-cocycle à valeurs dans $\mathcal{G}_Z^{\delta(n)}$. Considérons sa trivialisation donnée par le lemme (II.3.2) à valeurs dans le faisceau $\text{Aut}_n(D, Z)$

$$\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1} \tag{II.9}$$

Notons z_1 et z_2 les points d'attache de la croix et ϕ_1 et ϕ_2 les composantes du cocycle définies au voisinage de z_1 et z_2 . D'après le lemme (II.2.1), il existe deux systèmes de coordonnées adaptées (x_1, y_1) et (x_2, y_2) définis aux voisinages respectifs de Z_1 et Z_2 tels que l'application E s'écrive en coordonnées

$$E(x_1, y_1) = (x_1, y_1 x_1^{N_1}) \quad \text{et} \quad E(x_2, y_2) = (x_2 y_2^{N_2}, y_2).$$

Développons ϕ_1 et ϕ_2 en coordonnées :

$$\begin{aligned} \phi_1(x_1, y_1) &= (x_1 + x_1^n y_1 U_1(x_1, y_1), y_1 + x_1^n y_1 V_1(x_1, y_1)) \\ \phi_2(x_2, y_2) &= (x_2 + y_2^n x_2 U_2(x_2, y_2), y_2 + y_2^n x_2 V_2(x_2, y_2)) \end{aligned}$$

Soit ϕ_0 le germe de biholomorphisme à l'origine de \mathbb{C}^2 défini par

$$\phi_0(x, y) = (x e^{y^n U_2(0,y)}, y e^{x^n V_1(x,0)})$$

Pour n assez grand, ϕ_0 se relève en un germe ϕ d'automorphisme d'arbre marqué fixant les points du diviseur et ceux de la croix. Au voisinage du point z_1 , l'action de ϕ sur la coordonnée y_1 s'écrit

$$y_1 e^{x_1^n V_1(x_1,0) - N_1 y_1^n x_1^{N_1} U_2(0,y_1 x_1^{N_1})} = y_1 + x_1^n y_1 V_1(x_1, 0) + x_1^n y_1^2(\dots).$$

¹Celui-ci est pour toi Johanna.

La relation précédente assure qu'en évaluant l'automorphisme ϕ_1 par le morphisme \mathfrak{J}_0 (II.2.4), on trouve

$$\mathfrak{J}_0(\phi_1)_{z_1} \equiv \mathfrak{J}_0(\phi)_{z_1}.$$

De même, en considérant l'expression de la première composante de ϕ au voisinage z_2 , on trouve que $\mathfrak{J}_0(\phi_2)_{z_2} \equiv \mathfrak{J}_0(\phi)_{z_2}$. De plus, pour tout point c autre que z_1 et z_2 , il vient

$$\mathfrak{J}_0(\phi^{-1})_c \equiv 0.$$

Finalement, le 0-cocycle $(\phi_i \circ \phi^{-1})$ est une trivialisaton de (ϕ_{ij}) qui vérifie

$$\mathfrak{J}_0(\phi_i \circ \phi^{-1}) \equiv 0.$$

Par définition, cette dernière relation signifie que la trivialisaton est à valeurs dans \mathcal{G}_Z^0 .

□

Comme évoqué précédemment, ce corollaire est équivalent à la propriété de stabilité énoncée en début de section.

Chapitre III

Théorème de réalisation.

Nous supposons désormais l'arbre marqué \mathcal{M} feuilleté par un feuilletage \mathcal{F} . Nous allons introduire une notion permettant de détecter sur tout élément de $\text{Col}_0(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$ l'existence d'un feuilletage cobordant à \mathcal{F} au sens des déformations isoholonomiques.

III.1 Cobordismes dans $\text{Col}_n(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$.

Nous supposons que les singularités de \mathcal{F} sont réduites. De même qu'un arbre marqué est biholomorphe à la cime d'un processus d'éclatements, un arbre marqué feuilleté par un feuilletage réduit est issu d'un processus d'éclatements dominant l'arbre de réduction d'un germe de feuilletage sur $(\mathbb{C}^2, 0)$. En effet par (II.1.1), considérons un processus d'éclatements de cime \mathcal{M}^h biholomorphe à \mathcal{M} et de morphisme total E_h . Le feuilletage transporté sur \mathcal{M}^h descend par l'application $E_h|_{\mathcal{M}^h \setminus \mathcal{D}^h}$ en un feuilletage holomorphe sur \mathbb{C}^{2*} . D'après le théorème de Hartogs, celui-ci se prolonge en un feuilletage \mathcal{F}_0 holomorphe sur un voisinage de 0. Maintenant, comme $E_h^* \mathcal{F}_0$ est réduit, par minimalité du processus de réduction, il existe un éclatement E_\circ factorisant E_h au travers de $E_{\mathcal{F}_0}$, c'est-à-dire un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{M}^h, \mathcal{D}^h) & \xrightarrow{E_\circ} & (\mathcal{M}_{\mathcal{F}_0}, \mathcal{D}_{\mathcal{F}_0}) \\
 & \searrow E_h & \downarrow E_{\mathcal{F}_0} \\
 & & (\mathbb{C}^2, 0)
 \end{array} \tag{III.1}$$

où $E_{\mathcal{F}_0}$ désigne naturellement le morphisme total du processus de réduction de \mathcal{F}_0 . Cette identification permet en particulier de parler des séparatrices de \mathcal{F} en les identifiant aux transformées strictes des séparatrices de \mathcal{F}_0 . Nous pouvons dès lors spécifier la notion de germe de croix en tenant compte de la présence des séparatrices et du feuilletage.

Définition III.1.1 (Germe de croix adapté à \mathcal{F}). *Soit Z un germe de croix sur \mathcal{M} . On dit que Z est adapté à \mathcal{F} si pour chaque composante Z_i , au moins l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :*

1. Z_i est une séparatrice de \mathcal{F} .

2. Z_i est attachée au diviseur en un point régulier de \mathcal{F} .

Dans le dernier cas, Z_i est transverse au feuilletage.

L'introduction des faisceaux suivants est suscitée à la fois par la cohomologie des déformations isoholonomiques (I.3.2) et par la propriété clé (II.2.1) :

- $\mathfrak{X}_{S,Z}$ le faisceau de base \mathcal{D} des germes de champs de vecteurs dans \mathcal{M} qui sont tangents à \mathcal{D} , aux séparatrices et à la croix Z .
- $\mathfrak{X}_{\mathcal{F},Z} \subset \mathfrak{X}_{S,Z}$ le sous-faisceau des germes de champs de vecteurs tangents au feuilletage \mathcal{F} .

De ces deux faisceaux, nous dégageons la définition de *cobordisme élémentaire et général* : soit \mathcal{N} un élément de la catégorie $\text{Col}_0(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$,

Définition III.1.2 (Cobordisme élémentaire). *Nous disons ici que l'arbre \mathcal{N} est élémentairement \mathcal{F} -cobordant à \mathcal{M} si il existe un 1-cocycle (T_{ij}) appartenant à $Z^1(\mathcal{U}, \mathfrak{J}_Z \mathfrak{X}_{\mathcal{F},Z})$ tel que \mathcal{N} et $\mathcal{M}[e^{T_{ij}}]$ soient isomorphes dans $\text{Col}_0(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$.*

Si \mathcal{N} est \mathcal{F} -cobordant à \mathcal{M} alors \mathcal{N} hérite canoniquement d'un feuilletage défini par

$$\mathcal{F}[e^{T_{ij}}] := \coprod_{i \in \mathbb{I}_0 \cup \mathbb{I}_1} \mathcal{F}|_{\mathcal{U}_i} /_{x \sim e^{T_{ij}} x}.$$

Les identifications du collage sont cohérentes car les flots $e^{T_{ij}}$ agissent dans les feuilles locales. Le feuilletage $\mathcal{F}[e^{T_{ij}}]$ est obtenu par déformation isoholonomique du feuilletage \mathcal{F} . En effet, considérons la famille d'ouverts $\{\mathcal{U}_i\}$ définie par $\mathcal{U}_i = U_i \times \overline{\mathbb{D}}$, $i \in \mathbb{I}$. Les ouverts \mathcal{U}_i sont naturellement feuilletés par les feuilletages produits $\mathcal{F}|_{U_i} \times \overline{\mathbb{D}}$. Soit Φ_{ij} l'application définie par le flot de T_{ij} à l'instant t

$$\Phi_{ij}(x, t) = (e^{tT_{ij}} x, t).$$

La variété suivante obtenue par recollement des ouverts \mathcal{U}_i selon Φ_{ij}

$$\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{D}}} = \coprod_{i \in \mathbb{I}_0 \cup \mathbb{I}_1} \mathcal{U}_i /_{((x,t) \sim \Phi_{ij}(x,t))}$$

admet un feuilletage global $\mathcal{F}_{\overline{\mathbb{D}}}$ obtenu comme recollement des feuilletages produits :

$$\mathcal{F}_{\overline{\mathbb{D}}} = \coprod_{i \in \mathbb{I}_0 \cup \mathbb{I}_1} \mathcal{F}|_{\mathcal{U}_i} /_{((x,t) \sim \Phi_{ij}(x,t))}.$$

Le couple $(\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{D}}}, \mathcal{F}_{\overline{\mathbb{D}}})$ est une déformations isoholonomiques du feuilletage marqué \mathcal{F} et de paramètres $\overline{\mathbb{D}}$. La fibre en 0 de la projection naturelle $\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{D}}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ est l'arbre marqué \mathcal{M} feuilleté par \mathcal{F} et la fibre en 1 est l'arbre marqué $\mathcal{M}[e^{T_{ij}}]$ feuilleté par $\mathcal{F}[e^{T_{ij}}]$.

La relation de cobordisme général est la relation d'équivalence induite par le cobordisme élémentaire.

Définition III.1.3 (Cobordisme général). *Nous disons ici que l'arbre \mathcal{N} est \mathcal{F} -cobordant à \mathcal{M} si il existe une suite finie de 1-cocycles $(T_{ij}^k)_{k=1, \dots, N}$ telle que*

$$\mathcal{N} \stackrel{\text{C}_0}{\simeq} \mathcal{M}[e^{T_{ij}^1}][\dots][e^{T_{ij}^N}],$$

où pour tout $p = 1, \dots, N - 1$, le 1-cocycle (T_{ij}^p) est défini de la façon suivante : soit $\mathfrak{X}_{\mathcal{F}_p, Z_p}$ le faisceau de base $\mathcal{D}[e^{T_{ij}^1}][\dots][e^{T_{ij}^p}]$ des germes de champs de vecteurs qui sont respectivement tangents à la croix et au feuilletage

$$Z_p = Z[e^{T_{ij}^1}][\dots][e^{T_{ij}^p}] \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_p = \mathcal{F}[e^{T_{ij}^1}][\dots][e^{T_{ij}^p}].$$

Le 1-cocycle (T_{ij}^{p+1}) est supposé être à valeurs dans $\mathfrak{X}_{\mathcal{F}_p, Z_p}$. On note alors

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\mathcal{F}_1, Z_1} \mathcal{M}_2 \xrightarrow{\mathcal{F}_2, Z_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{F}_{N-1}, Z_{N-1}} \mathcal{M}_N \xrightarrow{\mathfrak{C}_0} \mathcal{N}.$$

Comme pour le cobordisme élémentaire, la relation de cobordisme général permet de *pousser* de proche en proche le feuilletage initial sur la variété finale et ainsi de détecter l'existence d'un feuilletage relié par une déformation isoholonomique. Dans la suite, nous allons montrer que tout arbre obtenu comme collage d'un arbre feuilleté jouit de cette propriété.

III.2 Construction des cobordismes.

Désormais, on suppose l'arbre $(\mathcal{M}, \mathcal{D}, \Sigma)$ feuilleté par un feuilletage de type courbe généralisée non-dicritique marquée \mathcal{F} muni d'une croix Z adaptée à \mathcal{F} .

L'objectif de cette partie est d'établir le résultat suivant :

Proposition III.2.1. *Tout élément \mathcal{N} de $\text{Col}_0(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$ est \mathcal{F} -cobordant à \mathcal{M} .*

La démonstration consiste en trois étapes.

1. Nous établissons d'abord le résultat à l'échelle infinitésimale, ce qu'énonce précisément la proposition (III.2.1). Seule cette étape dépend de l'hypothèse de type courbe généralisée non-dicritique.
2. Une proposition analogue à (III.2.1) est ensuite établie pour la catégorie $\text{Col}_1(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$. Ici, le principe est un algorithme reposant sur le formule de Campbell-Hausdorff. Ayant fixé un 1-cocycle de $\mathcal{G}_{\mathbb{Z}}^1$, à chaque pas de l'algorithme, on met en évidence le flot d'un 1-cocycle de champ tangent au feuilletage cohomologue au jet du 1-cocycle fixé à des ordres de plus en plus grands. Le théorème de stabilité permet alors de terminer cette étape.
3. La dernière étape de la preuve est une récurrence sur la hauteur des arbres et la longueur des cobordismes. Cette récurrence permet de *casser* en deux le cocycle définissant \mathcal{N} : on traite une partie à l'aide de l'hypothèse de récurrence, l'autre à l'aide du résultat établi dans $\text{Col}_1(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$. L'intérêt et la nécessité de la notion de croix apparaissent clairs dans cette étape.

III.2.1 étape 1 : le problème infinitésimal.

Soit H un biholomorphisme entre \mathcal{M} et l'arbre cime \mathcal{M}^h d'un processus d'éclatements de morphisme total E_h . D'après la remarque (III.1), le feuilletage $\mathcal{F}^h = H^*\mathcal{F}$ est le relevé d'un feuilletage donné par une 1-forme holomorphe ω_0 à l'origine de \mathbb{C}^2 . La 1-forme globale $\Omega = E^*\omega_0$, $E = E_h \circ H$ induit un morphisme de faisceaux :

$$X \in \mathfrak{X}_{S,Z} \rightarrow \Omega(X) \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}.$$

Notons f une équation réduite des séparatrices du feuilletage associé à ω_0 .

Lemme III.2.1. *Il existe une suite exacte de faisceaux*

$$0 \rightarrow \mathfrak{M}_Z^n \mathfrak{X}_{\mathcal{F},Z} \rightarrow \mathfrak{M}_Z^n \mathfrak{X}_{S,Z} \xrightarrow{\Omega(\cdot)} \mathfrak{M}_Z^n (f \circ E) \rightarrow 0$$

où $(f \circ E)$ désigne le faisceau en d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ engendré par la fonction $f \circ E$.

Démonstration: Les arguments sont similaires à ceux qu'on pourrait trouver dans [31]. Nous les adaptons ici. Montrons d'abord qu'il existe une suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathfrak{X}_{\mathcal{F},Z} \rightarrow \mathfrak{X}_{S,Z} \xrightarrow{\Omega(\cdot)} (f \circ E) \rightarrow 0. \quad (\text{III.2})$$

Visiblement $\mathfrak{X}_{\mathcal{F},Z}$ est le noyau de $\Omega(\cdot)$. Déterminons l'image de $\Omega(\cdot)$. Comme \mathcal{F} est un feuilletage de type courbe généralisée non-dicritique, au voisinage d'un point singulier s pour le feuilletage, il existe des coordonnées adaptées (x, y) et des unités U et V telles que $f \circ E$ et Ω s'écrivent

$$f \circ E = Ux^{p+1}y^{q+1} \quad \text{et} \quad \Omega = Vx^p y^q (\lambda x(1+A)dy + y(1+B)dx).$$

Soit X appartenant à la fibre de faisceau $(\mathfrak{X}_{S,Z})_s$. Le champ de vecteurs X s'écrit en coordonnées

$$X = x\alpha(x, y)\partial_x + y\beta(x, y)\partial_y$$

où α et β sont des germes de fonctions au voisinage de s . En évaluant par Ω , il vient

$$\Omega(X) = x^{p+1}y^{p+1}(\dots) = f \circ E(\dots)$$

qui est une section de $(f \circ E)$ au voisinage de s . De plus, pour tout g dans $(\mathcal{O}_{\mathcal{M}})_s$, le champ de vecteurs $X = yg \frac{U}{V} \partial_y$ appartient à $(\mathfrak{X}_{S,Z})_s$ et vérifie $\Omega(X) = gf \circ E$. Ainsi, l'image de l'opérateur $\Omega(\cdot)$ satisfait l'égalité

$$\Omega_s((\mathfrak{X}_{S,Z})_s) = (f \circ E)_s.$$

En un point c régulier pour le feuilletage, il existe des coordonnées adaptées (x, y) et des unités U et V telles que $f \circ E = Ux^{p+1}$ et $\Omega = Vx^p dx$. Un germe de champ de vecteurs de $(\mathfrak{X}_{S,Z})_c$ s'écrit $x\alpha\partial_x + \beta\partial_y$ et visiblement, Ω envoie $(\mathfrak{X}_{S,Z})_c$ sur $(f \circ E)_c$. À nouveau, pour tout g dans $(\mathcal{O}_{\mathcal{M}})_c$, le champ $X = xg \frac{U}{V} \partial_x$ appartient à $(\mathfrak{X}_{S,Z})_c$ et vérifie $\Omega(X) = gf \circ E$.

Ainsi, l'image par $\Omega(\cdot)$ du faisceau $\mathfrak{X}_{S,Z}$ est le sous faisceau $(f \circ E) \subset \mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ et la suite (III.2) est exacte.

Maintenant, le faisceau en idéaux \mathfrak{M}_Z^n étant localement libre de rang 1, la suite exacte obtenue en multipliant (III.2) par \mathfrak{M}_Z^n reste exacte.

□

Pour analyser la cohomologie des faisceaux de la suite exacte précédemment établie, il convient de comprendre comme la cohomologie au-dessus d'un ouvert du diviseur \mathcal{D} est liée à celle de ses voisinages dans \mathcal{M} , ce qu'explique le lemme suivant :

Lemme III.2.2. *Soit $\mathcal{M}_{\mathcal{W}}$ un voisinage de \mathcal{D} définissant le germe d'arbre \mathcal{M} . Soit \mathcal{S} un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_{\mathcal{W}}}$ -modules cohérents de base $\mathcal{M}_{\mathcal{W}}$. Soit U un ouvert de Stein de \mathcal{D} et $\mathcal{S}|_U$ le faisceau de base U dont le fibre en p est la fibre S_p . Alors*

$$H^1(U, \mathcal{S}|_U) = 0.$$

Démonstration: D'après un théorème de Siu [39], il existe \mathcal{V} un système fondamental de voisinages ouverts de U dans $\mathcal{M}_{\mathcal{W}}$ constitué d'ouverts de Stein. Comme \mathcal{S} est cohérent, pour tout $V \in \mathcal{V}$, $H^1(V, \mathcal{S}|_V) = 0$ [12]. D'après [11], il existe un isomorphisme

$$\lim_{V \in \mathcal{V} \rightarrow U} H^1(V, \mathcal{S}|_V) \longrightarrow H^1(U, \mathcal{S}|_U)$$

induit par le morphisme de restriction sur U des sections de \mathcal{S} au-dessus de \mathcal{V} . Ce qui prouve le lemme.

□

Nous sommes désormais en mesure d'étudier la cohomologie des faisceaux en jeu :

Lemme III.2.3.

1. *Le module $H^1(\mathcal{D}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$ est nul.*
2. *Pour tout $n \geq 1$, $H^1(\mathcal{D}, \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}}^n) = 0$.*

Démonstration: La démonstration du point (1) est une récurrence sur la hauteur de l'arbre \mathcal{M} . Supposons que $h = 1$. Il existe deux cartes (x_1, y_1) et (x_2, y_2) aux voisinages de deux ouverts de Stein U_1 et U_2 recouvrant $\mathcal{D} = \mathbb{P}^1$ telles que le changement de cartes s'écrivent

$$x_1 = y_2 x_2 \quad \text{et} \quad y_1 = \frac{1}{x_2}.$$

Les sections du faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ au-dessus l'ouvert $U_1 \cap U_2$ s'écrivent

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}} a_{ij} x_1^i y_1^j.$$

Dans les coordonnées (x_1, y_1) , les sections de $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ au-dessus de U_2 sont de la forme

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} c_{ij} x_1^i y_1^{j-i}.$$

Comme les ouverts U_1 et U_2 sont de Stein, on dispose de l'isomorphisme

$$H^1(\mathcal{D}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}) = \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(U_1 \cap U_2) / \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(U_1) + \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(U_2).$$

Aussi, l'équation cohomologique associée au calcul de $H^1(\mathcal{D}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$ devient

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}} a_{ij} x_1^i y_1^j = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} b_{ij} x_1^i y_1^j + \sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} c_{ij} x_1^i y_1^{j-i}.$$

Cette équation admet toujours une solution en b_{ij} et c_{ij} définie par

$$\begin{cases} i \geq 0, j \geq 0 & b_{ij} = a_{ij} \\ i \geq 0, j < 0 & c_{i(i-j)} = a_{ij} \end{cases}.$$

Ainsi, le module $H^1(\mathcal{D}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$ est trivial. Supposons maintenant le résultat prouvé pour les arbres de hauteur $h - 1$ et supposons \mathcal{M} de hauteur h . Le morphisme total E_h du processus d'éclatements se décompose en $E_h = E_0 \circ E'$ où E_0 correspond au premier éclatement et $E' = E_1 \circ \dots \circ E_{h-1}$. Soit U_0 et U_1 le recouvrement de \mathcal{D}^1 où : U_0 est la réunion des disques voisinages des points du centre d'éclatement $S^1 = \{c_1, \dots, c_m\}$; U_1 est le voisinage d'un complémentaire de U_0 dans \mathcal{D}^1 . On note U'_0 et U'_1 les ouverts $E'^{-1}(U_0)$ et $E'^{-1}(U_1)$ qui constituent alors un recouvrement de \mathcal{D} . La suite exacte de Mayer-Vietoris relative à ce recouvrement s'écrit

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow H^1(\mathcal{D}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}) \longrightarrow H^1(U'_0, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}) \oplus H^1(U'_1, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}) \longrightarrow H^1(U'_0 \cap U'_1, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}) \longrightarrow 0 \quad (\text{III.3})$$

où N est donné par la suite exacte

$$\begin{aligned} H^0(U'_0, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}) \oplus H^0(U'_1, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}) &\xrightarrow{\delta} H^0(U'_0 \cap U'_1, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}) \longrightarrow N \longrightarrow 0 \\ \delta(X_0, X_1) &= X_1 - X_0. \end{aligned}$$

Comme les ouverts U'_1 et $U'_0 \cap U'_1$ sont de Stein, on trouve d'après (III.2.2) que

$$H^1(U'_1, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}) = 0 \quad \text{et} \quad H^1(U'_0 \cap U'_1, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}) = 0.$$

De plus, l'application E' induit les isomorphismes de modules suivants

$$\begin{aligned} H^0(U'_\epsilon, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}) &\simeq H^0(U_\epsilon, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}), \quad \epsilon = 0, 1, \quad \text{et} \\ H^0(U'_0 \cap U'_1, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}) &\simeq H^0(U_0 \cap U_1, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}). \end{aligned}$$

Ainsi, la suite exacte (III.3) se réduit à

$$0 \longrightarrow H^1(\mathcal{D}_0, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}) = 0 \longrightarrow H^1(\mathcal{D}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}) \longrightarrow H^1(U'_0, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}) \longrightarrow 0 \quad (\text{III.4})$$

Le passage à la limite inductive sur les voisinages U_0 lorsque le rayon des disques tend vers 0 fournit l'isomorphisme suivant

$$H^1(U'_0, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}) \simeq \bigoplus_{r=1}^m H^1(\mathcal{D}_r, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$$

où \mathcal{D}_r désigne le diviseur exceptionnel $E'^{-1}(c_r)$. Finalement, l'hypothèse de récurrence appliquée à chaque arbre de hauteur $h - 1$ voisinage de \mathcal{D}_r et la suite exacte (III.4) assurent que le module $H^1(\mathcal{D}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$ est nul.

Pour montrer le point (2), observons que le faisceau en idéaux \mathfrak{M}_Z^n est un sous-faisceau de \mathfrak{M}^n . À la suite exacte courte de modules

$$0 \rightarrow \mathfrak{M}_Z^n \rightarrow \mathfrak{M}^n \rightarrow \mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}_Z^n \rightarrow 0$$

est associée la suite exacte longue en cohomologie [11]

$$\dots \rightarrow H^0(\mathcal{D}, \mathfrak{M}^n) \xrightarrow{\delta} H^0(\mathcal{D}, \mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}_Z^n) \rightarrow H^1(\mathcal{D}, \mathfrak{M}_Z^n) \rightarrow H^1(\mathcal{D}, \mathfrak{M}^n) \rightarrow \dots \quad (\text{III.5})$$

Le faisceau \mathfrak{M}^n est engendré par ses sections globales : précisément, il existe des sections globales de \mathfrak{M}^n notées S_1, \dots, S_m telles que pour tout point s de \mathcal{D} , on ait

$$(\mathfrak{M}^n)_s = \left\{ \sum_{l=1}^m f^l(S_l)_s \mid f^l \in (\mathcal{O}_{\mathcal{M}})_s \right\}.$$

Aussi, pour tout (f_{ij}) appartenant à $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathfrak{M}^n)$, il existe une famille $(f_{ij}^l)_{l=1\dots m}$ vérifiant $f_{ij}^l \in \mathcal{Z}^0(U_{ij}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$ et pour tout i et j ,

$$f_{ij} = \sum_{l=1}^m f_{ij}^l S_l.$$

Comme le recouvrement distingué \mathcal{U} ne présente pas aucune 3-intersection et qu'implicitement nous travaillons dans l'espace des 1-cocycles *non-redondants*, la condition de 1-cocycle est vide. Aussi, chaque famille (f_{ij}^l) pour $l = 1, \dots, m$ est naturellement un élément de $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$. Comme $H^1(\mathcal{D}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$ est trivial, chaque 1-cocycle (f_{ij}^l) admet une trivialisations. La famille des trivialisations obtenues $(f_{ij}^l) = (f_j^l - f_i^l)$ induit une trivialisations du cocycle initial définie par

$$f_{ij} = \left(\sum_{l=1}^m f_j^l S_l \right) - \left(\sum_{l=1}^m f_i^l S_l \right).$$

Le module $H^1(\mathcal{D}, \mathfrak{M}^n)$ est donc nul. D'après la suite exacte (III.5), pour conclure à la nullité de $H^1(\mathcal{D}, \mathfrak{M}_Z^n)$, on doit établir la surjectivité de la flèche δ . En dehors des points d'attache p_1 et p_2 de Z , les faisceaux $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ et I_Z coïncident ; la fibre du faisceau $\mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}_Z^n$ y est donc triviale. Nous allons expliciter les quotients $(\mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}_Z^n)_{p_i}$ pour $i = 1, 2$. Considérons les deux systèmes de coordonnées locales aux voisinages des points d'attache de Z donnés par la propriété (II.2.1). Ces coordonnées induisent les isomorphismes suivants :

$$(\mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}_Z^n)_{p_1} \simeq x_1^n \mathbb{C}\{x_1, y_1\} / x_1^n y_1 \mathbb{C}\{x_1, y_1\} \simeq x_1^n \mathbb{C}\{x_1\}.$$

De même, $(\mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}_Z^n)_{p_2}$ est isomorphe à $y_2^n \mathbb{C}\{y_2\}$. Ainsi, l'espace des sections globales du faisceau $\mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}_Z^n$ s'identifie à l'espace

$$x_1^n \mathbb{C}\{x_1\} \oplus y_2^n \mathbb{C}\{y_2\}.$$

Soit, donc, $S = x_1^n a_1(x_1) \oplus y_2^n a_2(y_2)$ une section globale de $\mathfrak{M}^n / \mathfrak{M}_Z^n$. L'application E s'écrit en coordonnées respectivement

$$E(x_1, y_1) = (x_1, y_1 x_1^{N_1}) \quad \text{et} \quad E(x_2, y_2) = (x_2 y_2^{N_2}, y_2).$$

Ainsi, le germe de fonction holomorphe défini à l'origine de \mathbb{C}^2 par

$$s(x, y) = x^n a_1(x) + y^n a_2(y)$$

se relève en une section globale du faisceau \mathfrak{M}^n qui s'écrit au points p_1 et p_2 respectivement

$$\begin{aligned} x_1^n a_1(x_1) + y_1^n x_1^{nN_1} a_2(y_1 x_1^{N_1}) &\equiv x_1^n a_1(x_1) & [\mathfrak{M}^n / \mathfrak{M}_Z^n]_{p_1} \\ x_2^n y_2^{nN_2} a_1(x_2 y_2^{N_2}) + y_2^n a_2(y_2) &\equiv y_2^n a_2(y_2) & [\mathfrak{M}^n / \mathfrak{M}_Z^n]_{p_2}. \end{aligned}$$

Les relations précédentes expriment précisément que $\delta(s \circ E) = S$. Ce qui prouve la surjectivité de δ et achève la démonstration du lemme. □

La propriété précédente est *minimale* dans le sens où, si l'on ajoute une composante irréductible lisse de plus à la croix Z , la propriété devient fausse.

Nous pouvons désormais énoncer la version infinitésimale de la proposition (III.2.1).

Proposition III.2.2 (Cobordisme infinitésimal). *Soit \mathcal{F} un feuilletage de type courbe généralisée marquée non-dicritique sur \mathcal{M} et Z une croix adaptée à \mathcal{F} . L'application canonique*

$$H^1(\mathcal{D}, \mathfrak{M}_Z^n \mathfrak{X}_{\mathcal{F}, Z}) \longrightarrow H^1(\mathcal{D}, \mathfrak{M}_Z^n \mathfrak{X}_{S, Z})$$

est surjective.

Démonstration: La suite exacte longue en cohomologie associée à la suite exacte courte de faisceaux du lemme (III.2.1) s'écrit

$$\cdots \rightarrow H^1(\mathcal{D}, \mathfrak{M}_Z^n \mathfrak{X}_{\mathcal{F}, Z}) \rightarrow H^1(\mathcal{D}, \mathfrak{M}_Z^n \mathfrak{X}_{S, Z}) \rightarrow H^1(\mathcal{D}, \mathfrak{M}_Z^n (f \circ E)) \rightarrow \cdots \quad (\text{III.6})$$

Or, le faisceau $(f \circ E)$ est par définition engendré par une section globale. Résoudre l'équation cohomologique du faisceau $\mathfrak{M}_Z^n (f \circ E)$ revient donc à résoudre celle du faisceau \mathfrak{M}_Z^n . Comme $H^1(\mathcal{D}, \mathfrak{M}_Z^n)$ est nul, $H^1(\mathcal{D}, \mathfrak{M}_Z^n (f \circ E))$ l'est aussi et le dernier terme de la suite (III.6) est nul. Ainsi l'application de la proposition est surjective. □

III.2.2 étape 2 : cobordisme dans $\text{Col}_1(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$.

Cette étape est consacrée à la preuve de la proposition suivante :

Proposition III.2.3 (Cobordisme dans $\text{Col}_1(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$). *Soit \mathcal{F} un feuilletage de type courbe généralisée marquée non-dicritique sur \mathcal{M} et Z un croix adaptée à \mathcal{F} .*

Tout élément de $\text{Col}_1(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$ est élémentairement \mathcal{F} -cobordant à \mathcal{M} .

La démonstration consiste à obtenir le cobordisme sur un voisinage d'ordre assez grand pour pouvoir appliquer le théorème de stabilité (II.3.4). De manière précise, nous commençons par établir le lemme suivant :

Lemme III.2.4. *Soit (ϕ_{ij}) appartenant à $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}_Z^1)$. Alors, pour tout $n \geq 1$, il existe des cocycles (T_{ij}) appartenant à $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathfrak{M}_Z \mathfrak{X}_{\mathcal{F}, Z})$, (ϕ_i) appartenant à $\mathcal{Z}^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}_Z^1)$ et $\tilde{\phi}_{ij}$ appartenant à $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}_Z^n)$ tels que*

$$\phi_j^{-1} \circ \phi_{ij} \circ \phi_i = e^{T_{ij}} \circ \tilde{\phi}_{ij} \quad (\text{III.7})$$

Avant de montrer le lemme ci-dessus, on observe que la famille $(\mathfrak{M}_Z^n \mathfrak{X}_{S, Z})_{n \geq 1}$ jouit d'une propriété de filtration graduée en regard du crochet de Lie des champs de vecteurs. On dispose en fait du résultat suivant

Propriété III.2.1. *Pour tout r et s ,*

$$[\mathfrak{M}_Z^r \mathfrak{X}_{S, Z}, \mathfrak{M}_Z^s \mathfrak{X}_{S, Z}] \subset \mathfrak{M}_Z^{r+s} \mathfrak{X}_{S, Z}.$$

Démonstration: C'est un calcul en coordonnées. Nous allons l'effectuer au voisinage d'un point lisse du diviseur, les autres cas étant similaires. Soit X et Y des germes de sections des faisceaux respectifs $\mathfrak{M}_Z^r \mathfrak{X}_{S, Z}$ et $\mathfrak{M}_Z^s \mathfrak{X}_{S, Z}$ au-dessus d'un point lisse du diviseur. Dans des coordonnées adaptées écrivons

$$X = x^{pr+1} a \partial_x + x^{ps} b \partial_y \quad \text{et} \quad Y = x^{pr+1} u \partial_x + x^{ps} v \partial_y,$$

où p désigne la multiplicité de la composante locale du diviseur. Il vient

$$[X, Y] = (x^{pr+1} x^{ps} a(\dots) + x^{pr} x^{ps+1} b(\dots)) \partial_x + (x^{pr+1} x^{ps-1} u(\dots) + x^{pr} x^{ps} v(\dots)) \partial_y$$

Ainsi, $[X, Y]$ est un germe de section du faisceau $\mathfrak{M}_Z^{r+s} \mathfrak{X}_{S, Z}$.

□

Démonstration:(III.2.4)- La démonstration est une récurrence sur l'entier n . Supposons, ainsi, la propriété vérifiée au rang n . Soit $(\tilde{\phi}_{ij}) \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}_Z^n)$ donné par l'hypothèse au rang n . Soit (x_{ij}, y_{ij}) un système de coordonnées au voisinage de $U_i \cap U_j$ tel que $x_{ij} = 0$ soit une équation locale du diviseur. Dans de telles coordonnées, le germe $\tilde{\phi}_{ij}$ s'écrit

$$\tilde{\phi}_{ij} : (x_{ij}, y_{ij}) \mapsto (x_{ij}, y_{ij}) + (A_{ij}(x_{ij}, y_{ij}), B_{ij}(x_{ij}, y_{ij}))$$

où A_{ij} et B_{ij} sont des fonctions holomorphes sur $U_i \cap U_j$. Soit (X_{ij}) le 1-cocycle de champ de vecteurs dont la composante X_{ij} s'écrit

$$X_{ij} = A_{ij}\partial_{x_{ij}} + B_{ij}\partial_{y_{ij}}.$$

D'après l'écriture en coordonnées des sections de \mathcal{G}_Z^n , la famille (\tilde{X}_{ij}) est un 1-cocycle à valeurs dans $\mathfrak{M}_Z^n \mathfrak{X}_{S,Z}$. Le lemme (III.2.2) assure l'existence d'un 0-cocycle (\tilde{X}_i) appartenant à $Z^0(\mathcal{U}, \mathfrak{M}_Z^n \mathfrak{X}_{S,Z})$ et d'un 1-cocycle (\tilde{T}_{ij}) de $Z^1(\mathcal{U}, \mathfrak{M}_Z^n \mathfrak{X}_{\mathcal{F},Z})$ tels que l'équation cohomologique s'écrive

$$\tilde{X}_{ij} = \tilde{X}_j - \tilde{X}_i + \tilde{T}_{ij}.$$

Un développement du flot $e^{\tilde{X}_{ij}}$ montre que l'automorphisme défini par

$$\phi_{ij}^1 := e^{-\tilde{X}_{ij}} \circ \tilde{\phi}_{ij} = (\text{Id} - \tilde{X}_{ij} + \dots) \circ (\text{Id} + \tilde{X}_{ij} + \dots)$$

appartient à la classe \mathcal{G}_Z^{n+1} . Les équations précédentes et l'hypothèse de récurrence fournissent les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} e^{-\tilde{X}_j} \circ \phi_j^{-1} \circ \phi_{ij} \circ \phi_i \circ e^{\tilde{X}_i} &= e^{-\tilde{X}_j} \circ e^{T_{ij}} \circ \tilde{\phi}_{ij} \circ e^{\tilde{X}_i} \\ &= e^{-\tilde{X}_j} \circ e^{T_{ij}} \circ e^{\tilde{X}_{ij}} \circ e^{\tilde{X}_i} \circ \phi_{ij}^1 \circ [\phi_{ij}^1, e^{\tilde{X}_i}] \end{aligned}$$

où $[a, b]$ désigne le commutateur $a^{-1}b^{-1}ab$. On trouve dans [36] ou [40] le résultat suivant :

Propriété III.2.2 (Formule de Campbell-Hausdorff). *Soit X et Y deux germes de champs de vecteurs nuls le long du diviseur. Il existe une série $\rho(X, Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k(X, Y)$ convergente pour la topologie de Krull dans l'espace des champs de vecteurs formels telle que*

$$e^{\rho(X, Y)} = e^X \circ e^Y.$$

On dispose de plus du développement partiel

$$\rho(X, Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \dots \quad (\text{III.8})$$

La formule de Campbell-Hausdorff permet d'écrire

$$e^{-\tilde{X}_j} \circ e^{T_{ij}} \circ e^{\tilde{X}_{ij}} \circ e^{\tilde{X}_i} = e^{\rho(\rho(-\tilde{X}_j, T_{ij}), \tilde{X}_{ij}), \tilde{X}_i}.$$

La relation (III.8) fournit alors le développement

$$\begin{aligned} \rho(\rho(-\tilde{X}_j, T_{ij}), \tilde{X}_{ij}), \tilde{X}_i) &= \\ T_{ij} + \tilde{T}_{ij} + \underbrace{\frac{1}{2}[T_{ij}, \tilde{X}_j] + \frac{1}{2}[T_{ij}, \tilde{X}_{ij}] + \frac{1}{2}[T_{ij}, \tilde{X}_i]}_{Y_{ij}} + \dots \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

On obtient ainsi les relations suivantes

$$e^{-\tilde{X}_j} \circ \phi_j^{-1} \circ \phi_{ij} \circ \phi_i \circ e^{\tilde{X}_i} = e^{T_{ij} + \tilde{T}_{ij} + Y_{ij}} \circ \phi_{ij}^1 \circ [\phi_{ij}^1, e^{-\tilde{X}_i}] \quad (\text{III.10})$$

$$= e^{T_{ij} + \tilde{T}_{ij}} \circ \phi_{ij}^2 \circ \phi_{ij}^1 \circ [\phi_{ij}^1, e^{-\tilde{X}_i}]. \quad (\text{III.11})$$

D'après la propriété (III.2.1), le cocycle (Y_{ij}) appartient à $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathfrak{M}_Z^{n+1} \mathfrak{X}_{S,Z})$. De plus, la formule de Campbell-Hausdorff montre la relation

$$\phi_{ij}^2 = e^{-T_{ij} - \tilde{T}_{ij}} \circ e^{T_{ij} + \tilde{T}_{ij} + Y_{ij}} = e^{Y_{ij} - \frac{1}{2}[Y_{ij}, T_{ij} + \tilde{T}_{ij}] + \dots}.$$

La propriété (II.2.1) assure alors que le cocycle (ϕ_{ij}^2) est à valeurs dans \mathcal{G}_Z^{n+1} . Un argument similaire montre que le commutateur dans l'équation (III.11) appartient à $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}_Z^{n+1})$. Au final, l'équation (III.11) constitue l'hypothèse de récurrence au rang $n + 1$.

□

Démontrons maintenant la proposition (III.2.3). À cet effet, écrivons $\mathcal{N} \simeq \mathcal{M}[\phi_{ij}]$ avec (ϕ_{ij}) dans $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}_Z^1)$. Soit un entier n tel que la propriété de stabilité soit vraie dans la catégorie $\text{Col}_0(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$. Le lemme III.2.4 assure qu'il existe (T_{ij}) appartenant à $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathfrak{M}_Z \mathfrak{X}_{\mathcal{F},Z})$, (ϕ_i) appartenant à $\mathcal{Z}^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}_Z^1)$ et $(\tilde{\phi}_{ij})$ appartenant à $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}_Z^n)$ tels que

$$\phi_j^{-1} \phi_{ij} \phi_i = e^{T_{ij}} \tilde{\phi}_{ij}.$$

Dès lors, les propriétés (II.3.2) et (II.3.3) montrent les isomorphismes successifs

$$\mathcal{M}[\phi_{ij}] \stackrel{\text{C}_1}{\simeq} \mathcal{M}[\phi_j^{-1} \phi_{ij} \phi_i] = \mathcal{M}[e^{T_{ij}} \tilde{\phi}_{ij}] \stackrel{\text{C}_1}{\simeq} \mathcal{M}[e^{T_{ij}}][\zeta \tilde{\phi}_{ij}].$$

Le théorème de stabilité appliqué au cocycle $(\zeta \tilde{\phi}_{ij})$ dans $\text{Col}_n(\mathcal{M}[e^{T_{ij}}], Z[e^{T_{ij}}], \mathcal{U}[e^{T_{ij}}])$ montre que $\mathcal{M}[e^{T_{ij}}][\zeta \tilde{\phi}_{ij}] \stackrel{\text{C}_1}{\simeq} \mathcal{M}[e^{T_{ij}}]$. Ainsi, il vient l'isomorphisme

$$\mathcal{M}[\phi_{ij}] \stackrel{\text{C}_1}{\simeq} \mathcal{M}[e^{T_{ij}}]$$

ce qui est exactement la propriété recherchée.

On aurait pu éventuellement, au prix de longues estimations, remplacer l'argument de stabilité par un argument de convergence. Cette alternative laisse entrevoir la possibilité d'une construction similaire pour des feuilletages aux voisinages de diviseurs ne provenant pas nécessairement d'un processus d'éclatements.

III.2.3 étape 3 : cobordisme dans $\text{Col}_0(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$.

La démonstration de la proposition (III.2.1) repose sur une récurrence sur la hauteur de l'arbre permettant de se ramener au résultat démontré dans l'étape (2) énoncé dans la catégorie $\text{Col}_1(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$.

Démonstration:(III.2.1)- Soit un 1-cocycle (ϕ_{ij}) tel que $\mathcal{N} \simeq \mathcal{M}[\phi_{ij}]$. Désignons par D_0 la composante irréductible de \mathcal{D} obtenue après le premier éclatement. Soit $\{c_1, \dots, c_N\}$ les points singuliers de \mathcal{D} sur D_0 . Notons \mathcal{D}_l la branche de \mathcal{D} attachée à c_l et \mathcal{M}_l un voisinage de \mathcal{D}_l dans \mathcal{M} . Le recouvrement distingué de \mathcal{D}_l obtenu par restriction du recouvrement \mathcal{U} à \mathcal{M}_l est noté \mathcal{U}_l . Convenons que $U_0 \in \mathcal{U}$ désigne l'ouvert $D_0 \setminus \{c_1, \dots, c_N\}$ et $U_l \in \mathcal{U}$ les voisinages respectifs de c_l . On note \mathcal{F}_l la restriction du feuilletage \mathcal{F} à \mathcal{M}_l et Z_l le germe de crois défini par la trace de D_0 et de la transformée stricte de Z dans \mathcal{M}_l . La crois Z_l peut être éventuellement réduite à une seule composante irréductible.

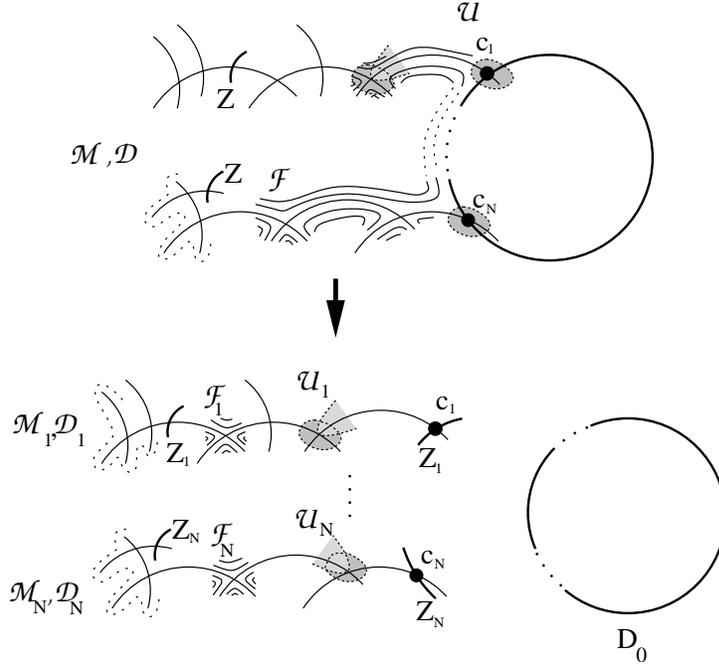


Fig. III.1 – Construction de la récurrence.

Considérons $(\phi_{ij}^l) \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}_l, \mathcal{G}_{Z_l}^0)$ le 1-cocycle restriction à \mathcal{U}_l de $(\phi_{ij}) \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}_Z^0)$, c'est-à-dire,

$$\phi_{ij}^l = \phi_{ij}, \quad U_i, U_j \in \mathcal{U}_l.$$

On vérifie que \mathcal{F}_l est un feuilletage de type courbe généralisée marquée non-dicritique et que Z_l est adaptée à \mathcal{F}_l . Comme chaque arbre $(\mathcal{M}_l, \mathcal{D}_l, \Sigma_l)$ est de hauteur plus petite que $h - 1$, l'hypothèse de récurrence assure que chaque arbre $\mathcal{M}_l[\phi_{ij}^l]$ est \mathcal{F}_l -cobordant à \mathcal{M}_l dans la catégorie $\text{Col}_0(\mathcal{M}_l, Z_l, \mathcal{U}_l)$.

Supposons, dans un premier temps que chaque \mathcal{F}_l -cobordisme obtenu soit élémentaire. Par définition, il existe une famille de 1-cocycles (T_{ij}^l) , $l = 1, \dots, N$ de $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}_l, \mathfrak{I}_{Z_l} \mathfrak{X}_{\mathcal{F}_l, Z_l})$ telle que,

$$\mathcal{M}_l[\phi_{ij}^l] \stackrel{\text{Co}}{\simeq} \mathcal{M}_l[e^{T_{ij}^l}]$$

D'après le lemme (II.3.2), il existe une famille $(\psi_i^l)_{l=1,\dots,N}$ de 0-cocycles à valeurs dans $\mathcal{G}_{Z_l}^0$ telle que

$$\phi_{ij}^l = \psi_j^l e^{T_{ij}^l} \psi_i^{l-1}. \quad (\text{III.12})$$

Convenons que ψ_1^l désigne la composante du 0-cocycle (ψ_i^l) définie sur l'ouvert U_l . Soit $(e^{T_{ij}})_{ext}$ le 1-cocycle

$$(e^{T_{ij}})_{ext} = \begin{cases} \text{Id} & \text{sur } U_l \cap U_0 \\ e^{T_{ij}^l} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Notons ϕ_{l0} la composante du 1-cocycle ϕ_{ij} définie sur $U_l \cap U_0$. Soit le 1-cocycle défini par

$$\kappa_{ij} = \begin{cases} \psi_1^l \phi_{l0} & \text{sur } U_l \cap U_0 \\ e^{T_{ij}^l} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Les relations (III.12) induisent le $\text{Col}_0(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$ -isomorphisme suivant

$$\mathcal{M}[\kappa_{ij}] \stackrel{\text{C}_0}{\cong} \mathcal{M}[\phi_{ij}]. \quad (\text{III.13})$$

Soit, désormais, le 1-cocycle suivant

$$\tilde{\kappa}_{ij} = \begin{cases} \psi_1^l \phi_{l0} & \text{sur } U_l \cap U_0 \\ \text{Id} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Soit $\tilde{\mathcal{M}} \in \text{Col}_0(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$ défini par $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}[e_{ext}^{T_{ij}}]$. Il vient

$$\tilde{\mathcal{M}}[\zeta^1 \tilde{\kappa}_{ij}] = \mathcal{M}[e_{ext}^{T_{ij}}][\zeta^1 \tilde{\kappa}_{ij}] \quad (\text{III.14})$$

$$\stackrel{\text{C}_0}{\cong} \mathcal{M}[e_{ext}^{T_{ij}} \tilde{\kappa}_{ij}] \quad (\text{III.15})$$

$$= \mathcal{M}[\kappa_{ij}]. \quad (\text{III.16})$$

En dehors des $U_l \cap U_0$, les composantes du cocycle $(\zeta^1 \tilde{\kappa}_{ij})$ sont égales à l'identité. La composante de 0-cocycle ψ_l est un germe d'automorphisme dans la classe $\mathcal{G}_{Z_l}^0$. Or par construction, la réunion des croix Z_l de \mathcal{M}_l coïncide avec la réunion de la croix $Z[e_{ext}^{T_{ij}}]$ et de la famille des germes induits par D_0 au voisinage de chaque point c_l . Ainsi, chaque composante de cocycle $\zeta^1 \tilde{\kappa}_{l0} = \zeta^1 \psi_1^l \phi_{l0}$ est un germe d'automorphisme le long de $U_l \cap U_0$ appartenant à la classe $\mathcal{G}_{Z[e_{ext}^{T_{ij}}]}^0$ ¹. Maintenant, les faisceaux d'idéaux $\mathfrak{I}_{\tilde{Z}}$ et $\mathfrak{M}_{\tilde{Z}}^1$ coïncident aux points réguliers de \tilde{D}_0 . Dès lors, les faisceaux $\mathcal{G}_{\tilde{Z}}^1$ et $\mathcal{G}_{\tilde{Z}}^0$ sont égaux aux points réguliers de \tilde{D}_0 . Le 1-cocycle $(\zeta^1 \tilde{\kappa}_{ij})$ est en fait à valeurs dans $\mathcal{G}_{\tilde{Z}}^1$. L'arbre $\tilde{\mathcal{M}}[\zeta^1 \tilde{\kappa}_{ij}]$ appartient donc à $\text{Col}_1(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{Z}, \tilde{\mathcal{U}})$. Le corollaire (III.2.3) assure alors qu'il existe un $\mathcal{F}[e_{ext}^{T_{ij}}]$ -cobordisme élémentaire entre $\tilde{\mathcal{M}}$ et $\tilde{\mathcal{M}}[\zeta^1 \tilde{\kappa}_{ij}]$ défini par un 1-cocycle $(e^{\tilde{T}_{ij}}) \in Z^1(\tilde{\mathcal{U}}, \mathfrak{I}_{\tilde{Z}} \mathcal{X}_{\mathcal{F}[e_{ext}^{T_{ij}}], \tilde{Z}})$. De plus, d'après les propriétés (III.13) et (III.16), on dispose de l'isomorphisme

$$\mathcal{N} \stackrel{\text{C}_0}{\cong} \tilde{\mathcal{M}}[\zeta^1 \tilde{\kappa}_{ij}].$$

¹C'est cette propriété qui fait fonctionner la récurrence et qui explique l'utilisation d'un germe de croix dans nos constructions.

Finalement, on obtient un cobordisme entre \mathcal{N} et \mathcal{M} défini par

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &\stackrel{\mathcal{C}_0}{\cong} \tilde{\mathcal{M}}[e^{\tilde{T}_{ij}}] \\ \tilde{\mathcal{M}} &\stackrel{\mathcal{C}_0}{\cong} \mathcal{M}[e^{\tilde{T}_{ij}}].\end{aligned}$$

Si, maintenant, les \mathcal{F}_l -cobordismes ne sont pas élémentaires, on les décompose en suites de cobordismes élémentaires. On peut supposer, quitte à prolonger par des cobordismes triviaux, que tous les cobordismes sont de mêmes longueurs. On obtient donc le diagramme

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 &= \mathcal{M}_1^1 \xrightarrow{\mathcal{F}_1^1, Z_1^1} \mathcal{M}_1^2 \cdots \mathcal{M}_1^{p-1} \xrightarrow{\mathcal{F}_1^{p-1}, Z_1^{p-1}} \mathcal{M}_1^p \stackrel{\mathcal{C}_0}{\cong} \mathcal{N}_1, \\ \mathcal{M}_2 &= \mathcal{M}_2^1 \xrightarrow{\mathcal{F}_2^1, Z_2^1} \mathcal{M}_2^2 \cdots \mathcal{M}_2^{p-1} \xrightarrow{\mathcal{F}_2^{p-1}, Z_2^{p-1}} \mathcal{M}_2^p \stackrel{\mathcal{C}_0}{\cong} \mathcal{N}_2, \\ &\vdots \\ \mathcal{M}_N &= \mathcal{M}_N^1 \xrightarrow{\mathcal{F}_N^1, Z_N^1} \mathcal{M}_N^2 \cdots \mathcal{M}_N^{p-1} \xrightarrow{\mathcal{F}_N^{p-1}, Z_N^{p-1}} \mathcal{M}_N^p \stackrel{\mathcal{C}_0}{\cong} \mathcal{N}_N,\end{aligned}$$

où les \mathcal{F}_l^k et Z_l^k pour $l \geq 1$ désignent naturellement les feuilletages et germes de croix images par les cobordismes successifs. Soit $(e^{T_{ij}^{k,l}})$ le cocycle définissant le cobordisme élémentaire

$$\mathcal{M}_l^k \xrightarrow{\mathcal{F}_l^k, Z_l^k} \mathcal{M}_l^{k+1}$$

où $(T_{ij}^{k,l})$ appartient à $Z^1(\mathcal{U}_l^k, \mathcal{J}_{Z_l^k} \mathcal{X}_{\mathcal{F}_l^k, Z_l^k})$. Pour $1 \leq k \leq p-2$, on considère les arbres $\dot{\mathcal{M}}^k$ définis par $\dot{\mathcal{M}}^1 = \mathcal{M}$ et

$$\dot{\mathcal{M}}^{k+1} = \dot{\mathcal{M}}^k[e^{T_{ij}^{k,l}}]_{ext}$$

avec

$$(e^{T_{ij}^{k,l}})_{ext} = \begin{cases} \text{Id} & \text{sur } U_l^{k,l} \cap U_0^{k,l} \\ e^{T_{ij}^{k,l}} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ici, $\mathcal{U}^{k,l}$ désigne le recouvrement distingué induit par les collages successifs

$$\mathcal{U}^{k+1,l} = \mathcal{U}^{k,l}[e^{T_{ij}^{k,l}}]_{ext}$$

Par construction, les relations précédentes fournissent un \mathcal{F} -cobordisme entre \mathcal{M} et $\dot{\mathcal{M}}^{p-1}$. De plus, pour tout l , l'arbre $\dot{\mathcal{M}}_l^{p-1}$ obtenu comme restriction de l'arbre $\dot{\mathcal{M}}^{p-1}$ au-dessus de la singularité l est isomorphe à \mathcal{M}_l^{p-1} . De même, le feuilletage $\dot{\mathcal{F}}_l^{p-1}$ défini par

$$\dot{\mathcal{F}}_l^{p-1} = \mathcal{F}^1[e^{T_{ij}^{p-1}}]_{ext}[\cdots][e^{T_{ij}^{p-1}}]_{ext} \Big|_{\dot{\mathcal{M}}_l^{p-1}}$$

est isomorphe à \mathcal{F}_l^{p-1} . On est ramené ainsi au problème élémentaire pour passer de l'arbre $\dot{\mathcal{M}}^{p-1}$ à $\mathcal{M}^p = \mathcal{N}$ avec un $\mathcal{F}^1[e^{T_{ij}^{p-1}}]_{ext}[\cdots][e^{T_{ij}^{p-1}}]_{ext}$ -cobordisme. Ce dernier cas ayant déjà été traité, la preuve du résultat de cobordisme dans $\text{Col}_0(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$ est achevée.

□

III.3 Théorème de réalisation.

Cette partie se concentre sur la preuve du résultat suivant : soit \mathcal{F} un feuilletage de type courbe généralisée marquée non-dicritique sur un arbre \mathcal{M} et \mathcal{M}' un arbre marqué quelconque.

Théorème III.3.1 (Théorème de réalisation). *Si les arbres \mathcal{M} et \mathcal{M}' sont conjugués par une conjugaison compatible aux marquages alors il existe \mathcal{F}' un feuilletage marqué sur \mathcal{M}' tel que \mathcal{F} et \mathcal{F}' soient les fibres d'une déformation isoholonomique marquée.*

La démonstration comprend deux étapes : dans un premier moment, on met en évidence un *cocycle de collage* liant les arbres \mathcal{M} et \mathcal{M}' à l'aide d'un résultat dû à M. Seguy. Puis, on *prépare* ce cocycle de façon à appliquer le théorème de cobordisme précédemment établi.

III.3.1 Première étape : préparation du cocycle.

Dans sa thèse, M. Seguy montre le résultat suivant :

Théorème III.3.2 ([37]). *Soit \mathcal{F} un feuilletage de type courbe généralisée marquée non-dicritique sur un arbre \mathcal{M} et \mathcal{M}' un arbre marqué tel que les arbres \mathcal{M} et \mathcal{M}' soient conjugués par une conjugaison compatible aux marquages. Alors il existe une déformation isoholonomique marquée de base \mathbb{D} telle que la fibre en 0 est le feuilletage \mathcal{F} et la fibre en 1 est un feuilletage marqué sur un arbre dont le diviseur est conjugué à celui de \mathcal{M}' par une conjugaison compatible aux marquages.*

Il est à noter que le résultat (III.3.1) contient le théorème de M. Seguy : en effet, dans (III.3.2), on déforme le feuilletage \mathcal{F} vers un feuilletage défini sur un arbre dont on ne contrôle *a priori* que le diviseur ; tandis que dans (III.3.1), on maîtrise non seulement le diviseur mais aussi le voisinage du diviseur, c'est-à-dire, l'arbre tout entier.

En utilisant (III.3.2), on peut effectuer une première déformation isoholonomique du feuilletage \mathcal{F} conduisant à un feuilletage défini sur un arbre dont le diviseur est conjugué au diviseur de \mathcal{M}' . Ainsi sans perte de généralité, les diviseurs \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont supposés conjugués par une conjugaison h compatible aux marquages. Pour chaque composante D , on considère une fibration π_D transverse à D

$$\pi_D : T(D) \longrightarrow D$$

où $T(D)$ est un voisinage tubulaire de D . On suppose, de plus, que la trace dans $T(D)$ des composantes de \mathcal{D} transverses à D est une réunion de fibres de π_D . On effectue la même construction pour les composantes de \mathcal{D}' . Un simple calcul en coordonnées permet de montrer le lemme suivant :

Lemme III.3.3. *Il existe une famille d'applications $\{H_D\}_{D \in \text{Comp}(\mathcal{D})}$ telle que, pour tout D appartenant à $\text{Comp}(\mathcal{D})$, le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc} T(D) & \xrightarrow{H_D} & (T(h(D))) \\ \pi_D \downarrow & & \pi_{h(D)} \downarrow \\ D & \xrightarrow{h|_D} & h(D) \end{array}$$

Notons $\text{Comp}(\mathcal{D})^2$ l'ensemble $\{(D, D') \in \text{Comp}(\mathcal{D})^2 \mid D \cap D' \neq \emptyset\}$ et considérons le germe de variété défini par

$$\tilde{\mathcal{M}} = \coprod_{D \in \text{Comp}(\mathcal{D})} T(D) \Big/ (x \sim H_D^{-1} H_{D'} x)_{(D, D') \in \text{Comp}(\mathcal{D})^2}.$$

Ici, le collage opéré est de nature différente de celui amenant à la construction des catégories Col_n . En effet, $\tilde{\mathcal{M}}$ est obtenu par collage le long de voisinages tubulaires des composantes du diviseur. Ceux-ci s'intersectent le long de polydisques. A contrario, les intersections des ouverts d'un recouvrement distingué sont des tores pleins. Néanmoins, la variété $\tilde{\mathcal{M}}$ reste le voisinage d'un diviseur $\tilde{\mathcal{D}}$ et $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{D}}, \tilde{\Sigma})$ un arbre marqué biholomorphe à l'arbre $(\mathcal{M}', \mathcal{D}', \Sigma')$, la famille $(H_D)_{D \in \text{Comp}(\mathcal{D})}$ induisant un biholomorphisme compatible aux marquages.

Afin d'appliquer les résultats de la première partie, nous allons montrer qu'il existe un arbre $\tilde{\mathcal{M}}$ vérifiant le théorème de réalisation tel que $\tilde{\mathcal{M}}$ appartienne $\text{Col}_0(\tilde{\mathcal{M}}, Z, \mathcal{U})$ pour une croix et un recouvrement distingué bien choisis.

Notons $s_{DD'}$ la singularité de \mathcal{D} à l'intersection des composantes D et D' et $\phi_{DD'}$ l'automorphisme $H_D^{-1} H_{D'}$.

Lemme III.3.4 (Préparation du cocycle). *Il existe deux familles $\{\Delta_{DD'}\}$ et $\{\phi_D\}$ de germes d'automorphismes telles que*

- $\Delta_{DD'}$ est défini au voisinage de $s_{DD'}$ et laisse invariante chaque feuille locale ;
- ϕ_D est un germe le long de D qui fixe chaque point de D ;
- le germe d'automorphisme

$$\phi_{D'}^{-1} \circ \Delta_{DD'} \circ \phi_{DD'} \circ \phi_D$$

est tangente à l'identité au point $s_{DD'}$.

Démonstration: Considérons la métrique standard d sur l'arbre dual pondéré $\mathbb{A}^*[\mathcal{M}, \mathcal{D}, \Sigma]$ et fixons D_0 un sommet. On définit le graphe \mathbb{A}_n^* , $n \leq 0$ comme le sous-graphe de $\mathbb{A}^*[\mathcal{M}, \mathcal{D}, \Sigma]$ dont l'ensemble des sommets est à une distance plus petite que n de D_0 . Les graphes \mathbb{A}_n^* sont connexes et recouvrent l'arbre dual en entier. Étant donnée la famille $\{\phi_{DD'}\}$, pour $n \geq 0$, on considère la sous famille $\{\phi_{DD'}^n\}_n$ définie par

$$\phi_{DD'}^n = \phi_{DD'}, \quad DD' \text{ étant une arête de } \mathbb{A}_n^*$$

Nous allons montrer par récurrence sur n le résultat du lemme pour la sous famille $\{\phi_{DD'}^n\}$. Pour $n = 0$, le résultat est évident et on fixe ϕ_{D_0} égal à l'identité. Supposons le résultat prouvé pour n . Soient les familles $\{\Delta_{DD'}\}$ et $\{\phi_D\}$ telles que pour toute arête DD' du graphe \mathbb{A}_n^* , l'application

$$\phi_{D'}^{-1} \circ \Delta_{DD'} \circ \phi_{DD'} \circ \phi_D$$

soit tangente à l'identité en $s_{DD'}$. Soit $D_i D_j$ une arête de \mathbb{A}_{n+1}^* qui n'est pas dans \mathbb{A}_n^* reliant les sommets D_i et D_j , $D_i \notin \mathbb{A}_n^*$. Pour montrer le lemme, il faut construire des automorphismes ϕ_{D_j} et $\Delta_{D_i D_j}$ satisfaisant les conditions recherchées. On dispose pour cela des propriétés suivantes :

Propriété III.3.1. *Soit s un point singulier de \mathcal{D} et $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Il existe un germe d'automorphisme Δ au voisinage de s laissant globalement invariante chaque feuille locale de \mathcal{F} tel que, dans des coordonnées locales adaptées, l'application tangente vérifie*

$$T_s\Delta = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

De plus pour tout β appartenant à \mathbb{C}^ , pour toute composante D et tout point singulier du diviseur c appartenant à D , il existe un germe d'automorphisme ϕ au voisinage de D fixant chaque point de D , laissant globalement invariantes les composantes de \mathcal{D} transverses à D et vérifiant dans des coordonnées locales adaptées²*

$$T_c\phi = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration: La singularité du feuilletage au point c est donnée par une 1-forme qui s'écrit en coordonnées adaptées

$$\lambda a(x, y)dy + yb(x, y)dx$$

où $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $a(0, 0) = b(0, 0) = 1$. Le flot du champs $X = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{b}{\lambda a} \frac{\partial}{\partial y}$ au temps ν avec $e^\nu = \alpha$ définit un germe d'automorphisme Δ qui vérifie la propriété annoncée.

Pour construire l'automorphisme ϕ , on remarque que les coordonnées algébriques associées au processus d'éclatements s'écrivent au voisinage de D respectivement (x_1, y_1) et (x_2, y_2) avec le changement de coordonnées

$$x_1 = y_2 x_2^N \quad y_1 = \frac{1}{x_2}$$

Dans ces systèmes de coordonnées, les composantes du diviseur qui sont transverses à D ont pour équations locales des équations de la forme $\{y_1 = cst\}$ et $\{x_2 = cst\}$. On définit ϕ en coordonnées par

$$(x_1, y_1) \longrightarrow (\beta x_1, y_1)$$

Dans les coordonnées (x_2, y_2) , le biholomorphisme ϕ s'écrit

$$(x_2, y_2) \longrightarrow (x_2, \beta y_2)$$

et se prolonge ainsi au voisinage de D . De plus, il vérifie visiblement les conditions demandées.

□

Considérons maintenant le germe d'automorphisme $\phi_{D_i D_j} \circ \phi_{D_i}$ au voisinage de $s_{D_i D_j}$. Dans des coordonnées adaptées, sa différentielle au point c_{ij} s'écrit $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. D'après la propriété (III.3.1), il existe un germe d'automorphisme Δ_{ij} au voisinage de $s_{D_i D_j}$ laissant invariante

²Ici, on demande en plus que la première coordonnée corresponde à la variable transverse au diviseur.

chaque feuille locale de \mathcal{F} et un germe d'automorphisme ϕ_j le long de D_j laissant invariant le diviseur, fixant chaque point de D_j tels que

$$T_{s_{D_i D_j}}(\Delta_{D_i D_j}^{-1} \circ \phi_{D_j})(c_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Dès lors, on obtient la relation

$$T_{s_{D_i D_j}}(\phi_{D_j}^{-1} \circ \Delta_{D_i D_j} \circ \phi_{D_i D_j} \circ \phi_{D_i})(s_{D_i D_j}) = \text{Id}.$$

Comme l'arbre dual ne présente pas de cycle, on peut répéter l'opération pour chaque arête de $\mathbb{A}_{n+1}^* \setminus \mathbb{A}_n^*$ sans rencontrer d'incompatibilité dans la construction. Ce qui prouve le lemme pour le sous-graphe \mathbb{A}_{n+1}^* et achève la preuve. □

III.3.2 Seconde étape : passage à un recouvrement fin distingué.

Étant donnée la famille $\{\Delta_{DD'}\}$ du lemme précédent, posons

$$\dot{\mathcal{M}} = \coprod_{D \in \text{Comp}(\mathcal{D})} T(D) \Big/ (x \sim \Delta_{DD'}^{-1} x).$$

La variété $\dot{\mathcal{M}}$ est un arbre voisinage d'un diviseur $\dot{\mathcal{D}}$. De la relation

$$\phi_{DD'} = \Delta_{DD'}^{-1} \circ (\Delta_{DD'} \circ \phi_{DD'}),$$

et de la preuve de la propriété (II.3.3), on déduit l'isomorphisme

$$\tilde{\mathcal{M}} \simeq \coprod_{\dot{D} \in \text{Comp}(\dot{\mathcal{D}})} T(\dot{D}) \Big/ (x \sim \Delta_{DD'} \circ \phi_{DD'} x).$$

Notons $\theta_{DD'}$ l'automorphisme au voisinage de $s_{DD'}$ défini par la composition

$$\phi_{D'}^{-1} \circ \Delta_{DD'} \circ \phi_{DD'} \circ \phi_D.$$

D'après de la preuve de la propriété (II.3.2), l'égalité $\phi_{D'} \theta_{DD'} \phi_D^{-1} = \Delta_{DD'} \circ \phi_{DD'}$ se traduit en isomorphismes d'arbres

$$\coprod_{\dot{D} \in \text{Comp}(\dot{\mathcal{D}})} T(\dot{D}) \Big/ (\theta_{DD'}) \simeq \coprod_{\dot{D} \in \text{Comp}(\dot{\mathcal{D}})} T(\dot{D}) \Big/ (\Delta_{DD'} \circ \phi_{DD'}) \simeq \tilde{\mathcal{M}}.$$

Une dernière transformation sur $\theta_{DD'}$ va permettre d'appliquer les résultats de la partie III.1 en fournissant un recouvrement distingué adapté à la situation :

Propriété III.3.2. Soit θ un germe d'automorphisme tangent à l'identité en 0 laissant les axes $\{x = 0\}$ et $\{y = 0\}$ invariants. Alors il existe une décomposition

$$\theta = \theta^0 \circ \theta^1, \quad \theta^0 = \begin{pmatrix} x + x^2(\dots) \\ y + xy(\dots) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \theta^1 = \begin{pmatrix} x + xy(\dots) \\ y + y^2(\dots) \end{pmatrix}.$$

Démonstration: On écrit θ en coordonnées adaptées $\theta(x, y) = \begin{pmatrix} xe^{Ax+By} \\ ye^{Cx+Dy} \end{pmatrix}$. En calculant,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} xe^{Ax} \\ ye^{Cx} \end{pmatrix}}_{\theta^0} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} xe^{Uy} \\ ye^{Vy} \end{pmatrix}}_{\theta^1} \text{ on constate qu'il suffit de choisir,}$$

$$U = \theta^{0(-1)} \circ (Be^{-Cx}) \quad \text{et} \quad V = \theta^{0(-1)} \circ (De^{-Cx})$$

pour obtenir la décomposition souhaitée. □

On note $T(D)^*$ le voisinage tubulaire de D privé des composantes irréductibles de \mathcal{D} transverses à D . L'ouvert $T(D)^*$ est un voisinage de D privé des singularités de \mathcal{D} dans \mathcal{M} . Soit \mathfrak{U} le recouvrement défini par

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_D &= T(D)^* && \text{pour } D \in \text{Comp}(\mathcal{D}) \\ \mathfrak{U}_{DD'} &= T(D) \cap T(D') && \text{pour } (D, D') \in \text{Comp}(\mathcal{D})^2 \end{aligned}$$

On effectue alors la décomposition prescrite par le lemme $\theta_{DD'} = \theta_{DD'}^0 \circ \theta_{DD'}^1$. Nous opérons un passage au recouvrement distingué $\{\mathfrak{U}_D, \mathfrak{U}_{DD'}\}$ par l'intermédiaire d'un recouvrement plus fin que le recouvrement distingué et que le recouvrement en voisinages tubulaires. Sur l'union disjointe \mathfrak{N} définie par

$$\mathfrak{N} := \coprod_{\substack{D \in \text{Comp}(\mathcal{D}) \\ (D, D') \in \text{Comp}(\mathcal{D})^2}} \mathfrak{U}_D \cup \mathfrak{U}_{DD'} \times \{0\} \cup \mathfrak{U}_{DD'} \times \{1\}.$$

opère l'application \mathfrak{H} construite de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}|_{\mathfrak{U}_D} &= \text{Id} \\ \mathfrak{H}|_{\mathfrak{U}_{DD'} \times \{0\}} &= \theta_{DD'}^{0(-1)} \\ \mathfrak{H}|_{\mathfrak{U}_{DD'} \times \{1\}} &= \theta_{DD'}^1 \end{aligned}$$

On définit sur \mathfrak{N} les deux relations d'identification suivantes (voir Fig. III.2)

$$1. \mathcal{R}_1 : \begin{cases} (x, y) \in \mathfrak{U}_D \times \{\mathfrak{U}_{DD'} \times \{\epsilon\}\}, \epsilon = 0, 1 & x\mathcal{R}_1 y \Leftrightarrow x = y \\ (x, y) \in \{\mathfrak{U}_{DD'} \times \{0\}\} \times \{\mathfrak{U}_{DD'} \times \{1\}\} & x\mathcal{R}_1 y \Leftrightarrow x = \theta_{DD'} y \end{cases}$$

$$2. \mathcal{R}_2 : \begin{cases} (x, y) \in \mathcal{U}_D \times \{\mathcal{U}_{DD'} \times \{0\}\} & x\mathcal{R}_2 y \Leftrightarrow x = \theta_{DD'}^1 y \\ (x, y) \in \mathcal{U}_D \times \{\mathcal{U}_{DD'} \times \{1\}\} & x\mathcal{R}_2 y \Leftrightarrow x = \theta_{DD'}^{0(-1)} y \\ (x, y) \in \{\mathcal{U}_{DD'} \times \{0\}\} \times \{\mathcal{U}_{DD'} \times \{1\}\} & x\mathcal{R}_2 y \Leftrightarrow x = y \end{cases}$$

Par construction, l'application \mathfrak{H} devient un isomorphisme sur les quotients de \mathfrak{N} par la relation \mathcal{R}_1 à la source et par \mathcal{R}_2 au but. La figure (III.2) représente horizontalement les relations d'identifications et verticalement les composantes de l'application \mathfrak{H} .

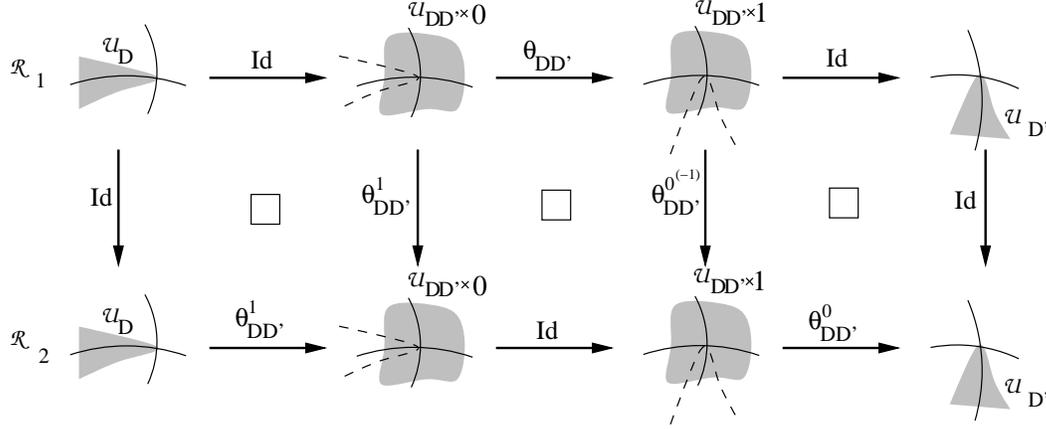


FIG. III.2 – Diagramme du passage à un recouvrement fin.

De plus, il n'est pas difficile de vérifier les isomorphismes suivants :

$$\mathfrak{N}/\mathcal{R}_1 \simeq \coprod T(\dot{D}) / (\theta_{DD'}), \quad \mathfrak{N}/\mathcal{R}_2 = \dot{\mathcal{M}}[\theta_{DD'}^e]$$

Ainsi, les différents isomorphismes ci-dessus aboutissent à la relation suivante

$$\tilde{\mathcal{M}} \simeq \dot{\mathcal{M}}[\theta_{DD'}^e]. \quad (\text{III.17})$$

Les applications $\Delta_{DD'}$ laissent invariante chaque feuille locale de \mathcal{F} . La description dans [1] des germes d'automorphismes laissant invariante chaque feuille locale d'une singularité réduite avec deux valeurs propres non-nulles assure que ces automorphismes s'écrivent

$$(x, y) \rightarrow \phi_X^{t(x,y)}(x, y)$$

où $t(x, y)$ est un germe de fonction, X un champ tangent au feuilletage et ϕ_X^t le flot de X à l'instant t . Ainsi, pour tout D, D' , on peut écrire

$$\Delta_{DD'}(x, y) = \phi_{X_{DD'}}^{t_{DD'}(x,y)}(x, y)$$

D'après l'interprétation cohomologique des déformations isoholonomiques, la déformation définie par

$$\dot{\mathcal{M}}_s = \coprod_{D \in \text{Comp}(\mathcal{D})} T(D) / \left((x, y) \sim \phi_{X_{DD'}}^{st_{DD'}x}(x, y) \right)$$

est le support d'une déformation isoholonomique du feuilletage \mathcal{F} dont la fibre en $s = 1$ est l'arbre $\dot{\mathcal{M}}$. Ainsi, $\dot{\mathcal{M}}$ admet un feuilletage $\dot{\mathcal{F}}$ relié à \mathcal{F} par une déformation isoholonomique. L'écriture du lemme (III.3.2) assure que les automorphismes $\theta_{DD'}^\epsilon$, $\epsilon = 0, 1$ sont des sections du faisceau $\mathcal{G}_{\dot{Z}}^0$ définies au-dessus de $\mathfrak{U}_{DD'}$ pour un choix quelconque de croix \dot{Z} adaptée à $\dot{\mathcal{F}}$ et dont les points d'attache n'appartiennent à aucun ouvert $\mathfrak{U}_{DD'}$. L'arbre $\tilde{\mathcal{M}}$ est donc biholomorphe à un élément de la catégorie $\text{Col}_0(\dot{\mathcal{M}}, \dot{Z}, \mathcal{U})$ où $\dot{\mathcal{M}}$ est feuilleté par un feuilletage de type courbe généralisée non-dicritique $\dot{\mathcal{F}}$. Les résultats de la partie précédente assurent que $\tilde{\mathcal{M}}$ est $\dot{\mathcal{F}}$ -cobordant à $\dot{\mathcal{M}}$. Ainsi, $\mathcal{M}' \simeq \tilde{\mathcal{M}}$ admet un feuilletage relié à $\dot{\mathcal{F}}$ et donc à \mathcal{F} par une déformation isoholonomique marquée. Ce qui achève la preuve du théorème de réalisation.

Chapitre IV

Théorème de réalisation à paramètres.

Soit K un compact connexe de \mathbb{C}^p . Nous supposons que K admet un système fondamental de voisinages ouverts connexes de Stein. Soit C un sous-ensemble analytique de K , c'est-à-dire, s'écrivant

$$C = \{p \in K \mid f_1(p) = \dots = f_m(p) = 0\}$$

où les fonctions $\{f_i\}_{i=1,\dots,p}$ sont des fonctions analytiques complexes sur un voisinage de K . Il est à noter que nous n'imposons pas la connexité de C dans K . En particulier, nous pourrions choisir pour C un sous-ensemble analytique du bord de K , c'est-à-dire $K \setminus K^\circ$. Ce sous-ensemble analytique va être le support d'une condition de type *trivialité au bord* dans les constructions à suivre. Nous réalisons ici des déformations d'espace de paramètres K *analytiquement triviales* en un certain sens le long de C . Dans la pratique, le compact K sera le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ et $C \subset \overline{\mathbb{D}}$ le couple $\{-1, 1\}$.

IV.1 Arbres au-dessus de K .

Soit \mathcal{K} un voisinage ouvert connexe de K . Nous appelons ici *processus d'éclatements* au-dessus de \mathcal{K} la donnée d'un diagramme commutatif \mathbb{A}

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{M}^h & \xrightarrow{E^h} & \dots & \rightarrow & \mathcal{M}^j & \xrightarrow{E^j} & \mathcal{M}^{j-1} & \rightarrow & \dots & \xrightarrow{E^1} & \mathcal{M}^0 & = & (\mathbb{C}^{2+p}, \{0\} \times \mathcal{K}) & \xrightarrow{\pi} & (\mathbb{C}^p, \mathcal{K}) \\
 \cup & & & & \cup & & \cup & & & & \cup & & & & & \\
 \Sigma^h & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \Sigma^j & \rightarrow & \Sigma^{j-1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \Sigma^0 & = & \{0\} \times \mathcal{K} & & & \\
 \cup & & & & \cup & & \cup & & & & \cup & & & & & \\
 S^h & \rightarrow & \dots & \rightarrow & S^j & \rightarrow & S^{j-1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & S^0 & = & \{0\} \times \mathcal{K} & & &
 \end{array} \tag{IV.1}$$

où pour chaque $j = 0, \dots, h$: \mathcal{M}^j est une variété analytique complexe lisse de dimension $2 + p$, Σ^j est un sous-ensemble analytique fermé de \mathcal{M}^j de dimension p appelé *$j^{\text{ième}}$ lieu de singularités*, $S^j \subset \Sigma^j$ est une sous-variété analytique lisse fermée ayant un nombre fini de composantes connexes appelée *$j^{\text{ième}}$ centre d'éclatement* tels qu'en notant,

$$E_j := E^0 \circ \dots \circ E^j, \quad \pi_j := \pi \circ E_j, \quad \text{et} \quad \mathcal{D}^j := E_j^{-1}(S^0),$$

avec $j = 0, \dots, h$ on ait :

1. π est la projection sur le second facteur,
2. chaque E^{j+1} est l'application d'éclatement de centre S^j ,
3. chaque S^j est une union de composantes irréductibles de Σ^j ,
4. chaque Σ^j est lisse et contenu dans \mathcal{D}^j . De plus, la restriction de π_j à chaque composante connexe de Σ^j est un biholomorphisme sur \mathcal{K} , c'est-à-dire

$$\Sigma^j \xrightarrow{\pi_j} \mathcal{K} \times H^0(\Sigma^j).$$

5. pour chaque $j = 1, \dots, h$ la restriction de π_j à chaque composante connexe de S^j est un biholomorphisme sur \mathcal{K} , c'est-à-dire

$$S^j \xrightarrow{\pi_j} \mathcal{K} \times H^0(S^j).$$

Un *processus d'éclatements au-dessus du compact K* est la donnée d'un germe de processus d'éclatements au-dessus d'un voisinage de K . L'entier h est appelé *hauteur* du processus d'éclatement, E_h le *morphisme total* de l'éclatement et le quadruplet $(\mathcal{M}^h, \mathcal{D}^h, \Sigma^h, \pi_h)$ la *cime* du processus d'éclatements.

Deux processus d'éclatements de cime \mathcal{M} et \mathcal{M}' au-dessus de K sont dits *conjugués* s'il existe le long de chaque diviseur \mathcal{D}^j des biholomorphismes

$$\phi_j : (\mathcal{M}^j, \mathcal{D}^j) \longrightarrow (\mathcal{M}'^j, \mathcal{D}'^j), \quad j = 0, \dots, h$$

qui envoient lieux singuliers sur lieux singuliers et centres sur centres et qui commutent aux applications d'éclatements et respectent les projections sur K . Autrement dit, pour tout $j = 0, \dots, h$

$$E^{j'} \circ \phi_j = \phi_{j-1} \circ E^j \quad \text{et} \quad \pi'_j \circ \phi_j = \pi_j.$$

Toute partie J de K induit un processus d'éclatements au-dessus de J défini par restriction du diagramme commutatif (IV.1) à $\pi_*^{-1}(J)$:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{M}_J^h = \mathcal{M}^h \cap \pi_h^{-1}(J) & \xrightarrow{E^h} & \dots & \xrightarrow{E^1} & \mathcal{M}_J^0 = \mathcal{M}_J^0 \cap \pi_0^{-1}(J) & = & (\mathbb{C}^{2+p}, \{0\} \times J) \\ & \cup & & & \cup & & \cup \\ \Sigma_J^h = \Sigma^h \cap \pi_h^{-1}(J) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \Sigma_J^0 = \Sigma^0 \cap \pi_0^{-1}(J) & = & \{0\} \times J \\ & \cup & & & \cup & & \cup \\ S_J^h = S^h \cap \pi_h^{-1}(J) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & S_J^0 = S^0 \cap \pi_0^{-1}(J) & = & \{0\} \times J \end{array} .$$

Un *arbre* $(\mathcal{M}, \mathcal{D}, \Sigma, \pi)$ *au-dessus de K* est un germe de variété \mathcal{M} au voisinage d'un diviseur \mathcal{D} muni d'une submersion $\pi : \mathcal{M} \rightarrow K$ tel qu'il existe un biholomorphisme ϕ entre $(\mathcal{M}, \mathcal{D}, \Sigma, \pi)$ et la cime d'un processus d'éclatements $(\mathcal{M}^h, \mathcal{D}^h, \Sigma^h, \pi_h)$,

$$\phi(\mathcal{M}, \mathcal{D}) \rightarrow (\mathcal{M}^h, \mathcal{D}^h), \quad \phi(\Sigma) = \Sigma^h, \quad \pi_h \circ \phi = \pi.$$

IV.2 Familles équisingulières de germes de courbes.

Pour obtenir un résultat plus fin qu'une simple généralisation du résultat sans paramètre, nous souhaitons obtenir une construction contrôlant la déformation des séparatrices sous-jacente à la déformation du feuilletage. Cet objectif explique que nous nous arrêtons un instant sur la notion de *familles équisingulières de germes de courbes*.

Une famille analytique de germes de courbes $\{S_t\}_{t \in K}$ est équisingulière lorsqu'elle admet une désingularisation *en famille*, précisément, lorsqu'il existe un processus d'éclatements au-dessus de K tel que, pour tout t appartenant à K , la restriction de ce processus au-dessus de t est exactement le processus de réduction de S_t . Une telle famille est topologiquement triviale : il existe une famille analytique d'homéomorphismes $\{\phi_t\}_{t \in K}$ vérifiant

$$\phi_t^* S_t = S_{t_0} \quad \text{pour tout } t \in K,$$

t_0 étant fixé dans K .

Nous commençons par rappeler un certain nombre de résultats concernant la classification topologique et analytique des germes de courbes et des germes de familles équisingulières de courbes.

IV.2.1 Paires de Puiseux et réduction.

Soit S un germe de courbe irréductible singulier à l'origine de \mathbb{C}^2 et f un équation réduite de S . La *multiplicité de S* notée $\nu_0(S)$ est la multiplicité de f à l'origine. De plus, si $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$ est le diviseur de l'arbre de réduction de S et D une composante irréductible de \mathcal{D} , l'entier $\nu_D(S)$ désigne la multiplicité de E^*f en un point générique de D où E est le morphisme total du processus de réduction de S . Dans un système de coordonnées locales bien choisi, la courbe S admet le paramétrage suivant [16] :

$$\begin{aligned} x &= t^{\nu_0(S)} \\ y &= \sum_{n > \nu_0(S)} a_n t^n. \end{aligned}$$

Dans la famille de rationnels $\left\{ \frac{n}{\nu_0(S)} \mid a_n \neq 0 \right\}$ il y a nécessairement un terme non entier, sinon S serait lisse en 0. Soit $\beta_1 = \frac{m_1}{n_1}$ le plus petit élément de cette famille. On définit alors une suite de nombres rationnels par

$$\beta_{i+1} = \inf \left\{ \frac{n}{\nu_0(S)} \mid a_n \neq 0, \frac{n}{\nu_0(S)} > \beta_i = \frac{m_i}{n_i}, \frac{n}{\nu_0(S)} \notin \frac{1}{n_i} \mathbb{N} \right\}.$$

Cette suite contient au moins un terme et s'arrête dès lors que l'ensemble ci-dessus est vide. La suite des couples $(m_i, n_i)_{i=1, \dots, g}$ est appelée *la suite des paires de Puiseux* et est un invariant topologique de la courbe. Le résultat suivant dû à O. Zariski [45] précise ce point :

Proposition IV.2.1. *La suite des paires de Puiseux est le seul invariant topologique d'un germe de courbe irréductible. Il est équivalent à la donnée de l'arbre dual de l'arbre de réduction.*

Dans la situation d'un germe de courbe non-irréductible, l'arbre dual de l'arbre de réduction reste le seul invariant topologique de la courbe.

IV.2.2 Marquage des germes de courbes.

Soit S_0 un germe de courbe à l'origine de \mathbb{C}^2 .

Définition IV.2.1. *Soit S un germe de courbe topologiquement conjugué à S_0 . Un marquage de S par S_0 est une application de $\text{Comp}(S)$ vers $\text{Comp}(S_0)$ induite par un germe d'homéomorphisme de $(\mathbb{C}^2, 0)$ qui conjugue les courbes.*

En éclatant une fois l'origine de \mathbb{C}^2 , les composantes irréductibles d'un germe de courbe S se répartissent *en paquets* le long du diviseur exceptionnel D_0 , chaque paquet réunissant les composantes irréductibles partageant le même *cône tangent* : la transformée stricte \tilde{S} de S est une réunion s'écrivant

$$\tilde{S} = \bigcup_{\alpha \in D_0} \bigcup_{\substack{B \in \text{Comp}(S) \\ \mathcal{C}_B = \{\alpha\}}} \tilde{B}$$

où \mathcal{C}_B désigne le cône tangent de la composante irréductible B . Les deux germes de courbes S et S_0 ont des cônes tangents conjugués. Précisément, un résultat classique assure qu'il existe une bijection ϕ entre les \mathcal{C}_S et \mathcal{C}_{S_0} telle que, pour tout $p \in \mathcal{C}_S$, les germes de courbes

$$(D_0)_p \cup (\tilde{S})_p \quad \text{et} \quad (D_0)_{\phi(p)} \cup (\tilde{S}'_0)_{\phi(p)} \quad (\text{IV.2})$$

sont topologiquement conjugués. À partir du marquage de S par S_0 , on peut construire un marquage de $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$, arbre de réduction de S , par $(\mathcal{M}_0, \mathcal{D}_0)$, arbre de réduction de S_0 . Un germe d'homéomorphisme à l'origine de \mathbb{C}^2 ne se relève pas généralement aux arbres de réduction. Cependant, si la courbe S se réduit après un éclatement, par invariance topologique de l'arbre dual de la réduction [45], S_0 se réduit aussi après un éclatement. Le marquage est alors défini par

$$\begin{aligned} \sigma & : D \in \text{Comp}(\mathcal{D}) = \{D\} \mapsto D_0 \in \text{Comp}(\mathcal{D}_0) = \{D_0\} \quad \text{et} \\ \kappa & : p \in \Sigma = \mathcal{C}_S \mapsto \phi(p) \in \Sigma_0 = \mathcal{C}_{S_0}. \end{aligned}$$

Ainsi initialise-t-on une récurrence dont le pas d'induction relève de la remarque (IV.2). On aboutissant à un marquage de l'arbre de réduction de S par celui de S_0 . Visiblement, il est possible de poursuivre cette construction et l'on obtiendra ainsi un marquage de tout arbre cime d'un processus dominant de l'arbre de réduction de S .

Soit S et S' deux courbes marquées par S_0 et Ψ un homéomorphisme entre S et S' respectant le marquage. La construction précédente détermine ψ une conjugaison entre les arbres duaux des arbres cimes des processus de réduction de S et S' . On dispose du résultat classique suivant établi dans [45] :

Lemme IV.2.1. *Les multiplicités en $0 \in \mathbb{C}^2$ des germes de courbes S et S' sont égales et pour tout $D \in \text{Comp}(\mathcal{D})$, on dispose de la relation :*

$$\nu_D(S) = \nu_{\psi(D)}(S').$$

IV.2.3 Détermination finie pour les familles équisingulières de germes de courbes.

De façon générale, si $f : (X, V) \rightarrow (Y, p)$ est un morphisme quelconque de variétés complexes au voisinage d'un diviseur V tel que $V = f^{-1}(p)$, l'ensemble $\text{Att}(f, R)$ désigne l'intersection de V et de l'adhérence de $f^{-1}(R \setminus \{p\})$ dans X où R désigne un sous-ensemble de Y contenant p . Soit $S = (S_t)_{t \in K}$ une famille équisingulière de germes de courbes dans $(\mathbb{C}^2, 0)$ au-dessus de l'espace de paramètres K . Étant donné E le morphisme total d'un processus d'éclatements au-dessus de K

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathcal{M}^h & \xrightarrow{E^h} & \dots & \rightarrow & \mathcal{M}^j & \xrightarrow{E^j} & \mathcal{M}^{j-1} & \rightarrow & \dots & \xrightarrow{E^1} & \mathcal{M}^0 & = & (\mathbb{C}^{2+p}, \{0\} \times K) & \xrightarrow{\pi} & (\mathbb{C}^p, K) \\ \bigcup & & & & \bigcup & & \bigcup & & & & \bigcup & & & & & \\ \Sigma^h & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \Sigma^j & \rightarrow & \Sigma^{j-1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \Sigma^0 & = & \{0\} \times K & & & \\ \bigcup & & & & \bigcup & & \bigcup & & & & \bigcup & & & & & \\ S^h & \rightarrow & \dots & \rightarrow & S^j & \rightarrow & S^{j-1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & S^0 & = & \{0\} \times K & & & \end{array},$$

l'ensemble $\text{Att}(E, S) \subset \mathcal{M}^h$ est la réunion d'un nombre fini de sous-variétés lisses de codimension 2 dans \mathcal{M}^h deux à deux disjointes, chacune isomorphe à K via l'application $\pi \circ E$. Soit le morphisme $E_{n,S}$ défini par récurrence comme le morphisme total du processus d'éclatements décrit par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathcal{M}^{n+h} & \xrightarrow{E^{n+h}} & \dots & \rightarrow & \mathcal{M}^j & \xrightarrow{E^j} & \dots & \xrightarrow{E^1} & \mathcal{M}^h & \xrightarrow{E} & \mathcal{M}^0 \\ \bigcup & & & & \bigcup & & & & \bigcup & & \\ \Sigma^{n+h} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \Sigma^j & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \Sigma^h & & \\ \bigcup & & & & \bigcup & & & & \bigcup & & \\ \emptyset & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \text{Att}(E_{j,S}, S) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \text{Att}(E, S) & & \end{array} \quad . \quad (\text{IV.3})$$

Afin d'établir le théorème (V.2.4), nous montrons qu'à type topologique constant, toute famille équisingulière de courbes admet un *arbre fini de détermination*, c'est-à-dire, un processus d'éclatements du type $E_{n,S}$ déterminant la classe analytique de la famille équisingulière d'une façon que nous préciserons par la suite. En outre, toute famille équisingulière topologiquement équivalente à $\{S_t\}_{t \in K}$ admet un arbre de détermination topologiquement conjugué à celui de $\{S_t\}_{t \in K}$.

Désignons par I l'idéal des germes de fonctions nulles le long de $0 \times K \subset \mathbb{C}^{2+p}$. Nous rappelons d'abord un résultat classique de la théorie des germes de courbes dû à J.-N. Mather [26] : soit f un germe d'équation réduite d'une famille équisingulière de courbes au-dessus de K .

Lemme IV.2.2. *Il existe un entier n tel que, pour tout germe d'équation réduite g d'une famille équisingulière de germes de courbes au-dessus de K vérifiant*

$$f - g \in I^n,$$

g et f sont analytiquement conjugués.

L'entier minimal ayant cette propriété est un invariant topologique de la fonction f lié au nombre de Milnor de f . Nous allons utiliser ce résultat pour mettre en évidence l'arbre de détermination évoqué précédemment. Dans le cas particulier lisse, le résultat emprunte la forme suivante : soit A et F deux familles équisingulières au-dessus de K de courbe lisse transverses à l'origine de \mathbb{C}^2 . Désignons par E l'éclatement standard de centre $\{0\} \times K$.

Lemme IV.2.3. *Pour tout entier n et pour toute famille équisingulière de germes de courbes lisses G tels que*

$$\text{Att}(E_{n,F}, F) = \text{Att}(E_{n,F}, G),$$

il existe des équations respectives a , f et g de A , F et G telles que

$$f - g \in (a)^n \mathcal{O}_{\{0\} \times K}.$$

Démonstration: Comme A et F sont transverses, il existe un système de coordonnées au voisinage de $\{0\} \times K \in \mathbb{C}^{2+p}$ tel que $\{x = 0\}$ et $\{y = 0\}$ soient des équations respectives de A et F . Au-dessus d'un tel système de coordonnées et au voisinage du lieu d'attache de $E_{n,F}^*$, l'éclatement $E_{n,F}$ s'écrit

$$E_{n,F}(x, y, t) = (x, yx^n, t), \quad (x, y, t) \in \mathcal{M}^{n+1}$$

Toute équation \tilde{g} de la famille équisingulière G admet un développement en série de la forme :

$$\sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}} g_{\alpha, \beta}(t) x^\alpha y^\beta, \quad g_{\alpha, \beta} \in \mathcal{O}_{\{0\} \times K}$$

Supposons que pour tout $k < p < n$, la fonction g_{k0} soit la fonction nulle. Le relevé de \tilde{g} par l'application $E_{p,F}$ s'écrit

$$\sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}} g_{\alpha, \beta}(t) x^{\alpha+p\beta-p} y^\beta$$

et doit s'annuler le long de $\{x = y = 0\}$; ce qui impose à la fonction g_{p0} d'être la fonction nulle. Comme g_{00} est nulle, les coefficients g_{k0} pour $k < n$ sont identiquement nuls et l'on dispose de l'écriture

$$\tilde{g} = y \underbrace{\sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}} g_{\alpha, \beta}(t) x^\alpha y^{\beta-1}}_U + x^n A$$

où A appartient à $\mathcal{O}_{\{0\} \times K}$. La lissité de la famille équisingulière G assure que U est une unité. En posant $g = U^{-1}\tilde{g}$ qui est encore une équation de G , il vient

$$g - y = x^n \tilde{A},$$

ce qui prouve le lemme. □

Un argument cohomologique couplé aux lemmes (IV.2.2) et (IV.2.3) permet finalement d'établir la proposition suivante : soit E le morphisme total du processus de réduction *en famille* d'une famille équisingulière S .

Proposition IV.2.2. *Il existe un entier n tel que pour toute une famille équisingulière S' au-dessus de K topologiquement conjuguée à S , désingularisée par E et vérifiant*

$$\text{Att}(E_{n,S}, S) = \text{Att}(E_{n,S}, S'),$$

S' est analytiquement conjuguée à S . L'entier n minimal parmi ceux ayant cette propriété est un invariant topologique de la famille S .

Démonstration: Considérons des équations réduites f et g respectivement de S et S' . Soit $\Sigma = \{S_1, \dots, S_m\}$ l'ensemble des composantes connexes de $\text{Att}(E, S)$. Au voisinage de chaque composante S_i , $\{x_i = 0\}$ désigne une équation réduite locale du diviseur exceptionnel de E . Comme f et g sont topologiquement conjuguées, le lemme (IV.2.1) assure l'existence d'un entier p_i tel que les deux germes d'hypersurfaces au voisinage de S_i définies par les équations respectives

$$\left\{ \tilde{f}_i = x_i^{-p_i} E^*(f) = 0 \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \tilde{g}_i = x_i^{-p_i} E^*(g) = 0 \right\}$$

soient lisses. Le lemme (IV.2.3) appliqué à chaque couple de familles équisingulières de courbes lisses $\left((\tilde{f}_i, \tilde{g}_i) \right)_{i=1, \dots, m}$ détermine une famille d'unités $\{u_i\}_{i=1, \dots, m}$ telles

$$\tilde{f}_i - u_i \tilde{g}_i \in \mathfrak{I}^n.$$

Ainsi pour tout i , la fonction $E^*(f) - u_i E^*(g)$ appartient à l'idéal $\mathfrak{I}^{n+\min_i(p_i)}$. Maintenant, en dehors du lieu d'attache de la transformée stricte de S , la fonction $u = \frac{E^*(f)}{E^*(g)}$ est une unité qui satisfait à l'équation $E^*(f) - u E^*(g) = 0$. Cette construction fournit en somme un 0-cocycle d'unités $\{u_i\}_{i \in J}$ pour un certain recouvrement de Stein $\{U_i\}_{i \in J}$ du diviseur tel que

$$E^*(f) - u_i E^*(g) \in \mathfrak{I}^{n+\min_i(p_i)}(U_i). \quad (\text{IV.4})$$

De ces relations, on déduit que la fonction $u_i - u_j$ est une section sur l'ouvert $U_i \cap U_j$ du faisceau \mathfrak{I}^{m_n} où m_n est l'entier $n + \min_i(p_i) - \max_i(p_i)$. Or, il existe $\delta(p)$ qui tend vers l'infini avec p tel que l'image du morphisme naturel

$$H^1(\mathcal{D}, \mathfrak{I}^p) \rightarrow H^1(\mathcal{D}, \mathfrak{I}^{\delta(p)})$$

soit triviale [3]. Ainsi, il existe un 0-cocycle trivialisant le 1-cocycle $(u_i - u_j)$ dans le faisceau $\mathfrak{I}^{\delta(m_n)}$, l'équation cohomologique s'écrivant

$$u_i - u_j = \tilde{u}_i - \tilde{u}_j, \quad (\tilde{u}_i)_{i \in J} \in \mathcal{Z}^0\left(\{U_i\}_{i \in J}, \mathfrak{I}^{\delta(m_n)}\right).$$

Le germe global d'unité au voisinage de \mathcal{D} défini sur U_i par $U = u_i - \tilde{u}_i$ vérifie la relation

$$E^*(f) - U E^*(g) \in \mathfrak{I}^{\delta(m_n)}.$$

Cette relation descend au voisinage de $\{0\} \times K$ par le morphisme E et montre que la fonction $f - E_* U g$ est dans la $\delta(m_n)$ -ième puissance de l'idéal des fonctions nulles sur $\{0\} \times K$. Comme l'entier $\delta(m_n)$ tend vers l'infini avec n , le lemme (IV.2.2) assure que les fonctions f et $E_* U g$ et donc les familles équisingulières de courbes S et S' sont analytiquement conjuguées.

□

IV.3 Analogues à paramètres.

Nous allons introduire maintenant des analogues à paramètres des différents objets et notions considérés dans le chapitre (II). Nous serons délibérément succincts dans la mesure où la transposition est aisée dans la plupart des cas.

1. Soit $(\mathcal{M}_0, \mathcal{D}_0, \Sigma_0, \pi_0)$ un arbre au-dessus de K . Un *marquage de l'arbre* $(\mathcal{M}, \mathcal{D}, \Sigma, \pi)$ par l'arbre $(\mathcal{M}_0, \mathcal{D}_0, \Sigma_0, \pi_0)$ est la donnée d'un marquage de l'arbre $(\mathcal{M}_t, \mathcal{D}_t, \Sigma_t)$ par $(\mathcal{M}_{0t}, \mathcal{D}_{0t}, \Sigma_{0t})$ pour un certain paramètre t dans K . Le choix du paramètre $t \in K$ n'a pas d'importance car tout marquage de la fibre au-dessus de t induit un marquage canonique de la fibre au-dessus de tout autre point de K par conjugaison \mathcal{C}^∞ de \mathcal{M} à l'arbre produit $\mathcal{M}_t \times K$.
2. L'*arbre dual pondéré marqué* d'un arbre $(\mathcal{M}, \mathcal{D}, \Sigma, \pi)$ est l'arbre dual pondéré marqué de $(\mathcal{M}_t, \mathcal{D}_t, \Sigma_t)$ pour t dans K . À nouveau, le choix du paramètre importe peu.
3. Soit E le morphisme total d'un arbre $(\mathcal{M}, \mathcal{D}, \Sigma, \pi)$. Une *croix* Z sur l'arbre $(\mathcal{M}, \mathcal{D}, \Sigma, \pi)$ est la transformée stricte $Z = E^*Z_0$ d'un singleton $Z_0 = \{Z_1\}$ ou d'une paire $Z_0 = \{Z_1, Z_2\}$ constitués de germes d'hypersurfaces lisses transverses dans $\mathbb{C}^2 \times K$ le long $0 \times K$ telles que chaque composante de Z rencontre une unique composante irréductible de \mathcal{D} .
4. Un *recouvrement distingué* est un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{I}_0 \cup \mathbb{I}_1}$ de \mathcal{D} contenant deux types d'ouverts :
 - (a) si i appartient à \mathbb{I}_0 , U_i est la trace dans \mathcal{D} du voisinage dans \mathcal{M} d'un unique lieu singulier conforme à un polydisque ;
 - (b) si i appartient à \mathbb{I}_1 , U_i est une composante irréductible de \mathcal{D} privée des lieux singuliers.

Un tel recouvrement est constitué d'ouverts de Stein. De plus, pour tout $t \in K$, la restriction $\mathcal{U}|_t$ est un recouvrement distingué de \mathcal{D}_t .

5. Le faisceau $\text{Aut}(\mathcal{M}, Z)$ est un faisceau en groupes de base \mathcal{D} . Sa fibre au-dessus de p est le groupe des germes ϕ d'automorphismes de \mathcal{M} au voisinage de p tels que

$$\pi\phi = \pi, \quad \phi|_{\mathcal{D}} = \text{Id} \quad \text{et} \quad \phi|_Z = \text{Id}.$$

On désigne par $\text{Aut}^C(\mathcal{M}, Z)$ le sous-faisceau de $\text{Aut}(\mathcal{M}, Z)$ vérifiant la condition de trivialité le long du sous-ensemble analytique C : pour tout point t de C , les sections $\text{Aut}^C(\mathcal{M}, Z)$ au dessus de tout point de \mathcal{M}_t coïncident avec l'identité le long de la sous-variété \mathcal{M}_t . Les faisceaux $\text{Aut}^C(\mathcal{M}, Z)$ ont une action triviale le long de l'arbre \mathcal{M}_C ; ainsi, si l'on opère un collage de \mathcal{M} à l'aide d'un 1-cocycle à valeurs dans $\text{Aut}^C(\mathcal{M}, Z)$, on obtient un arbre \mathcal{M}' tel que $\mathcal{M}'|_C$ et $\mathcal{M}|_C$ sont isomorphes. Les collages par $\text{Aut}^C(\mathcal{M}, Z)$ respectent donc la *condition de bord* recherchée et c'est la raison pour laquelle nous les considérons.

6. On définit sans difficulté les filtrations \mathfrak{M}_Z^n et $\mathfrak{M}_Z^{C,n}$ et les voisinages infinitésimaux $\mathcal{M}^{[n],Z}$ et $\mathcal{M}^{\mathbb{Z},Z}$. Dès lors, on obtient comme sous-faisceaux respectifs de $\text{Aut}(\mathcal{M}, Z)$ et de $\text{Aut}^C(\mathcal{M}, Z)$, les faisceaux $\text{Aut}_n(\mathcal{M}, Z)$ et $\text{Aut}_n^C(\mathcal{M}, Z)$ des germes d'automorphismes

qui coïncident avec l'identité en restriction à l'espace analytique $\mathcal{M}^{[n],Z}$. On dispose de même de morphismes de faisceaux

$$\mathrm{Aut}_n(\mathcal{M}, Z) \xrightarrow{\mathcal{J}_n} \mathcal{O}_{\mathcal{M}^{[n],Z}} \quad \text{et} \quad \mathrm{Aut}_0(\mathcal{M}, Z) \xrightarrow{\mathcal{J}_0} \mathcal{O}_{\mathcal{M}^{[0],Z}}$$

construits comme en (II.2). On définit enfin \mathcal{G}_Z^n le sous-faisceau de $\mathrm{Aut}_n(\mathcal{M}, Z)$ noyau de \mathcal{J}_n , le faisceau $\mathcal{G}_Z^{C^n}$ désignant le faisceau intersection de \mathcal{G}_Z^n et $\mathrm{Aut}^C(\mathcal{M}, Z)$.

7. Pour finir, $\mathrm{Col}_n(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$ est la catégorie de collage de \mathcal{M} par des 1-cocycles de $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}_Z^n)$ et $\mathrm{Col}_n^C(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$ la catégorie de collage de \mathcal{M} par des 1-cocycles de $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}_Z^{C^n})$ pour une croix Z et un recouvrement distingué \mathcal{U} .

Par construction, tout élément \mathcal{N} de $\mathrm{Col}_n^C(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$ satisfait à l'isomorphisme

$$\mathcal{N}|_C \simeq \mathcal{M}|_C.$$

IV.4 Preuve du théorème de réalisation à paramètres.

Soit \mathcal{F}_0 une déformation isoholonomique à paramètres dans K . Considérons un processus d'éclatements au-dessus du processus de réduction de \mathcal{F}_0 défini par

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{M}^h & \xrightarrow{E^h} & \dots & \xrightarrow{E^1} & \mathcal{M}_{\mathcal{F}_0} & \xrightarrow{\pi} & K \\ \bigcup & & & & \bigcup & & \\ \Sigma^h & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \Sigma^1 & & \\ \bigcup & & & & \bigcup & & \\ S^h & \rightarrow & \dots & \rightarrow & S^1 & & \end{array} \quad . \quad (\text{IV.5})$$

Le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_0$ relevé de \mathcal{F}_0 sur $\mathcal{M}_{\mathcal{F}_0}$ induit un feuilletage sur \mathcal{M}^h . Tout feuilletage \mathcal{F} sur un arbre \mathcal{M} au-dessus de K tel qu'il existe un isomorphisme d'arbres conjuguant \mathcal{F} à un feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_0$ obtenu par un procédé de type (IV.5) est appelé par extension, *déformation isoholonomique sur \mathcal{M}* . Cette déformation est dite de type courbe généralisée non-dicritique marquée lorsqu'il existe un feuilletage marqué fibre de la déformation qui est de type courbe généralisée non-dicritique. Cette dernière définition est cohérente car la propriété ne dépend pas visiblement du choix du feuilletage fibre.

Toute déformation isoholonomique sur un arbre \mathcal{M} au-dessus de $K \subset \mathbb{C}^p$ induit un feuilletage sur \mathbb{C}^{2+p} au voisinage de $\{0\} \times K$ par l'argument standard de Hartogs. Par construction, la déformation obtenue est isoholonomique au sens initial.

Énonçons désormais le résultat central de cette thèse :

Soit \mathcal{M} un arbre au-dessus de K et C un sous-ensemble analytique de K . Soit \mathcal{F} une déformation isoholonomique de type courbe généralisée marquée non-dicritique sur \mathcal{M} . Soit S une famille équisingulière de courbes au-dessus de K vérifiant

1. S et $\mathrm{Sep}(\mathcal{F})$ sont topologiquement conjuguées.
2. $S|_C$ et $\mathrm{Sep}(\mathcal{F})|_C$ sont analytiquement conjuguées.

Théorème IV.4.1 (Théorème de réalisation à paramètres). *Il existe une suite de déformations isholonomiques $\{\mathcal{F}^i\}_{1 \leq i \leq N}$ sur des arbres au dessus de $K \times \overline{\mathbb{D}}$ telle que*

1. $\mathcal{F}^1|_{K \times \{-1\}} = \mathcal{F}$.
2. Pour tout $i \leq N - 1$, $\mathcal{F}^i|_{K \times \{1\}}$ et $\mathcal{F}^{i+1}|_{K \times \{-1\}}$ sont analytiquement conjugués.
3. $\text{Sep}(\mathcal{F}^N|_{K \times \{1\}}) \simeq S$.
4. Pour tout i , $\mathcal{F}^i|_{C \times \overline{\mathbb{D}}}$ est analytiquement conjugué à $(\mathcal{F}^i|_{C \times \{-1\}}) \times \overline{\mathbb{D}}$

En particulier, on obtient un feuilletage \mathcal{F}' qui vérifie

$$\text{Sep}(\mathcal{F}') = S \quad \text{et} \quad \mathcal{F}'|_C \simeq \mathcal{F}|_C.$$

La propriété (3) assure le contrôle de la classe analytique de la famille équisingulière sous-jacente à la déformation et la propriété (4) incarne la condition de trivialité sur le bord C . Le reste du chapitre est consacré à la preuve de ce résultat.

Soit \mathcal{F} une déformation isholonomique sur \mathcal{M} . On considère les faisceaux suivants qui sont des analogues des faisceaux introduits en (III.1) : $\mathfrak{X}_{S,Z}$ le faisceau de base \mathcal{D} des germes de champs de vecteurs X dans \mathcal{M} qui sont tangents à \mathcal{D} , aux séparatrices et à la croix Z et qui vérifient en outre la condition

$$(T\pi)(X) \equiv 0,$$

condition dite de *verticalité*. Les germes de sections de $\mathfrak{X}_{S,Z}$ écrits en coordonnées locales trivialisant la fibration π sont de la forme

$$a(x, y, s) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y, s) \frac{\partial}{\partial y}$$

où a et b sont des germes de fonctions holomorphes. Le sous-faisceau de $\mathfrak{X}_{S,Z}$ des germes de champs de vecteurs tangents au feuilletage \mathcal{F} est noté $\mathfrak{X}_{\mathcal{F},Z}$. De même, on note $\mathfrak{X}_{S,Z}^C$ et $\mathfrak{X}_{\mathcal{F},Z}^C$ les sous-faisceaux respectifs de $\mathfrak{X}_{S,Z}$ et $\mathfrak{X}_{\mathcal{F},Z}$ dont les sections s'annulent le long de $\pi^{-1}(t)$ pour tout $t \in C$. Une déformation isholonomique \mathcal{H} de \mathcal{F} construite comme en (III.1.2) à partir d'un 1-cocycle de $\mathfrak{X}_{\mathcal{F},Z}^C$ satisfait automatiquement à une condition de trivialité de type (4),

$$\mathcal{H}|_{C \times \overline{\mathbb{D}}} \simeq (\mathcal{F}|_C) \times \overline{\mathbb{D}},$$

Cette propriété justifie leur introduction au regard de l'énoncé du théorème de réalisation à paramètres. La transcription des définitions de cobordisme élémentaire et cobordisme général dans le contexte d'un espace de paramètres n'est pas difficile. Dès lors, nous nous proposons de montrer la proposition de cobordisme à paramètres dans la catégorie $\text{Col}_0^C(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$:

Proposition IV.4.1. *Soit \mathcal{F} une déformation isholonomique sur \mathcal{M} de type courbe généralisée marquée non-dicritique et Z une croix adaptée à \mathcal{F} . Alors tout élément de $\text{Col}_0^C(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$ est \mathcal{F} -cobordant à \mathcal{M} .*

Un des avantages du formalisme que nous avons introduit est la similarité des démonstrations des théorèmes de cobordisme sans et avec paramètres. Dans les sections à suivre, nous reprenons les étapes de la démonstration sans paramètre en ne développant que les arguments spécifiques au problème à paramètres.

IV.4.1 Le théorème de stabilité dans $\text{Col}_0^C(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$.

Pour établir un théorème de stabilité dans $\text{Col}_0^C(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$, la stratégie consiste à établir d'abord son analogue pour les faisceaux $\text{Aut}_n(\mathcal{M}, Z)$; puis à corriger la trivialisaton de 1-cocycle ainsi obtenue pour qu'elle soit à valeurs dans le faisceau $\text{Aut}_n^C(\mathcal{M}, Z)$; puis enfin, à étudier la situation au voisinage de la croix pour aboutir à une trivialisaton à valeurs dans \mathcal{G}_Z^{C0} .

Dans un premier temps, il n'est pas difficile de montrer le lemme suivant en calquant la preuve de (II.3.2) au contexte présent :

Lemme IV.4.2. *Il existe un entier $\delta(n)$ tendant vers l'infini avec n tel que l'image du morphisme naturel*

$$H^1(\mathcal{D}, \text{Aut}_{\delta(n)}(\mathcal{M}, Z)) \rightarrow H^1(\mathcal{D}, \text{Aut}_n(\mathcal{M}, Z))$$

est triviale.

Pour corriger la trivialisaton d'un 1-cocycle de $\text{Aut}_{\delta(n)}(\mathcal{M}, Z)$ à valeurs dans $\text{Aut}_n(\mathcal{M}, Z)$, un lemme de prolongement est établi :

Lemme IV.4.3. *Il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, toute section holomorphe ϕ_C de $\text{Aut}_n(\mathcal{M}, Z)$ au-dessus de $\pi^{-1}(C)$ se prolonge en une section globale de $\text{Aut}_n(\mathcal{M}, Z)$.*

Démonstration: L'automorphisme d'arbres ϕ_C descend en un automorphisme ϕ_C^* le long de $0 \times C \subset \mathbb{C}^2 \times \mathcal{K}$ qui commute à la projection sur \mathcal{K} et qui fixe la croix. Soit un système (x, y, t) au voisinage $0 \times C$ tel que la croix soit donnée par $\{xy = 0\}$. L'automorphisme ϕ_C^* s'écrit en coordonnées

$$\phi_C^*(x, y, t) = \left(x(1 + y \sum_{i,j|i+j \geq \nu} a_{ij}(t)x^i y^j), y(1 + x \sum_{i,j|i+j \geq \nu} b_{ij}(t)x^i y^j), t \right)$$

où les fonctions a_{ij} et b_{ij} sont holomorphes sur C . Comme l'ouvert K est de Stein, d'après [9] il existe des fonctions A_{ij} et B_{ij} holomorphes sur K telles que

$$A_{ij}|_C = a_{ij} \quad \text{et} \quad B_{ij}|_C = b_{ij}.$$

L'application

$$(x, y, t) \rightarrow \left(x(1 + y \sum_{i,j|i+j \geq \nu} A_{ij}(t)x^i y^j), y(1 + x \sum_{i,j|i+j \geq \nu} B_{ij}(t)x^i y^j), t \right) \quad (\text{IV.6})$$

définit un germe d'automorphisme le long de $0 \times \mathcal{K} \subset \mathbb{C}^2 \times \mathcal{K}$ qui prolonge ϕ_C^* , commute à la projection sur \mathcal{K} et fixe la croix. De plus, en convenant de choisir $A_{ij} = 0$ et $B_{ij} = 0$ dès que $a_{ij} = 0$ et $b_{ij} = 0$, l'ordre de tangence à l'identité du prolongement est le même que celui de ϕ_C^* . Aussi, pour n assez grand, le prolongement (IV.6) se relève à l'arbre \mathcal{M} en une section globale du faisceau $\text{Aut}_n(\mathcal{M}, Z)$.

□

On obtient alors immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire IV.4.1. *Il existe un entier $\delta(n)$ tendant vers l'infini lorsque n tend vers l'infini tel que l'image du morphisme naturel*

$$H^1(\mathcal{D}, \text{Aut}_{\delta(n)}^C(\mathcal{M}, Z)) \rightarrow H^1(\mathcal{D}, \text{Aut}_n^C(\mathcal{M}, Z))$$

est triviale.

Démonstration: Soit $\{\phi_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{D}, \text{Aut}_{\delta(n)}^C(\mathcal{M}, Z))$. Considérons sa trivialisaton par un 0-cocycle $\{\phi_i\}$ à valeurs dans le faisceau $\text{Aut}_n(\mathcal{M}, Z)$ donnée par le lemme (IV.4.2). Par définition de la condition de bord sur C , il vient

$$\phi_i|_{\pi^{-1}(C)} \circ \phi_j^{-1}|_{\pi^{-1}(C)} = \text{Id}.$$

Aussi, la famille $\{\phi_i|_{\pi^{-1}(C)}\}$ se recolle en une section ϕ de $\text{Aut}_n(\mathcal{M}, Z)$ au-dessus de C . D'après le lemme précédent, il existe une section globale Φ de $\text{Aut}_n(\mathcal{M}, Z)$ telle que

$$\Phi|_{\pi^{-1}(C)} = \phi.$$

Le cocycle $\{\phi_i \circ \Phi^{-1}|_i\}$ est alors une trivialisaton du cocycle à valeurs dans $\text{Aut}_n^C(\mathcal{M}, Z)$.

□

Pour montrer le résultat de stabilité qui nous intéresse, il reste à analyser la situation au voisinage de la croix. Il n'es pas difficile de voir que l'arbre \mathcal{M} se trivialise au voisinage de chaque composante connexe de la croix et que les systèmes de coordonnées adaptées décrit en (II.2.1) persistent dans le contexte à paramètres. Dés lors, la preuve du résultat suivant est identique à celle de (III.3.4).

Théorème IV.4.4 (Théorème de stabilité). *Pour n assez grand, l'image de l'inclusion naturelle*

$$\text{Col}_n^C(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U}) \hookrightarrow \text{Col}_0^C(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$$

est constituée d'arbres isomorphes entre eux dans la catégorie $\text{Col}_0^C(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$.

IV.4.2 Étape 1 : le cas infinitésimal à paramètres.

Soit \mathcal{F} une déformation isoholonomique sur un arbre \mathcal{M} de type courbe généralisée non-dicritique. Considérons la cime \mathcal{M}^h d'un processus d'éclatements de morphisme total E_h tel que l'on dispose d'un isomorphisme

$$\mathcal{M}^h \xrightarrow{\phi} \mathcal{M}.$$

Soit \mathcal{F}_0 germe de feuilletage le long de $0 \times \mathcal{K} \subset \mathbb{C}^2 \times \mathcal{K}$ tel que $E^*\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$ où $E = \phi \circ E_h$. Le feuilletage \mathcal{F}_0 est donné par un germe de 1-forme holomorphe intégrable Ω_0 tel que

$$\text{Sing}(\Omega_0) = 0 \times \mathcal{K}.$$

Soit F_0 un équation réduite des séparatrices de \mathcal{F}_0 et Ω la 1-forme sur \mathcal{M} définie par $\Omega = E^*\Omega_0$. Localement, le feuilletage \mathcal{F} est trivial : précisément, tout point x appartenant à \mathcal{M} admet un voisinage U tel qu'il existe $t \in \pi(U)$ et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (U, \mathcal{F}|_U) & \xrightarrow{\sim} & (U_t \times V, \mathcal{F}_t \times V), \quad t \in \pi(U), \quad U_t \subset \pi^{-1}(t) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_t = i_t^* \mathcal{F}. \\ & \searrow \pi & \downarrow \text{pr}_2 \\ & & V \end{array}$$

Cette trivialité locale permet de généraliser les calculs effectués en (III.2.1). On démontre ainsi le lemme suivant :

Proposition IV.4.2. *Il existe une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{M}_Z^n \mathfrak{X}_{\mathcal{F}, Z}^C \longrightarrow \mathfrak{M}_Z^n \mathfrak{X}_{S, Z}^C \xrightarrow{\Omega(\cdot)} \mathfrak{M}_Z^{C^n}(F) \longrightarrow 0$$

où (F) désigne le sous-faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ engendré par la fonction F , $F = F_0 \circ E$.

Pour établir un analogue au théorème de cobordisme infinitésimal, il reste à déterminer la cohomologie du dernier terme de la suite exacte ci-dessus :

Lemme IV.4.5. *La cohomologie du faisceau $\mathfrak{M}_Z^{C^n}$ vérifie*

$$H^1(\mathcal{D}, \mathfrak{M}_Z^{C^n}) = 0.$$

Démonstration: Considérons un voisinage $\mathcal{M}_{\mathcal{W}}$ de \mathcal{D} définissant le germe de variété \mathcal{M} et la fibration associée

$$\Pi : \mathcal{M}_{\mathcal{W}} \longmapsto \mathcal{K} = \pi \circ E_h$$

où $K \subset \mathcal{K}$ est un ouvert de Stein dans \mathbb{C}^p . La suite spectrale de [11] associée au faisceau \mathfrak{M}_Z^n et à la fibration Π induit en particulier la suite exacte suivante

$$H^1(\mathcal{K}, \Pi_* \mathfrak{M}_Z^{C^n}) \rightarrow H^1(\mathcal{M}_{\mathcal{W}}, \mathfrak{M}_Z^{C^n}) \rightarrow H^0(\mathcal{K}, \mathcal{R}^1 \Pi_* \mathfrak{M}_Z^{C^n}) \rightarrow H^2(\mathcal{K}, \pi_* \mathfrak{M}_Z^{C^n}).$$

Comme π est une application propre et \mathfrak{M}_Z^C un faisceau cohérent, $\Pi_* \mathfrak{M}_Z^{C^n}$ est un faisceau cohérent [12]. L'ouvert \mathcal{K} étant de Stein, les termes extrémaux de cette suite exacte sont triviaux [13]. Ainsi, on dispose de l'isomorphisme

$$H^1(\mathcal{M}_{\mathcal{W}}, \mathfrak{M}_Z^{C^n}) \simeq H^0(K, \mathcal{R}^1 \Pi_* \mathfrak{M}_Z^{C^n}). \quad (\text{IV.7})$$

La fibre en x du faisceau dérivé vérifie :

$$(\mathcal{R}^1 \Pi_* \mathfrak{M}_Z^{C^n})_x \simeq H^1(\Pi^{-1}(x), \mathfrak{M}_Z^{C^n}|_{\Pi^{-1}(x)}). \quad (\text{IV.8})$$

Notons $\mathfrak{M}_x \subset (\mathcal{O}_{\mathcal{K}})_x$ l'idéal des germes de fonctions nulles en x . En utilisant un recouvrement distingué de $\Pi^{-1}(x)$, on constate que

$$H^1(\Pi^{-1}(x), \mathfrak{M}_Z^{C^n}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{K}_x}} \mathcal{O}_{\mathcal{K}_x} / \mathfrak{m}_x \simeq H^1(\Pi^{-1}(x), \mathfrak{M}_Z^{C^n} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{K}_x}} \mathcal{O}_{\mathcal{K}_x} / \mathfrak{m}_x).$$

Notons i_x l'injection $\Pi^{-1}(x) \subset \mathcal{M}$; une simple représentation locale en coordonnées assure l'isomorphisme

$$\mathfrak{M}_Z^{C^n} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{K}_x}} \mathcal{O}_{\mathcal{K}_x} / \mathfrak{m}_x \simeq i_x^* \mathfrak{M}_Z^{C^n}.$$

Or, d'après (III.2.3), la cohomologie du faisceau $i_x^* \mathfrak{M}_Z^C$ vérifie

$$H^1(\Pi^{-1}(x), i_x^* \mathfrak{M}_Z^{C^n}) = 0.$$

Ainsi, il vient

$$H^1(\Pi^{-1}(x), \mathfrak{M}_Z^{C^n}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{K}_x}} \mathcal{O}_{\mathcal{K}_x} / \mathfrak{m}_x = 0.$$

Le lemme de Nakayama [18] et la relation (IV.8) assurent alors que le faisceau $\mathcal{R}^1 \Pi_* \mathfrak{M}_Z^{C^n}$ est le faisceau nul et suivant (IV.7), il vient

$$H^1(\mathcal{M}_W, \mathfrak{M}_Z^{C^n}) = 0.$$

Enfin, par passage à la limite inductive sur les voisinages de \mathcal{D} obtenus comme pré-image de voisinages de Stein de $0 \times K$ dans $\mathbb{C}^2 \times K$, on obtient le résultat recherché. □

La suite exacte longue en cohomologie associée à la suite exacte (IV.4.2) et au recouvrement \mathcal{U} contient la proposition suivante

Proposition IV.4.3 (Cobordisme infinitésimal). *Soit \mathcal{F} une déformation isoholonomique sur un arbre \mathcal{M} de type courbe généralisée non-dicritique et Z un croix adaptée à \mathcal{F} . L'application canonique*

$$H^1(\mathcal{D}, \mathfrak{M}_Z^n \mathfrak{X}_{\mathcal{F}, Z}^C) \longrightarrow H^1(\mathcal{D}, \mathfrak{M}_Z^n \mathfrak{X}_{\mathcal{S}, Z}^C)$$

est surjective.

IV.4.3 Étapes 2 et 3 : cobordisme dans $\mathbf{Col}_1^C(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$ et dans $\mathbf{Col}_0^C(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$.

Le théorème de stabilité et la propriété de cobordisme infinitésimal ayant été établis, l'algorithme développé en (III.2.4) fonctionne à nouveau dans le contexte à paramètres sans aucun changement dans la démonstration. En particulier, comme la projection π commute au crochet de Lie, la condition de verticalité est invariante par crochet de Lie.

IV.4.4 Démonstration du théorème de réalisation à paramètres.

Nous présentons les dernières étapes de la preuve.

Préparation du cocycle.

Soit $(\mathcal{M}, \mathcal{D}, \Sigma, \pi)$ et $(\mathcal{M}', \mathcal{D}', \Sigma', \pi')$ deux arbres marqués. Dans un premier moment, on effectue les hypothèses suivantes :

1. il existe un biholomorphisme θ entre \mathcal{D} et \mathcal{D}' qui commute aux projections et respecte les marquages ;

2. les arbres $\mathcal{M}|_C$ et $\mathcal{M}'|_C$ sont conjugués par un biholomorphisme ϕ_C qui respecte le marquage.

La deuxième condition est une hypothèse nécessaire à la *condition de bord* attendue, c'est-à-dire la réalisation d'une déformation triviale le long de C . Les résultats suivants ont pour objectif de construire un cocycle de collage associé à notre problématique vérifiant une condition de cohérence vis à vis de cette *condition de bord*.

Au voisinage de chaque composante D , le biholomorphisme $\theta|_D$ se prolonge naturellement sur voisinage tubulaire $T(D)$ de D dans un voisinage tubulaire de $\theta(D)$. Notons Θ_D un tel prolongement. L'automorphisme

$$\Theta_D \circ \phi_C^{(-1)}|_C$$

est un automorphisme de $T(D)|_C$ qui laisse invariante chaque composante de \mathcal{D} transverse à D et qui commute à la projection.

Lemme IV.4.6. *Il existe un automorphisme H_D de $T(D)$ respectant le marquage et prolongeant $\Theta_D \circ \phi_C^{(-1)}|_C$ au-dessus de K .*

Démonstration: Notons ici h_D l'automorphisme $\Theta_D \circ \phi_C^{(-1)}|_C$. La restriction de π à un voisinage tubulaire $T(D)$ de D est assimilé à une déformation d'un voisinage de droite projective \mathbb{P}^1 d'auto-intersection strictement négative au-dessus d'un ouvert de Stein \mathcal{K} . D'après le théorème de Grauert [17], on peut redresser cette déformation en une déformation triviale de $T(D)$. Fixons ainsi un système de coordonnées (x, t, s) sur $T(D) \setminus \{t = \infty\}$ où

1. $\{x = 0\}$ est une équation locale D ;
2. $\{t = f_i(s), t = \infty\}_{i=1, \dots, N}$ sont les équations des composantes irréductibles de \mathcal{D} transverses à D ;
3. la fibration π s'écrit $(x, t, s) \mapsto s$.

Si $N \leq 1$, le groupe des automorphismes globaux de \mathbb{C} agissant transitivement sur les points, on peut supposer que h_D est l'identité en restriction à D . Lorsque $N \leq 2$, h_D en restriction à D fixe au moins 2 points donc est réduit à l'identité. Enfin, par construction, h_D laisse globalement invariante chaque courbe $t = f_i(s)$ et commute à la projection π . Ainsi, en coordonnées, on peut écrire h_D sous la forme

$$(x, t, s) \mapsto \left(xA(x, t, s), t + xB(x, t, s) \prod_{i=1, \dots, N} (t - f_i(s)), s \right), \quad (x, t) \in T(D) \setminus \{t = \infty\}, s \in C$$

où A et B sont des fonctions holomorphes avec $A(0, t, s) \neq 0$. Le biholomorphisme h_D se prolongeant le long $\{t = \infty\}$, dans le développement de A et B

$$A(x, t, s) = \sum_{ij} a_{ij}(s)x^i t^j, \quad B(x, t, s) = \sum_{ij} b_{ij}(s)x^i t^j$$

où a_{ij} et b_{ij} sont holomorphes sur C , les fonctions a_{ij} et b_{ij} sont nulles dès que $ip - j < 0$, p désignant l'auto-intersection de D . Ainsi, la fonction $(t, s) \mapsto A(0, t, s)$ se réduit à

$$(t, s) \mapsto a_{00}(s).$$

La fonction a_{00} se prolonge en une fonction \tilde{a}_{00} holomorphe sur \mathcal{K} qui ne s'annule pas : en effet, comme \mathcal{K} est de Stein, on dispose déjà d'un prolongement quelconque \tilde{a} de a_{00} [9]. Les zéros de \tilde{a} et l'ensemble $C = Z(f_1, \dots, f_m)$ ont une intersection vide. Il existe donc $F \in (f_1, \dots, f_m)$ tel que les zéros de \tilde{a} et ceux de F ne s'intersectent pas dans \mathcal{K} . Autrement dit, la fonction méromorphe $\frac{\tilde{a}}{F}$ admet un lieu d'indétermination vide dans K . L'image de \mathcal{K} par cette fonction méromorphe ne saurait être \mathbb{C} tout entier. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\tilde{a} - \lambda F$ ne s'annule pas sur \mathcal{K} . Le prolongement $\tilde{a}_{00} = \tilde{a} - \lambda F$ convient. Maintenant, on prolonge chaque fonction a_{ij} , $(i, j) \neq (0, 0)$ et b_{ij} sur \mathcal{K} en \tilde{a}_{ij} , $(i, j) \neq (0, 0)$ et \tilde{b}_{ij} , prenant soin de choisir la fonction nulle pour prolongement chaque fois que $ip - j < 0$. L'application H_D définie par

$$(x, t, s) \mapsto \left(x\tilde{A}(x, t, s), t + x\tilde{B}(x, t, s) \prod_{i=1, \dots, N} (t - f_i(s)), s \right), \quad (x, t) \in T(D) \setminus \{t = \infty\}, s \in \mathcal{K}$$

où \tilde{A} et \tilde{B} s'écrivent

$$\tilde{A}(x, t, s) = \sum_{ij} \tilde{a}_{ij}(s)x^i t^j, \quad \tilde{B}(x, t, s) = \sum_{ij} \tilde{b}_{ij}(s)x^i t^j$$

prolonge h_D sur $T(D) \setminus \{t = \infty\} \times \mathcal{K}$. De plus, le jacobien de H_D en $(0, t, s)$ s'écrit

$$\text{Jac}(H_D)(0, t, s) = |\tilde{A}(0, t, s)| = |\tilde{a}_{00}(s)| \neq 0.$$

Ainsi, H_D est un germe d'automorphisme de $T(D) \setminus \{t = \infty\} \times \mathcal{K}$ dans lui-même qui se prolonge holomorphiquement le long de $\{t = \infty\}$ d'après les conditions d'annulations des fonctions \tilde{a}_{ij} et \tilde{b}_{ij} . Ce qui prouve le lemme. □

En effectuant la construction du lemme (IV.4.6) pour chaque composante irréductible de \mathcal{D} , on obtient une famille d'automorphismes $\{H_D\}_{D \in \text{Comp}(\mathcal{D})}$ qui coïncident avec $\Theta_D \circ \phi_C^{(-1)}$ au-dessus de C . La famille de biholomorphismes définie par

$$\Lambda_D = H_D^{-1} \circ \Theta_D, \quad D \in \text{Comp}(\mathcal{D})$$

constitue la forme normale de cocycle recherchée. Précisément, cette famille satisfait aux propriétés suivantes :

Lemme IV.4.7 (Normalisation du cocycle). *La famille de biholomorphismes $\{\Lambda_D\}_{D \in \text{Comp}(\mathcal{D})}$ vérifie les propriétés suivantes :*

1. Λ_D est un biholomorphisme de $T(D)$ dans $T(\theta(D))$ qui commute aux fibrations π et π' .
2. $\Lambda_D|_C = \phi_C$.
3. Λ_D conjugue les points singuliers et les traces dans les voisinages tubulaires des composantes des diviseurs qui se correspondent par le marquage.

La famille d'applications $(\Lambda_D^{-1} \circ \Lambda_{D'})_{(D,D') \in \text{Comp}(\mathcal{D})^2}$ vérifie en outre

$$\mathcal{M}' \simeq \coprod_{D \in \text{Comp}(\mathcal{D})} T(D) \Big/ (x \sim \Lambda_D^{-1} \circ \Lambda_{D'}(x))_{(D,D') \in \text{Comp}(\mathcal{D})^2}, \quad (\text{IV.9})$$

$$(\Lambda_D^{-1} \circ \Lambda_{D'})|_C = \text{Id}. \quad (\text{IV.10})$$

La relation (IV.9) assure que \mathcal{M}' est isomorphe à un arbre obtenu par collage des ouverts d'un recouvrement de \mathcal{M} selon un cocycle vérifiant (IV.10), condition de cohérence vis à vis de la condition de bord suivante

$$\mathcal{M}|_C \simeq \mathcal{M}'|_C.$$

Soit $S_{DD'}$ le lieu singulier de \mathcal{D} intersection des composantes D et D' . Nous énonçons maintenant le résultat de préparation à paramètres pour déduire de la famille

$$(\Lambda_D^{-1} \circ \Lambda_{D'})_{(D,D') \in \text{Comp}(\mathcal{D})^2}$$

un cocycle approprié.

Lemme IV.4.8 (Préparation du cocycle). *Il existe deux familles $\{\Delta_{DD'}\}_{(D,D') \in \text{Comp}(\mathcal{D})^2}$ et $\{\phi_D\}_{D \in \text{Comp}(\mathcal{D})}$ de germes d'automorphismes telles que*

- $\Delta_{DD'}$ est défini au voisinage de $S_{DD'}$, laisse invariante chaque feuille locale et vérifie

$$\Delta_{DD'}|_C = \text{Id}.$$

- ϕ_D est un germe le long de D qui fixe chaque point de D et vérifie $\phi_D|_C = \text{Id}$.
- le germe d'automorphisme

$$\phi_{D'}^{-1} \circ \Delta_{DD'} \circ \Lambda_D^{-1} \circ \Lambda_{D'} \circ \phi_D$$

est tangent à l'identité aux points de $S_{DD'}$.

La démonstration de ce lemme repose sur la trivialité de \mathcal{M} au voisinage de chaque lieu singulier $S_{DD'}$ et au voisinage de chaque composante irréductible de \mathcal{D} . Cette remarque faite, la démonstration suit le même algorithme que la démonstration du lemme (III.3.4), la propriété (III.3.1) étant énoncée à paramètres.

Fin de la preuve.

Dans la dernière étape de cette construction, nous allons détailler la technique qui, jointe au passage à un recouvrement fin distingué effectué pour le problème sans paramètre, permet le contrôle de la classe analytique des séparatrices. On rappelle ainsi le résultat final à obtenir : Soit \mathcal{M} un arbre au-dessus de K et C un sous-ensemble analytique de K . Soit \mathcal{F} une déformation isoholonomique de type courbe généralisée marquée non-dicritique sur \mathcal{M} . Soit S une famille équisingulière de courbes au-dessus de K vérifiant

1. S et $\text{Sep}(\mathcal{F})$ sont topologiquement conjuguées.

2. $S|_C$ et $\text{Sep}(\mathcal{F})|_C$ sont analytiquement conjuguées.

Théorème IV.4.9 (Théorème de réalisation à paramètres). *Il existe une suite de déformations isholonomiques $\{\mathcal{F}^i\}_{1 \leq i \leq N}$ sur des arbres au dessus de $K \times \overline{\mathbb{D}}$ telle que*

1. $\mathcal{F}^1|_{K \times \{-1\}} = \mathcal{F}$.
2. Pour tout $i \leq N - 1$, $\mathcal{F}^i|_{K \times \{1\}}$ et $\mathcal{F}^{i+1}|_{K \times \{-1\}}$ sont analytiquement conjugués.
3. $\text{Sep}(\mathcal{F}^N|_{K \times \{1\}}) \simeq S$.
4. Pour tout i , $\mathcal{F}^i|_{C \times \overline{\mathbb{D}}}$ est analytiquement conjugué à $(\mathcal{F}^i|_{C \times \{-1\}}) \times \overline{\mathbb{D}}$

La démonstration s'effectue ainsi : soit n un entier de détermination pour la famille équisingulière S donné par la proposition (IV.2.2). On note \mathcal{M}_S^h l'arbre cime de réduction de S . On considère alors E_{n+h+1} le morphisme total du processus d'éclatements au-dessus \mathcal{M}_S^h défini comme en (IV.3) relativement à la courbe S , \mathcal{M}_S^{n+h+1} désignant l'arbre marqué cime de ce processus. Comme \mathcal{F} est un feuilletage de type courbe généralisée, le processus de réduction de \mathcal{F} et de $\text{Sep}(\mathcal{F})$ sont égaux. Ainsi, les hypothèses assurent qu'il existe une conjugaison analytique compatible aux marquages telle que

$$\mathcal{M}_S^h|_C \simeq \mathcal{M}|_C.$$

Soit l'arbre \mathcal{M}^{n+1} désignant l'arbre cime du processus défini par

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{M}^{n+1} & \xrightarrow{F^{n+1}} & \dots & \rightarrow & \mathcal{M}^j & \xrightarrow{F^j} & \dots & \xrightarrow{F^1} & \mathcal{M} \\ \cup & & & & \cup & & & & \cup \\ \Sigma^{n+1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \Sigma^j & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \Sigma \\ \cup & & & & \cup & & & & \cup \\ \emptyset & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \text{Sing}(F_j^* \mathcal{F}) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \text{Sing}(\mathcal{F}) \end{array}, \quad (\text{IV.11})$$

où F_j désigne le morphisme total de l'arbre \mathcal{M}^j . Comme tout germe d'automorphisme de $\text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ se relève au voisinage du diviseur obtenu après éclatement de l'origine, une récurrence sur l'entier n assure l'existence d'une conjugaison analytique compatible aux marquages

$$\mathcal{M}_S^{n+1+h}|_C \simeq \mathcal{M}^{n+1}|_C.$$

Désignons par \mathcal{F}^{n+1} le feuilletage relevé de \mathcal{F} sur \mathcal{M}^{n+1} . Dans la mesure où le théorème de M. Seguy (III.3.2) se laisse naturellement généraliser à paramètres, il existe une déformation isholonomique marquée \mathcal{H} de base $K \times \overline{\mathbb{D}}$ telle que

1. $\mathcal{H}|_{K \times \{0\}} = \mathcal{F}^{n+1}$.
2. $\mathcal{H}|_{K \times \{1\}}$ est supporté par un arbre $\mathcal{M}^{n+1'}$ dont le diviseur est biholomorphe au diviseur exceptionnel du morphisme E_{n+h+1} . On note $\mathcal{F}^{n+1'}$ le feuilletage induit sur $\mathcal{M}^{n+1'}$ par la déformation.
3. $\mathcal{H}|_{C \times \overline{\mathbb{D}}}$ est conjugué à $\mathcal{H}|_C \times \overline{\mathbb{D}}$.

On est ainsi ramené aux hypothèses initiales de *la préparation d'un cocycle* (IV.4.4) car les conditions ci-dessus assurent l'existence d'une conjugaison compatible aux marquages

$$\mathcal{M}_S^{n+h+1}|_C \simeq \mathcal{M}^{n+1'}|_C.$$

Le cocycle préparé obtenu après passage à un recouvrement distingué fin \mathcal{U} par une opération similaire à celle décrite en (III.3.2) est par construction un élément de $\mathcal{Z}^1(\mathcal{D}, \mathcal{G}_Z^{c_0})$ pour une croix Z bien choisie. Le résultat de cobordisme à paramètres dans $\text{Col}_0^C(\mathcal{M}^{n+1'}, Z, \mathcal{U})$ montre alors qu'il existe une suite finie de déformations isoholonomiques marquées $\{\mathcal{F}^i\}_{1 \leq i \leq N}$ au dessus de $K \times \overline{\mathbb{D}}$ telle que

1. $\mathcal{F}^1|_{K \times \{-1\}} = \mathcal{F}^{n+1'}$.
2. Pour tout $i \leq N - 1$, $\mathcal{F}^i|_{K \times \{1\}}$ et $\mathcal{F}^{i+1}|_{K \times \{-1\}}$ sont analytiquement conjugués.
3. Le feuilletage $\mathcal{F}^N|_{K \times \{1\}}$ feuilletage l'arbre \mathcal{M}_S^{n+h+1} .
4. Pour tout i , $\mathcal{F}^i|_{C \times \overline{\mathbb{D}}}$ est conjugué à $\mathcal{F}^i|_C \times \overline{\mathbb{D}}$.

Maintenant, si n est choisi assez grand, toute composante irréductible du diviseur de \mathcal{M}_S^{n+h+1} rencontre au plus une composante du lieu d'attache de la transformée stricte de S . De plus, par construction des marquages de déformations isoholonomiques, toute composante qui rencontre une composante du lieu d'attache de la transformée stricte de S rencontre exactement une composantes du lieu d'attache des séparatrices de $\mathcal{F}^N|_{K \times \{1\}}$. Ainsi en effectuant un éclatement de moins, il vient

$$\text{Att}(E_{n+h}, \text{Sep}(\mathcal{F}^N|_{K \times \{1\}})) = \text{Att}(E_{n+h}, S).$$

Par équisingularité, les familles $\text{Sep}(\mathcal{F}^N|_{K \times \{1\}})$ et S sont topologiquement conjuguées. D'après la proposition (IV.2.2), les familles équisingulières S et $\text{Sep}(\mathcal{F}^N|_{K \times \{1\}})$ sont analytiquement conjuguées. Ce qui achève la preuve du théorème de réalisation à paramètres.

Chapitre V

Modules d'un feuilletage.

L'espace des modules d'un feuilletage \mathcal{F} , noté $\mathbb{M}(\mathcal{F})$, est l'ensemble des feuilletages topologiquement conjugués à \mathcal{F} quotienté par la relation d'équivalence analytique. De même, l'espace des modules d'un germe de courbe S est l'ensemble des germes de courbes topologiquement conjugués à S quotienté par la relation d'équivalence analytique. Dans un premier moment, nous montrons que pour un feuilletage \mathcal{F} de type courbe généralisée non-dicritique, l'application naturelle

$$\mathbb{M}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{M}(\text{Sep}(\mathcal{F}))$$

est surjective. Ce théorème est obtenu comme conséquence d'un résultat portant sur *l'espace de cobordisme* d'un feuilletage, c'est-à-dire l'ensemble des feuilletages cobordants au sens des déformations isoholonomiques.

Dans un second moment, nous nous intéressons aux modules d'un feuilletage *quasi-homogène*. Le résultat obtenu généralise une classification déjà établie pour la famille des feuilletages nilpotent [7] et identifie les modules d'un feuilletage quasi-homogène à ceux des représentations d'un groupe libre dans le groupe $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$.

V.1 Classe de cobordime d'un feuilletage.

Dans cette partie, l'espace des paramètres *naïfs*, dit *variété des arbres* d'un processus d'éclatements à arbre dual fixé est muni d'une structure naturelle de variété analytique lisse. On montre ensuite que l'espace de cobordisme d'un feuilletage fibre au-dessus de la variété des arbres.

V.1.1 Variété des arbres d'éclatements.

Soit \mathcal{M} un arbre marqué. On considère $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ l'ensemble des arbres marqués cimes d'un processus d'éclatements dont l'arbre dual est conjugué à celui de \mathcal{M} par une conjugaison qui respecte le marquage. On met une structure analytique naturelle sur $\mathcal{A}(\mathcal{M})$. Soit p et n deux entiers positifs. On note

$$\Delta_n^p = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{P}^1 \setminus A_p)^n \mid \forall i \neq j, x_i \neq x_j\}$$

où $A_p \subset \mathbb{P}^1$ est un ensemble à p éléments.

Proposition V.1.1. *Il existe une famille finie d'entiers naturels $\{n_i, p_i\}_{i \in I}$ telle qu'existe une bijection naturelle*

$$\mathcal{A}(\mathcal{M}) \simeq \prod_{i \in I} \Delta_{n_i}^{p_i}.$$

Démonstration: La démonstration est une récurrence sur la hauteur de l'arbre \mathcal{M} . Supposons que la hauteur de l'éclatement soit 1. Notons n le cardinal de l'ensemble des points singuliers sur l'unique composante irréductible du diviseur de \mathcal{M} . Pour construire un arbre marqué cime d'un processus d'éclatements dont l'arbre dual pondéré est celui de \mathcal{M} , il suffit d'éclater l'origine une fois et de choisir n points dans le diviseur deux à deux distincts. Le marquage est équivalent au choix d'un n -uplet de ces points parmi tous les n -uplets possibles. Cette correspondance induit une bijection naturelle

$$\mathcal{A}(\mathcal{M}) \simeq \Delta_n^0.$$

Supposons que la hauteur de l'arbre soit h . Écrivons le processus d'éclatements

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{M} = \mathcal{M}^h & \xrightarrow{E^h} & \mathcal{M}^{h-1} & \xrightarrow{E^{h-1}} & \dots & \xrightarrow{E^1} & \mathcal{M}^0 \\ \cup & & \cup & & & & \cup \\ \Sigma = \Sigma^h & \rightarrow & \Sigma^{h-1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \Sigma^0 \\ \cup & & \cup & & & & \cup \\ S^h & \rightarrow & S^{h-1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & S^0 \end{array} \quad (\text{V.1})$$

Pour produire un arbre marqué \mathcal{M}' de même arbre dual que \mathcal{M} , il faut effectuer plusieurs opérations au-dessus de l'arbre \mathcal{M}^{h-1} dont le choix est sans ambiguïté dicté par l'arbre dual de \mathcal{M} . Nous listons les opérations possibles et décrivons les degrés de libertés qui leurs correspondent :

- On éclate un point singulier du diviseur de hauteur $h-1$; ce qui n'ajoute aucun paramètre supplémentaire à ceux correspondant à un processus produisant un arbre marqué de même arbre dual que \mathcal{M}^{h-1} .
- On éclate $n(D)$ points sur la partie lisse d'une composante irréductible D de valence $\nu(D)$ du diviseur de \mathcal{M}^{h-1} . Le choix de ces $n(D)$ points et le choix du marquage des nouvelles composantes créées correspond de façon biunivoque à un élément de $\Delta_{n(D)}^{\nu(D)}$.
- On ajoute $p(D)$ points singuliers au diviseur de \mathcal{M} sur la partie lisse d'une composante irréductible de valence $\nu(D)$. Ce qui à nouveau correspond à l'ajout d'un espace de paramètre $\Delta_{p(D)}^{\nu(D)}$.

Au final, on met en évidence une bijection

$$\mathcal{A}(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{A}(\mathcal{M}^{h-1}) \times \prod_{D \in \mathcal{D}^{h-1}} \Delta_{n(D)}^{\nu(D)} \times \prod_{D \in \mathcal{D}^h} \Delta_{p(D)}^{\nu(D)}.$$

L'hypothèse de récurrence appliquée à l'arbre \mathcal{M}^{h-1} jointe à la bijection ci-dessus établit le résultat au rang h .

□

La présentation simple de $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ sous forme de produit vient précisément de ce que l'on considère des arbres marqués. Si l'on oublie le marquage, l'espace des paramètres est le quotient de $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ par un groupe dont l'action n'est pas une action produit.

Comme chaque ensemble Δ_n^p est une variété analytique lisse, la bijection de la proposition induit une structure de variété analytique lisse sur l'espace $\mathcal{A}(\mathcal{M})$. De plus, il existe une variété analytique lisse $\underline{\mathcal{M}}$ et une fibration holomorphe

$$A : \underline{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{M})$$

telle que la fibre au-dessus d'un point de p soit l'arbre cime du processus d'éclatements correspondant au point p suivant la construction de la proposition précédente.

V.1.2 Réalisation d'un feuilletage à séparatrices fixées.

Un corollaire certes trivial mais probablement plus explicite que le théorème (III.3.1) assure l'existence d'un feuilletage marqué dans la classe topologique d'un feuilletage marqué \mathcal{F} admettant comme séparatrice toute courbe marquée dans la classe topologique de $\text{Sep}(\mathcal{F})$. Précisément, on dispose du résultat suivant :

Théorème V.1.1. *Soit \mathcal{F} un feuilletage de type courbe généralisée non-dicritique de séparatrices S et un germe de courbe S' topologiquement conjuguée à S marquée par S_0 . Il existe un germe de feuilletage de type courbe généralisée marquée non-dicritique \mathcal{F}' admettant S' comme séparatrice et reliée à \mathcal{F} par déformation isoholonomique.*

Comme toute déformation isoholonomique est topologiquement triviale [27], le résultat suivant, annoncé en introduction, est un corollaire immédiat du théorème (V.1.1) :

Corollaire V.1.1. *Soit \mathcal{F} un feuilletage de type courbe généralisée non-dicritique et un germe de courbe S' topologiquement conjuguée à $\text{Sep}(\mathcal{F})$. Il existe un feuilletage holomorphe topologiquement conjugué à \mathcal{F} de séparatrice S' ; autrement dit, la flèche*

$$\mathbf{M}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbf{M}(\text{Sep}(\mathcal{F}))$$

est surjective.

Démonstration:(V.1.1)- Notons E' la réduction de S' . D'après un résultat de O. Zariski [44], l'arbre de réduction de S' admet un arbre dual pondéré isomorphe à celui de l'arbre de réduction de S . De plus, les points d'attaches des transformées strictes de S et S' sont sur des composantes irréductibles identifiées par cet isomorphisme. On considère un entier n associé à S donné par le lemme (IV.2.2). Visiblement, les arbres duaux pondérés associés aux arbres des éclatements $E_{S,n+1}$ et $E'_{S',n+1}$ construits comme en (IV.3) sont isomorphes. Le théorème (V.2.4) assure alors l'existence d'un feuilletage \mathcal{F}_0 sur l'arbre de $E'_{S',n+h}$ relié à \mathcal{F} par une déformation isoholonomique. Soit $\{\tilde{S}_i\}_{i \in I}$ la famille des séparatrices irréductibles de \mathcal{F}_0 . Notons S_0 la courbe analytique image de la famille $\{\tilde{S}_i\}_{i \in I}$ par l'éclatement $E'_{S',n+1}$. Par construction, on dispose de l'égalité

$$\text{Att}(E_{S',n}, S') = \text{Att}(E_{S',n}, S_0).$$

Le feuilletage \mathcal{F}_0 est relié à \mathcal{F} par une déformation isoholonomique. Or toute déformation isoholonomique est à type topologique constant d'après (I.3.1). Aussi, \mathcal{F}_0 topologiquement

conjugué à \mathcal{F} . En particulier, la courbe S_0 est topologiquement conjuguée à S' . Le lemme (IV.2.2) assure alors que les courbes S_0 et S' sont analytiquement conjuguées. L'image du feuilletage \mathcal{F}_0 par cette conjugaison est un feuilletage topologiquement conjugué à \mathcal{F} admettant S' comme séparatrice. De plus, toutes ces constructions sont compatibles aux marquages. \square

De manière synthétique, ce théorème établit le résultat annoncé en préambule : l'espace des modules d'un feuilletage de type courbe généralisée non-dicritique se surjecte sur l'espace des modules de ses séparatrices.

V.1.3 Classe de cobordisme d'un feuilletage.

Soit \mathcal{F}_0 un feuilletage de type courbe généralisée marquée feuilletant un arbre \mathcal{M}_0 . On considère $\text{Cob}(\mathcal{F}_0)$ l'ensemble des feuilletages marqués reliés à \mathcal{F}_0 par une déformation isoholonomique marquée. En oubliant les séparatrices des feuilletages et en ne gardant comme information que l'arbre de réduction et son marquage, le théorème (V.2.4) présente l'énoncé alternatif suivant :

Théorème V.1.2. *L'application*

$$\Pi : \begin{cases} \text{Cob}(\mathcal{F}_0) & \longrightarrow & \mathcal{A}(\mathcal{M}_0) \\ \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\mathcal{F}} \end{cases},$$

où $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ désigne l'arbre marqué cime du processus de réduction de \mathcal{F} , est une surjection à fibres connexes au-dessus de la variété $\mathcal{A}(\mathcal{M}_0)$, la connexité étant ici entendue au sens suivant : deux feuilletages d'une même fibre sont reliés par une déformation isoholonomique dans la fibre.

Démonstration: La surjectivité est une conséquence immédiate du théorème (V.2.4). Pour établir la connexité de la fibre, considérons deux feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{F}' appartenant à la même fibre $\Pi^{-1}(\mathcal{M})$. Par définition de la classe de cobordisme, il existe une déformation isoholonomique $\mathcal{F}_{\mathbb{D}}$ de base \mathbb{D} telle que les fibres en 1 et en -1 soient respectivement les feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{F}' sur l'arbre \mathcal{M} . Soit $\mathcal{M}_{\mathbb{D}}$ la déformation triviale $\mathcal{M} \times \mathbb{D}$. D'après le théorème de réalisation à paramètres, la déformation $\mathcal{M}_{\mathbb{D}}$ est le support d'une déformation isoholonomique dont les fibres en 1 et -1 sont respectivement les feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{F}' . Dès lors, la restriction de cette déformation au segment réel $[-1, 1] \subset \mathbb{D}$ est un chemin dans la fibre au-dessus de \mathcal{M} qui relie \mathcal{F} et \mathcal{F}' . \square

Nous allons développer maintenant un exemple qui montre que la topologie de la fibre de cette application peut être non-triviale. Soit cusp^2 le feuilletage dit *double-cusp* admettant l'intégrale première holomorphe

$$d(x^2 - y^3)(x^3 - y^2) = 0.$$

Sur l'arbre $\mathcal{M}_{\text{cusp}^2}$ cime du processus de réduction de ce feuilletage, la singularité c (Fig. V.1) est résonnante linéarisable. Il existe des coordonnées (u, v) telles que le feuilletage soit

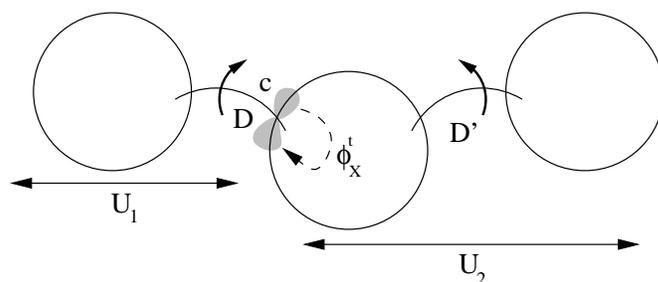


FIG. V.1 – Déformation du cusp

localement donné par la 1-forme

$$pudv + qvdu, \quad p, q \in \mathbb{N}^*.$$

Le champ local tangent $X = pu\partial_u - qv\partial_v$ induit une déformation de \mathcal{F} paramétrée par $[0, 2i\pi]$ définie par recollement le long d'un voisinage de c selon le flot de X (Fig. V.1) :

$$\{\mathcal{F}_s\}_{s \in [0, 2i\pi]} = s \longmapsto \mathcal{F}|_{U_1} \coprod_{x \sim \phi_X^s x} \mathcal{F}|_{U_2}.$$

Comme le flot $\phi_X^{2i\pi}$ est égal à l'identité, la famille $\{\mathcal{F}_s\}_{s \in [0, 2i\pi]}$ est un lacet dans l'espace de cobordisme de \mathcal{F} . On peut effectuer une homotopie de ce lacet aboutissant à un lacet dans la fibre au-dessus de $\Pi(\mathcal{F})$. Maintenant, on montre que ce lacet est homotope au lacet trivial dans la fibre si et seulement si la famille $s \mapsto \phi_X^s$ est homotope à l'identité dans le groupe des automorphismes qui laissent invariante chaque feuille locale. Ce qui dans le cas présent est manifestement faux. La présence d'une singularité ayant une feuille locale à topologie non triviale semble enrichir la topologie des fibres de Π . C'est pourquoi, de façon générique, la fibre de cette application devrait être simplement connexe. Enfin, la famille de feuilletages définie par $\{\Phi_t^* \mathcal{F}\}_{t \in [0, 2i\pi]}$ où Φ_t est l'automorphisme de $(\mathbb{C}^2, 0)$ s'écrivant

$$(x, y) \mapsto (e^{-\frac{3}{5}it}x, e^{-\frac{2}{5}it}y)$$

décrit un lacet qui se projette sur $\mathcal{A}(\mathcal{M}_{cusp^2})$ en un lacet non-homotope à l'identité. Cette déformation voit la séparatrice $x^3 - y^2 = 0$ faire le tour de la singularité c .

L'action du groupe des automorphismes $\text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ est équivariante pour l'application Π . On sait que si le feuilletage \mathcal{F}_0 admet une intégrale première holomorphe alors le quotient de $\text{Cob}(\mathcal{F}_0)$ pour cette action est une variété analytique lisse [15]. On conjecture que ce résultat persiste pour un feuilletage de type courbe généralisée non-dicritique générique. Dans l'exemple (V.1), on sait que, pour une perturbation générique à séparatrice fixée du double-cusp, l'espace des modules de déformations isoholonomiques est de dimension 1 et que l'espace des modules de son arbre marqué est un point [30].

V.2 Les feuilletages quasi-homogènes.

Reprenons le vocabulaire introduit dans [28] : un germe de feuilletage singulier à l'origine de \mathbb{C}^2 est dit quasi-homogène lorsqu'il existe des coordonnées (x, y) telles qu'une équation f de ses séparatrices est un polynôme quasi-homogène :

$$f = \sum_{\alpha i + \beta j = \gamma} a_{ij} x^i y^j, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}, \quad \alpha \wedge \beta = 1.$$

Le couple (α, β) est appelé *le poids* de la courbe. Un feuilletage quasi-homogène est en particulier non-dicritique. Intrinsèquement, la quasi-homogénéité est équivalente à l'appartenance de f à son idéal jacobien, c'est-à-dire, $f \in (f_x, f_y)$. On dispose de plus d'une caractérisation en termes de modules de déformations qui sera présentée par la suite. Nous allons prouver un résultat de classification analytique des feuilletages quasi-homogènes lorsque l'on fixe la classe analytique de ses séparatrices.

V.2.1 Réduction et rigidité.

Nous énonçons deux propriétés des feuilletages quasi-homogènes concernant successivement leur réduction et un phénomène de rigidité.

Réduction.

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C}^2 et p un point de Ω . Etant donné un germe de courbe lisse S au voisinage de p , on définit le morphisme $\mathfrak{E}^n(p, S) : (\mathcal{M}_d^n, \mathcal{D}_d^n) \rightarrow (\Omega, p)$ comme le morphisme total du processus d'éclatements défini par le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{M}^n & \xrightarrow{E^n} & \dots & \mathcal{M}^j & \xrightarrow{E^j} & \dots & \xrightarrow{E^1} & \mathcal{M}^0 \\ \cup & & & \cup & & & & \cup \\ \Sigma^h & \rightarrow & \dots & \Sigma^j & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \Sigma^0 \\ \cup & & & \cup & & & & \cup \\ S^h & \rightarrow & \dots & S^j & \rightarrow & \dots & \rightarrow & S^0 \end{array}$$

où $S^0 = 0$ et S^j est le point d'attache de la transformée stricte de S par $E^1 \circ \dots \circ E^j$. Le diviseur exceptionnel $\mathcal{D}_d^n = \mathfrak{E}_d^n(p, S)^{-1}(0)$ est une chaîne de n composantes irréductibles $\{D_i\}_{1 \leq i \leq n}$ telle que pour tout i

$$(E_1 \circ \dots \circ E_i)^{-1}(p) = E_{i+1} \circ \dots \circ E_n(D_1 \cup \dots \cup D_i).$$

Nous appelons D_i la *i^{ème}* composante de $\mathfrak{E}^n(p, S)$

Soit f une fonction quasi-homogène

$$f = \left\{ \sum_{\alpha i + \beta j = \gamma} a_{ij} x^i y^j = 0 \right\}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^*, \quad \text{pgcd}(\alpha, \beta) = 1, \quad \alpha < \beta.$$

Écrivons l'algorithme d'Euclide pour le couple (α, β) :

$$r_0 = \beta, r_1 = \alpha \quad \left\{ \begin{array}{l} r_0 = q_1 r_1 + r_2 \\ \dots \\ r_i = q_{i+1} r_{i+1} + r_{i+2} \quad . \\ \dots \\ r_N = q_{N+1} r_{N+1} + 0 \end{array} \right. \quad (\text{V.2})$$

Les équations (V.2) permettent une description précise du processus de réduction de f :

Proposition V.2.1. *Le morphisme total du processus de réduction de f s'écrit*

$$\mathfrak{E}^{q_1}(p_1, S_1) \circ \mathfrak{E}^{q_2}(p_2, S_2) \circ \dots \circ \mathfrak{E}^{q_{N+1}}(p_{N+1}, S_{N+1}) \quad (\text{V.3})$$

où

1. $p_1 = 0, S_1 = \{y = 0\}$.
2. p_{i+1} est le point d'intersection de la $(q_i)^{\text{ième}}$ composante et de la $(q_i - 1)^{\text{ième}}$ composante de $\mathfrak{E}^{q_i}(p_i, S_i)$.
3. S_{i+1} est le germe de courbe lisse déterminé par la $(q_{i-1})^{\text{ième}}$ composante de $\mathfrak{E}^{q_i}(p_i, S_i)$.

Démonstration: La preuve est une récurrence sur la longueur de l'algorithme d'Euclide. Si la longueur est 1, comme α et β sont premiers entre eux, l'algorithme se réduit à

$$r_0 = \beta, r_1 = \alpha = 1 \quad r_0 = r_0 \times r_1.$$

Dans les coordonnées (x, y) , le morphisme $\mathfrak{E}^{r_0}(0, \{y = 0\})$ est donné localement au voisinage du point d'attache de $\{f = 0\}$ par

$$\mathfrak{E}_d^{r_0}(0, \{y = 0\})(x_1, y_1) = (x_1, y_1 x_1^{r_0}).$$

Ainsi le relevé $\mathfrak{E}^{r_0}(0, \{y = 0\})^* f$ s'écrit

$$\left(\mathfrak{E}^{r_0}(0, \{y = 0\})^* f \right)(x_1, y_1) = \sum_{i+r_0j=\gamma} a_{ij} x_1^{i+r_0j} y_1^j = x_1^\gamma \sum_{i+r_0j=\gamma} a_{ij} y_1^j$$

La courbe $\sum_{i+r_0j=\gamma} a_{ij} y_1^j = 0$ est une union finie de germes de courbes lisses transverses au diviseur exceptionnel. On vérifie que dans toute autre carte du processus d'éclatement, la fonction $\mathfrak{E}^{r_0}(0, \{y = 0\})^* f$ ne présente pas de lieu de zéros transverse au diviseur sauf peut-être le long de la première composante du diviseur exceptionnel : ce dernier cas apparaît si et seulement si le germe de courbe $\{x = 0\}$ est une composante de $f^{-1}(0)$. Dans tous les cas, la courbe $f^{-1}(0)$ ou la fonction f sont réduites par le morphisme $\mathfrak{E}^{r_0}(0, \{y = 0\})$. Si la longueur de l'algorithme d'Euclide est strictement supérieure à 1, en utilisant les notations de (V.2), on considère le morphisme $\mathfrak{E}^{q_1}(p_1, S_1)$. Comme précédemment, le relevé de f peut s'écrire

$$\begin{aligned} f_1(x_1, y_1) = \mathfrak{E}^{q_1}(0, \{y = 0\})^* f(x_1, y_1) &= \sum_{\alpha+\beta j=\gamma} a_{ij} x_1^{i+q_1j} y_1^j \\ &= \sum_{\alpha+(i+q_1j)+r_2j=\gamma} a_{ij} x_1^{i+q_1j} y_1^j. \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit d'observer que l'équation ci-dessus définit un germe de courbe quasi-homogène de poids (α, r_2) . Or la longueur de l'algorithme d'Euclide du couple (α, r_2) est strictement plus petite que celle du couple (α, β) . Ainsi, l'hypothèse de récurrence assure que le processus de réduction de f_1 admet une description du type (V.3). Comme le morphisme de réduction de f est la composition de $\mathfrak{E}^{q_1}(0, \{y = 0\})$ et du morphisme de réduction de f_1 , la proposition est démontrée.

□

L'arbre dual du processus de réduction de \mathcal{F} est donc de la forme

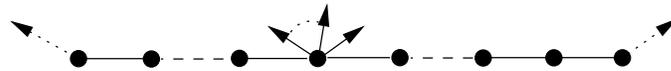


FIG. V.2 – Arbre dual d'un feuilletage quasi-homogène.

D-rigidité.

On dispose d'un résultat caractérisant les polynômes quasi-homogènes parmi les fonctions en termes de modules analytiques : f est un polynôme quasi-homogène si et seulement si l'équivalence suivante est vérifiée

pour toute fonction g , f est analytiquement équivalente à g si et seulement si la courbe $f^{-1}(0)$ est analytiquement conjuguée à $g^{-1}(0)$.

En substance, les modules d'un feuilletage admettant une intégrale première qui est un polynôme quasi-homogène sont ceux de ses séparatrices. Cette propriété s'étend au feuilletage quelconque quasi-homogène.

Théorème V.2.1 ([28]). *Soit \mathcal{F} un feuilletage de type courbe généralisée quasi-homogène. Le feuilletage \mathcal{F} est d-quasi-homogène, c'est à dire toute déformation isoholonomique Ω de \mathcal{F} satisfait l'équivalence suivante : Ω est analytiquement trivial si et seulement si la famille évisingulière des germes de courbes $\{Sep(\Omega_t)\}_t$ est analytiquement triviale.*

Cet théorème affirme en somme que les modules locaux à pseudo-groupe constant d'un feuilletage quasi-homogène s'identifient aux modules locaux des séparatrices.

V.2.2 Modules des feuilletages quasi-homogènes.

Afin d'établir l'absence d'obstruction *transverse* à l'identité entre modules d'un feuilletage quasi-homogène et modules de son holonomie, quelques propriétés des automorphismes de singularités réduites sont rappelées.

Les automorphismes des singularités réduites.

Soit \mathcal{F} un germe de feuilletage réduit à l'origine de \mathbb{C}^2 défini sur un polydisque ouvert V . Le feuilletage \mathcal{F} est donné par une 1-forme holomorphe ω à singularité isolée. On suppose que la forme ω présente deux valeurs propres non-nulles. Dans ces conditions, \mathcal{F} admet exactement deux séparatrices lisses et transverses. Notons S une des ces séparatrices.

Soit U un ouvert de $S \cap V$. On note $\text{Aut}(\mathcal{F}, U)$ le groupe des germes le long de l'ouvert U des automorphismes de V fixant chaque point de U et laissant globalement invariant le feuilletage, c'est-à-dire, vérifiant

$$\phi^* \omega \wedge \omega = 0 \quad \text{et} \quad \phi|_U = \text{Id}.$$

On note $\text{Fix}(\mathcal{F}, U)$ le sous-groupe des automorphismes de $\text{Aut}(\mathcal{F}, U)$ qui laissent invariante chaque feuille de \mathcal{F} . Dans la littérature, $\text{Aut}(\mathcal{F}, U)$ est appelé le groupe d'isotropie de la singularité \mathcal{F} [1].

Soit T un germe de courbe lisse transverse à S . On note h le difféomorphisme d'holonomie de \mathcal{F} calculé sur T . Soit ϕ appartenant à $\text{Aut}(\mathcal{F}, U)$. Le germe $\phi(T)$ étant un germe de courbe transverse à la séparatrice S , on peut considérer τ_ϕ le transport holonome de T vers $\phi(T)$: au voisinage de $S \cap T$, le feuilletage est régulier et admet S comme courbe invariante ; il existe donc un système de coordonnées (u, v) qui redresse localement \mathcal{F} et T :

$$S = \{u = 0\}, \quad T = \{v = 0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{F} = \{u = \text{cst}\}.$$

L'application τ_ϕ est alors définie comme l'unique application holomorphe vérifiant

$$\tau_\phi : (u, v) \in (T, S \cap T) \longmapsto (u, \alpha(v)) \in (\phi(T), S \cap T).$$

Une telle application existe en vertu du théorème des fonctions implicites. La composée $\tau_\phi^{-1} \circ \phi|_T$ est un automorphisme de T qui commute avec l'holonomie. Cette construction détermine un morphisme de groupe

$$\text{Aut}(\mathcal{F}, U) \longrightarrow \text{Cent}(h) / \langle h \rangle \tag{V.4}$$

et l'on dispose en fait du lemme suivant :

Lemme V.2.2. *Il existe une suite exacte de groupes*

$$0 \longrightarrow \text{Fix}(\mathcal{F}, U) \longrightarrow \text{Aut}(\mathcal{F}, U) \longrightarrow \text{Cent}(h) / \langle h \rangle \longrightarrow 0 \tag{V.5}$$

Démonstration: Soit g appartenant à $\text{Cent}(h) / \langle h \rangle$. Fixons une fibration π au dessus de S^* ayant T pour fibre. Soit p appartenant à un voisinage de U privé de la séparatrice de \mathcal{F} transverse à S . Notons τ_p un chemin quelconque dans S reliant $\pi(p)$ et $T \cap S$. Notons encore τ_p le transport holonome induit par τ respectant la fibration π . On pose alors

$$G(p) = \tau_p^{-1} \circ g \circ \tau_p(p).$$

L'application G est bien définie car g commute à l'holonomie : en effet, si τ'_p désigne le transport holonome d'un autre chemin reliant $\pi(p)$ et $T \cap S$, alors l'application $\tau'_p \circ \tau_p^{-1}$ appartient au groupe engendré par l'holonomie h . Ainsi, on dispose des relations :

$$\tau_p'^{-1} \circ g \circ \tau'_p = \tau_p^{-1} \circ h^{-k} \circ g \circ h^k \circ \tau_p = \tau_p^{-1} \circ g \circ \tau_p.$$

De plus, G est un automorphisme de U privé de la séparatrice transverse à S qui est borné au voisinage de S . Ainsi il se prolonge en un élément de $\text{Aut}(\mathcal{F}, U)$ dont l'image par le morphisme (V.4) est visiblement g . La deuxième flèche de la suite exacte (V.5) est donc surjective. De plus, par définition, son noyau est constitué des transformations de $\text{Fix}(\mathcal{F}, U)$.

□

Par la suite, on appliquera ce lemme en choisissant pour U un voisinage de la singularité dans la séparatrice ou une couronne entourant la singularité.

Deux feuilletages quasi-homogènes mais une seule déformation isoholonomique.

Soit S une courbe quasi-homogène séparatrice de deux feuilletages de type courbe généralisée \mathcal{F} et \mathcal{F}' et E le processus de réduction des singularités de S . Le processus E est aussi le processus de réduction de \mathcal{F} et \mathcal{F}' . Notons $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$ le diviseur et l'arbre cime de ce processus. Supposons que les holonomies de la composante centrale des feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{F}' soient conjuguées. On dispose alors du lemme suivant :

Proposition V.2.2. *Il existe une déformation isoholonomique reliant \mathcal{F} et \mathcal{F}' . En particulier, \mathcal{F} et \mathcal{F}' ont mêmes pseudo-groupes d'holonomie.*

Démonstration: Considérons un recouvrement distingué $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ du diviseur exceptionnel \mathcal{D} . La proposition est visiblement équivalente à l'existence d'une famille d'automorphismes $\{\psi_i\}$ telle que

1. $\psi_i : U_i \in \mathcal{U} \rightarrow U_i$ conjugue les feuilletages $E^*\mathcal{F}|_{U_i}$ et $E^*\mathcal{F}'|_{U_i}$.
2. pour tout i, j , $\psi_i^{-1} \circ \psi_j$ agit dans les feuilles locales de $E^*\mathcal{F}$.

En effet, on dispose alors de l'isomorphisme

$$E^*\mathcal{F}' \simeq \coprod_{i \in \mathbb{I}} E^*\mathcal{F}|_{U_i} / x \sim \psi_i^{-1} \circ \psi_j x.$$

Comme $\psi_i^{-1} \circ \psi_j$ agit dans les feuilles locales de $E^*\mathcal{F}$, il existe d'après [1] une famille (X_{ij}) de champs de vecteurs holomorphes sur $U_i \cap U_j$ et tangents à \mathcal{F} ainsi qu'une famille de fonctions holomorphes (t_{ij}) telles qu'on dispose de relations

$$\psi_i^{-1} \circ \psi_j = \Phi_{X_{ij}}^{t_{ij}}$$

où Φ_X^t désigne le flot. La déformation définie par

$$s \mapsto \coprod_{i \in \mathbb{I}} E^*\mathcal{F}|_{U_i} / x \sim \Phi_{X_{ij}}^{s \cdot t_{ij}} x, \quad s \in \overline{\mathbb{D}}$$

est une déformation isoholonomique de \mathcal{F} vers \mathcal{F}' . Nous allons donc construire la famille $\{\psi_i\}$.

Notons D_0 la composante centrale du diviseur \mathcal{D} et les autres composantes étant désignées de façon naturelle (Fig. V.2) par

$$\text{Comp}(\mathcal{D}) = \{D_{-m}, D_{-m-1}, \dots, D_{-1}, D_0, D_1, \dots, D_{p-1}, D_p\}.$$

Soit s_1, \dots, s_n les points singuliers du diviseur sur D_0 . Comme les feuilletages admettent des représentations d'holonomies conjuguées, il existe H_0 un biholomorphisme au voisinage de $D_0 \setminus \{s_1, \dots, s_n\}$ qui conjugue les feuilletages. En effet, fixons une courbe T_0 transverse à D_0 sur laquelle sont calculées les représentations d'holonomies projectives respectives. Par hypothèse, il existe un germe d'automorphisme $h_0 : T_0 \rightarrow T_0$ tel que pour tout $[\gamma] \in \Pi_1(D_0 \setminus \{s_1, \dots, s_n\})$ et $x \in T_0$

$$h_0([\gamma]_{\mathcal{F}}x) = [\gamma]_{\mathcal{F}'}h_0(x) \tag{V.6}$$

où $[\gamma]_{\mathcal{F}}$ et $[\gamma]_{\mathcal{F}'}$ désignent les images de γ par les représentations d'holonomies respectives. Fixons une fibration π_0 au-dessus de D_0 dont T_0 , les composantes de la transformée stricte de S attachées à D_0 et les composantes du diviseur transverses à D_0 sont des fibres. Une telle fibration existe car D_0 est le produit de l'éclatement du point singulier d'une courbe homogène. On prolonge alors h_0 par transport holonome sur un voisinage de D_0 privé des singularités : pour tout x dans ce voisinage, on considère un chemin γ dans la feuille reliant x à T_0 . On définit alors $H_0(x)$ comme l'extrémité du relevé de γ selon la fibration π_0 dans la feuille passant par $H_0(T(x))$ où $T(x)$ désigne l'extrémité de γ . La relation (V.6) assure que cette définition ne dépend pas du chemin γ choisi. Par construction, l'application H_0 est bornée au voisinage des composantes de S et des composantes du diviseur ; ainsi, elle se prolonge sur un voisinage tubulaire de D_0 .

Soit D_1 une composante du diviseur qui rencontre D_0 au point s . Comme D_1 ne présente qu'au plus deux points singuliers, les représentations d'holonomies de $E^*\mathcal{F}$ et $E^*\mathcal{F}'$ sont de la forme

$$\begin{aligned} k \in \mathbb{Z} = \Pi_1(D_1 \setminus \text{Sing}(\mathcal{D})) &\rightarrow [\eta]_{\mathcal{F}}^k \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \\ k \in \mathbb{Z} = \Pi_1(D_1 \setminus \text{Sing}(\mathcal{D})) &\rightarrow [\eta]_{\mathcal{F}'}^k \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \end{aligned}$$

où $[\eta]_{\mathcal{F}}$ et $[\eta]_{\mathcal{F}'}$ désignent les difféomorphismes d'holonomies d'un lacet η dans D_1 faisant le tour de s calculés pour les feuilletages respectifs $E^*\mathcal{F}$ et $E^*\mathcal{F}'$. Or, ces feuilletages sont analytiquement équivalents au voisinage de s . Ainsi, les applications $[\eta]_{\mathcal{F}}$ et $[\eta]_{\mathcal{F}'}$ sont analytiquement conjuguées : il existe $\psi \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ tel que

$$[\eta]_{\mathcal{F}} = \psi^{-1} \circ [\eta]_{\mathcal{F}'} \circ \psi.$$

Finalement, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(D_1 \setminus \text{Sing}(\mathcal{D})) & \xrightarrow{\text{Hol}_{\mathcal{F}}} & \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \\ \text{Id} \downarrow & & \psi^* \downarrow \\ \Pi_1(D_1 \setminus \text{Sing}(\mathcal{D})) & \xrightarrow{\text{Hol}_{\mathcal{F}'}} & \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \end{array}$$

constitue une conjugaison des représentations d'holonomies de $E^*\mathcal{F}$ et $E^*\mathcal{F}'$ au-dessus de D_1 . Maintenant, étant donnée la géométrie de l'arbre dual, l'argument précédent se propage le long

du diviseur. En effectuant la même construction qu'au voisinage de D_0 , on obtient pour chaque composante D du diviseur un automorphisme H_D d'un voisinage tubulaire de D qui laisse invariante la composante et vérifie

$$H_D^* \mathcal{F} = \mathcal{F}'.$$

Soit le recouvrement distingué $\{U_i\}_{i \in \mathbb{I} = \mathbb{I}_0 \cup \mathbb{I}_1}$ du diviseur défini par

$$\begin{cases} D \in \mathbb{I}_0 = \text{Comp}(\mathcal{D}), & U_D = D \setminus \text{Sing}(E^* \mathcal{F}) \\ (D, D') \in \mathbb{I}_1 = \text{Comp}(\mathcal{D})^2, & U_{(D, D')} = T(D) \cap T(D') \cap \mathcal{D} \end{cases}.$$

On considère la filtration suivante $\{\mathbb{I}_n\}_{n \geq 0}$ de \mathbb{I} :

$$\mathbb{I}_n = \{D_{-n}, \dots, D_n\} \cup \{D_{-n}, \dots, D_n\}^2$$

Lemme V.2.3. *Pour tout n , il existe une famille $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{I}_n}$ telle que pour tout $D \in \mathbb{I}_n$, ϕ_D appartienne $\text{Aut}(\mathcal{F}, U_D)$ et pour tout $(D, (D, D')) \in \mathbb{I}_n^2$ les applications*

$$\phi_D^{-1} \circ H_D^{-1} \circ H_{D'} \circ \phi_{(D, D')}|_{U_D \cap U_{(D, D')}} \quad \text{et} \quad \phi_{D'}^{-1} \circ \phi_{(D, D')}|_{U_{D'} \cap U_{(D, D')}}$$

laissent invariante chaque feuille locale de $E^ \mathcal{F}$.*

Démonstration: La preuve est une récurrence sur l'entier n . Pour $n = 0$, le lemme est trivial puisque la condition est vide et l'on choisit $\phi_{D_0} = \text{id}$. Supposons le résultat vrai au rang n . L'automorphisme $\phi_{D_n}^{-1} \circ H_{D_n}^{-1} \circ H_{D_{n+1}}$ est un automorphisme du feuilletage défini dans un voisinage de $U_{D_n} \cap U_{(D_n, D_{n+1})}$. D'après le lemme (V.2.2), il existe $\phi_{(D_n, D_{n+1})}$ appartenant à $\text{Aut}(\mathcal{F}, U_{(D_n, D_{n+1})})$ tel que l'automorphisme

$$\phi_{D_n}^{-1} \circ H_{D_n}^{-1} \circ H_{D_{n+1}} \circ \phi_{(D_n, D_{n+1})}$$

laisse la feuille locale invariante. Comme $U_{D_{n+1}}$ est conforme à une couronne autour de singularité contenue dans $U_{(D_n, D_{n+1})}$, il existe de même un automorphisme $\phi_{D_{n+1}}$ dans $\text{Aut}(\mathcal{F}, U_{D_{n+1}})$ tel que

$$\phi_{D_{n+1}}^{-1} \circ \phi_{(D_n, D_{n+1})}$$

laisse invariante chaque feuille locale. Ces deux affirmations constituent l'hypothèse au rang $n + 1$.

□

Dés lors, la famille d'applications $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ définie par

$$\begin{cases} D \in \mathbb{I}_0, & \psi_D = \phi_D \circ H_D \\ (D, D') \in \mathbb{I}_1, & \psi_{(D, D')} = \psi_{(D, D')} \circ H_{D'} \end{cases}$$

vérifie les conditions annoncées en début de preuve.

□

Équivalence analytique des feuilletages quasi-homogènes ayant mêmes holonomies.

Le théorème de réalisation à paramètres nous permet désormais de montrer que la classification à séparatrices fixées des feuilletages de type courbe généralisée quasi-homogènes se ramène à la classification des holonomies. Précisément,

Théorème V.2.4. *Soit \mathcal{F} et \mathcal{F}' deux feuilletages de type courbe généralisée quasi-homogènes ayant leurs séparatrices analytiquement équivalentes. Si les holonomies des composantes centrales sont conjuguées, alors \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont analytiquement conjuguées.*

Ce résultat contient en particulier la caractérisation des applications quasi-homogènes parmi les applications holomorphes : en effet, si f est quasi-homogène et g est une application holomorphe telles que $f^{-1}(0)$ et $g^{-1}(0)$ sont conjuguées, alors les feuilletages $\{df = 0\}$ et $\{dg = 0\}$ ont mêmes holonomies, celles-ci étant linéaires et dès lors complètement déterminées par l'arbre de réduction. Le théorème ci-dessus assure alors que les feuilletages et donc les fonctions f et g sont analytiquement conjuguées.

*Démonstration:*V.2.4- On peut supposer que \mathcal{F} et \mathcal{F}' ont mêmes séparatrices. D'après la proposition (V.2.2), il existe une déformation isoholonomique \mathcal{R} de base $\overline{\mathbb{D}}$ reliant \mathcal{F} et \mathcal{F}' . Supposons \mathcal{F} et \mathcal{F}' fibres de \mathcal{R} respectivement en 0 et 1. Soit S les séparatrices de \mathcal{F} et S_{triv} la déformation triviale de S au-dessus de $\overline{\mathbb{D}}$, $S_{triv} = S \times \overline{\mathbb{D}}$. En appliquant le théorème de réalisation à paramètres aux couples \mathcal{R} et S_{triv} en choisissant $C = \{0, 1\}$ comme sous-ensemble analytique, on détermine une déformation $\mathcal{R}_{\overline{\mathbb{D}}^2}$ d'espace de paramètres $\overline{\mathbb{D}}^2$ telle que

1. $\mathcal{R}_{\overline{\mathbb{D}}^2}|_{\overline{\mathbb{D}} \times 0} \simeq \mathcal{R}$.
2. $\mathcal{R}_{\overline{\mathbb{D}}^2}|_{\overline{\mathbb{D}} \times 1}$ admet comme séparatrices de S_{triv} .
3. $\mathcal{R}_{\overline{\mathbb{D}}^2}|_{0 \times \overline{\mathbb{D}}}$ et $\mathcal{R}_{\overline{\mathbb{D}}^2}|_{1 \times \overline{\mathbb{D}}}$ sont des déformations isoholonomiques triviales.

La déformation isoholonomique $\mathcal{R}_{\overline{\mathbb{D}}^2}|_{R \times \{1\}}$ est celle d'un feuilletage de type courbe généralisée non-dicritique quasi-homogène dont la déformation des séparatrices sous-jacente est analytiquement triviale. D'après le théorème de d-rigidité, la déformation $\mathcal{R}_{\overline{\mathbb{D}}^2}|_{R \times \{1\}}$ est triviale. Dès lors, par construction de $\mathcal{R}_{\overline{\mathbb{D}}^2}$, on dispose des isomorphismes

$$\mathcal{F} \simeq \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{D}}^2}|_{\{0\} \times \{0\}} \simeq \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{D}}^2}|_{\{0\} \times \{1\}} \simeq \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{D}}^2}|_{\{1\} \times \{1\}} \simeq \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{D}}^2}|_{\{1\} \times \{0\}} \simeq \mathcal{F}'.$$

Ainsi les feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont analytiquement conjugués.

□

Chapitre VI

Les feuilletages de deuxième espèce.

Le but de ce chapitre est d'étudier les obstructions au théorème de réalisation dans le cas dicritique. Pour cela, une notion de *singularité de deuxième espèce* généralisant celle de [31] est mise à jour et étudiée dans la perspective des résultats standards concernant les singularités de deuxième espèce non-dicritiques. Cette approche permet d'identifier les *points de fugues* d'un feuilletage dicritique comme responsables de l'impossibilité de réaliser toute déformation des séparatrices par une déformation du feuilletage. Toutes ces constructions appellent une immersion dans le monde des feuilletages formels.

Un germe de feuilletage formel $\widehat{\mathcal{F}}$ dans \mathbb{C}^2 singulier à singularité isolée est la donnée d'un germe de 1-forme formelle ω au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$

$$\omega = \hat{a}(x, y)dx + \hat{b}(x, y)dy, \quad \text{pgcd}(\hat{a}, \hat{b}) = 1$$

où \hat{a} et \hat{b} appartiennent à $\mathbb{C}[[x, y]]$ et s'annulent à l'origine. On définit alors la *multiplicité de $\widehat{\mathcal{F}}$* par

$$\nu_0(\widehat{\mathcal{F}}) = \min \left(\text{ord}_0(\hat{a}), \text{ord}_0(\hat{b}) \right).$$

VI.1 Forme normale des singularités réduites formelles.

Comme dans le contexte convergent, un germe de feuilletage formel $\widehat{\mathcal{F}}$ singulier à singularité isolée admet un processus de réduction aboutissant à un feuilletage ne présentant que des singularités réduites formelles. La classification formelle des feuilletages singuliers réduits est bien connue. Nous la rappelons ici : il existe des coordonnées formelles (x, y) et u un germe d'unité formelle tels que $\omega = u\tilde{\omega}$ où $\tilde{\omega}$ est une des quatre formes suivantes, dites *formes normales*,

1. $\tilde{\omega} = \lambda y dx + \mu x dy$ avec $\lambda\mu \neq 0$, $\frac{\mu}{\lambda} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$,
2. $\tilde{\omega} = qy dx + px dy$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p \wedge q = 1$,
3. $\tilde{\omega} = qy(1 + \zeta(x^p y^q)^k) dx + px(1 + (\zeta - 1)(x^p y^q)^k) dy$ avec $p, q, k \in \mathbb{N}^*$ et $\zeta \in \mathbb{C}$,
4. $\tilde{\omega} = (\zeta x^p - p)y dx + x^{p+1} dy$.

Les formes du type (4) sont appelées *selle-nœud*. La variété invariante $\{x = 0\}$ est alors appelée *variété forte* et la variété $\{y = 0\}$ est appelée *variété faible*.

Définition VI.1.1. Soit $\widehat{\mathcal{F}}$ un selle-nœud et S un germe de courbe lisse formelle invariante. Nous disons que $\widehat{\mathcal{F}}$ est un selle-nœud transverse à S si S est le germe de variété forte de $\widehat{\mathcal{F}}$. Dans le cas contraire, $\widehat{\mathcal{F}}$ est un selle-nœud tangent à S .

VI.2 Multiplicité d'un feuilletage formel.

Nous allons énoncer une formule liant la multiplicité de $\widehat{\mathcal{F}}$ à l'origine de \mathbb{C}^2 et un certain nombre d'invariants naturels de la réduction des singularités de $\widehat{\mathcal{F}}$ et de ses singularités réduites. Dans cette optique, adoptons la définition suivante similaire à celle de [14].

Définition VI.2.1 (Indice et ordre de tangence). Soit $\widehat{\mathcal{F}}$ un germe de feuilletage formel.

1. Soit (S, p) un germe de courbe lisse formelle invariante. On appelle indice de S par rapport à $\widehat{\mathcal{F}}$, l'entier $\text{Ind}(\widehat{\mathcal{F}}, S, p)$ défini par :

$$\text{si } S = \{y = 0\} \text{ et } p = (0, 0), \text{ Ind}(\widehat{\mathcal{F}}, S, 0) = \text{ord}_0 b(x, 0).$$

2. Soit (S, p) un germe de courbe lisse formelle non-invariante. On appelle ordre de tangence de S par rapport à $\widehat{\mathcal{F}}$, l'entier $\text{Tan}(\widehat{\mathcal{F}}, S, p)$ défini par

$$\text{si } S = \{y = 0\} \text{ et } p = (0, 0), \text{ Tan}(\widehat{\mathcal{F}}, S, 0) = \text{ord}_0 a(x, 0).$$

La valence de $v(D)$ d'une composante irréductible D de \mathcal{D} est le nombre de composantes irréductibles de \mathcal{D} ayant un point d'intersection avec D . On note, de plus, $v_{\bar{d}}(D)$ la valence non-dicritique, c'est-à-dire le nombre de composantes non-dicritiques de \mathcal{D} ayant un point d'intersection avec D . On remarque que si D est dicritique, $v_{\bar{d}}(D) = v(D)$. Dans [14], on trouve la formule suivante généralisant la formule obtenue dans [2] en cas d'absence de composante dicritique :

Proposition VI.2.1. La multiplicité de $\widehat{\mathcal{F}}$ vérifie l'égalité

$$\nu_0(\widehat{\mathcal{F}}) + 1 = \sum_{D \in \text{Comp}(d)} \nu(D) \rho(D)$$

où

1. si D est non-dicritique, $\rho(D) = -v_{\bar{d}}(D) + \sum_{q \in D} \text{Ind}(E^* \widehat{\mathcal{F}}, D, q)$.
2. si D est dicritique, $\rho(D) = 2 - v_{\bar{d}}(D) + \sum_{q \in D} \text{Tan}(E^* \widehat{\mathcal{F}}, D, q)$.

Nous allons introduire une notion d'équation équilibrée des séparatrices de $\widehat{\mathcal{F}}$. Dans le cas non-dicritique, on retrouvera la notion de séparatrice habituelle. Une séparatrice de $\widehat{\mathcal{F}}$ est *isolée* si sa transformée stricte est attachée à une composante non-dicritique de \mathcal{D} . Si D est dicritique, on appelle *pinceau de D* l'ensemble des séparatrices transverses attachées à D . On adopte alors la définition suivante

Définition VI.2.2. Un système complet de séparatrices est la réunion de deux germes de courbes $Z \cup P$ où

1. Z est l'ensemble des séparatrices isolées formelles et, pour chaque composante dicritique D de valence plus petite que deux, $2 - v(D)$ courbes du pinceau de D .
2. P est l'union, pour chaque composante de valence au moins trois, de $v(D) - 2$ courbes du pinceau de D .

Une *équation équilibrée des séparatrices* est un germe de fonction méromorphe \widehat{F} dont les zéros et les pôles sont simples et correspondent respectivement aux ensembles Z et P d'un système complet de séparatrices.

L'objectif est de démontrer une formule liant la multiplicité d'un feuilletage formel et la multiplicité d'une équation équilibrée de ses séparatrices. Soit $\widehat{\mathcal{F}}$ un germe de singularité formelle à singularité isolée dans \mathbb{C}^2 , E la réduction de ses singularités et \widehat{F} une équation équilibrée des séparatrices. La multiplicité de \widehat{F} est définie comme la différence $\nu_0(\widehat{N}) - \nu_0(\widehat{P})$ dans une écriture $\widehat{F} = \frac{\widehat{N}}{\widehat{P}}$. On note $\mathcal{SNT}(\widehat{\mathcal{F}})$ l'ensemble des singularités du feuilletage réduit $E^*\widehat{\mathcal{F}}$ qui sont des selle-nœuds tangents au diviseur exceptionnel.

Proposition VI.2.2. *On dispose de l'expression suivante :*

$$\nu_0(\widehat{F}) = \nu_0(\widehat{\mathcal{F}}) + 1 + \sum_{s \in \mathcal{SNT}(\widehat{\mathcal{F}})} \sum_{D \in V(s)} \nu(D) \left(\text{Ind}(E^*\widehat{\mathcal{F}}, D, s) - 1 \right)$$

où $V(s)$ désigne l'ensemble des composantes irréductibles du diviseur qui contiennent le point s . En particulier, la multiplicité d'une équation équilibrée ne dépend pas du choix d'un système complet de séparatrices.

Démonstration: Écrivons $\widehat{F} = \frac{\widehat{N}}{\widehat{P}}$ où \widehat{N} et \widehat{P} sont des germes de fonctions holomorphes. Les courbes $\{\widehat{N} = 0\}$ et $\{\widehat{P} = 0\}$ ainsi que les feuilletages induits par $d\widehat{N}$ et $d\widehat{P}$ sont réduits par E . La proposition (VI.2.1) appliquée successivement à $\widehat{\mathcal{F}}$, $d\widehat{N}$ et $d\widehat{P}$ fournit les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \nu_0(\widehat{\mathcal{F}}) + 1 &= \sum_{D \in \text{Comp}(d)} \nu(D) \rho(D), \\ \nu_0(d\widehat{N}) + 1 &= \sum_{D \in \text{Comp}(d)} \nu_{\widehat{N}}(D) \rho_{\widehat{N}}(D), \\ \nu_0(d\widehat{P}) + 1 &= \sum_{D \in \text{Comp}(d)} \nu_{\widehat{P}}(D) \rho_{\widehat{P}}(D). \end{aligned}$$

Les multiplicités des composantes ne dépendent que du processus d'éclatements et pas des feuilletages, donc, pour toute composante D , il vient

$$\nu(D) = \nu_{\widehat{N}}(D) = \nu_{\widehat{P}}(D).$$

Si D est non-dicritique pour \mathcal{F} , on obtient l'écriture suivante

$$\rho(D) = \text{Iso}(D) + \sum_{q \in D \cap \mathcal{SNT}(\widehat{\mathcal{F}})} (\text{Ind}(E^*\widehat{\mathcal{F}}, D, q) - 1),$$

où $\text{Iso}(D)$ est le nombre de séparatrices formelles isolées attachées à D . Si D est dicritique pour $\widehat{\mathcal{F}}$, comme $E^*\widehat{\mathcal{F}}$ est réduit, l'entier $\rho(D)$ est égal à $2 - v(D)$. Par construction, si D est une composante non-dicritique, les entiers $\rho_{\widehat{N}}(D)$ et $\text{Iso}(D)$ sont égaux. De plus, si D est une composante dicritique de valence plus petite que deux, l'entier $\rho_{\widehat{N}}(D)$ vaut $2 - v(D) = \rho(D)$. Enfin, comme la courbe $\{\widehat{N} = 0\}$ ne présente pas de zéro attaché aux composantes de valence supérieure à trois, on obtient la relation

$$\nu_0(\widehat{N}) = \nu_0(d\widehat{N}) + 1 = \sum_{\substack{D \in \text{Comp}(d) \\ D \text{ non-dicritique ou} \\ D \text{ dicritique et } v(D) \leq 2}} \nu(D)\rho(D) - \sum_{\substack{D \in \text{Comp}(d) \\ D \text{ non-dicritique}}} \nu(D) \sum_{q \in D \cap \text{SNT}(\widehat{\mathcal{F}})} (\text{Ind}(E^*\widehat{\mathcal{F}}, D, q) - 1). \quad (\text{VI.1})$$

Maintenant, $E^*\widehat{\mathcal{F}}$ étant réduit, tout point q appartenant à une composante dicritique D satisfait la relation

$$\text{Tan}(E^*\widehat{\mathcal{F}}, D, q) = 0.$$

Ainsi, pour toute composante dicritique de valence supérieure à trois, il vient $\rho_{\widehat{P}}(D) = -\rho(D)$. En dehors de cet unique cas, l'entier $\rho_{\widehat{P}}(D)$ est nul. Ainsi, on dispose de la relation

$$\nu_0(\widehat{P}) = \nu_0(d\widehat{P}) + 1 = - \sum_{\substack{D \in \text{Comp}(d) \\ D \text{ dicritique et } v(D) \geq 3}} \nu(D)\rho(D). \quad (\text{VI.2})$$

La proposition est une combinaison des relations (VI.1) et (VI.2). □

VI.3 Feuilletage dicritique de deuxième espèce.

La notion d'équation équilibrée des séparatrices est naturellement attachée à celle de *feuilletage dicritique de deuxième espèce* introduite maintenant. Les propriétés connues des feuilletages non-dicritiques de deuxième espèce vont présenter des analogues naturels dans le contexte présent.

Définition VI.3.1. $\widehat{\mathcal{F}}$ est dit de deuxième espèce si aucun point singulier de $E^*\widehat{\mathcal{F}}$ n'est un selle-nœud tangent au diviseur exceptionnel.

On ne demande donc pas que $\widehat{\mathcal{F}}$ soit non-dicritique. Il résulte immédiatement de la proposition (VI.2.2) le critère suivant

Proposition VI.3.1. Soit \widehat{F} une équation équilibrée des séparatrices. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\widehat{\mathcal{F}}$ est un feuilletage de deuxième espèce.
2. $\nu_0(\widehat{F}) = \nu_0(\widehat{\mathcal{F}}) + 1$.

La réduction des singularités de \widehat{F} consiste à réduire les singularités de ses zéros et de ses pôles, puis à faire encore suffisamment d'éclatements pour aboutir à une fonction méromorphe sans lieu d'indétermination. On peut montrer que la réduction des singularités de \widehat{F} et de $\widehat{\mathcal{F}}$ sont égales. Lorsque le feuilletage n'est pas dicritique, on retrouve le critère démontré dans [31].

Pour analyser le problème de réalisation pour un feuilletage dicritique, nous allons établir un analogue de la suite exacte de faisceaux (III.2.1) dans le contexte présent. Dans cette optique, on établit en premier lieu le lemme suivant :

Lemme VI.3.1. *Pour toute composante D de \mathcal{D} , on dispose de l'alternative suivante :*

1. si D est non-dicritique, $\nu_D(\widehat{F}) = \nu_D(\widehat{\mathcal{F}}) + 1$,
2. si D est dicritique, $\nu_D(\widehat{F}) = \nu_D(\widehat{\mathcal{F}})$,

l'entier $\nu_D(*)$ désignant la multiplicité de l'éclaté en un point générique de D .

Démonstration: La démonstration est une récurrence sur la hauteur de la composante de D dans la processus d'éclatements. Au rang 1, il suffit de constater les faits suivants : les entiers $\nu_{D_0}(F)$ et $\nu_0(F)$ sont égaux ; si D_0 est non-dicritique, $\nu_{D_0}(\widehat{\mathcal{F}}) = \nu_0(\widehat{\mathcal{F}})$; si D_0 est dicritique $\nu_{D_0}(\widehat{\mathcal{F}}) = \nu_0(\widehat{\mathcal{F}}) + 1$. L'initialisation est donc la proposition (VI.3.1). Pour l'induction, on suppose que l'on regarde le processus de réduction jusqu'à la hauteur i et que l'on s'intéresse à une composante D de \mathcal{D}^{i+1} obtenue par éclatement d'un point c . On note \widehat{F}^i l'éclaté divisé de \widehat{F} par E^{i*} . On dispose alors des relations suivantes :

$$\nu_D(\widehat{\mathcal{F}}) = \nu_c(E^{i*}\widehat{\mathcal{F}}) + \sum_{D_c \in \mathcal{V}(c)} \nu_{D_c}(\widehat{\mathcal{F}}) + \epsilon(D), \quad (\text{VI.3})$$

$$\nu_D(\widehat{F}) = \nu_c(\widehat{F}^i) + \sum_{D_c \in \mathcal{V}(c)} \nu_{D_c}(\widehat{F}), \quad (\text{VI.4})$$

où $\epsilon(D)$ vaut 0 si D est non-dicritique, 1 sinon. Désormais, il faut distinguer les cas :

1. $V(c)$ contient une seule composante D_0 .

- (a) D_0 est non-dicritique : soit \widehat{F}_c le germe de fonction méromorphe au voisinage de c obtenue en multipliant \widehat{F}^i et un germe d'équation de D_0 en c . Il est clair que \widehat{F}_c est une équation équilibrée des séparatrices du feuilletage $E^{i*}\widehat{\mathcal{F}}$. D'après la proposition (VI.3.1), il vient

$$\nu_c(\widehat{F}_c) = \nu_c(E^{i*}\widehat{\mathcal{F}}) + 1. \quad (\text{VI.5})$$

Or, par construction, on dispose de l'égalité

$$\nu_c(\widehat{F}_c) = 1 + \nu_c(\widehat{F}_c^i). \quad (\text{VI.6})$$

De plus, l'hypothèse de récurrence assure la relation

$$\nu_{D_0}(\widehat{F}) = \nu_{D_0}(\widehat{\mathcal{F}}) + 1. \quad (\text{VI.7})$$

En combinant (VI.3), (VI.4), (VI.5), (VI.6) et (VI.7), il vient

$$\nu_D(\widehat{F}) = \nu_D(\widehat{\mathcal{F}}) + 1 - \epsilon(D).$$

- (b) D_0 est dicritique : dans ce cas, on prend pour \widehat{F}_c le germe \widehat{F}_c^i . À nouveau, \widehat{F}_c est une équation équilibrée des séparatrices de $E^{i*}\widehat{\mathcal{F}}$. Ainsi, $\nu_c(\widehat{F}_c)$ est égal à $\nu_c(E^{i*}\widehat{\mathcal{F}}) + 1$. On obtient donc l'égalité $\nu_c(\widehat{F}_c) = \nu_c(\widehat{F}_c^i)$. Par hypothèse de récurrence, les entiers $\nu_{D_0}(\widehat{F})$ et $\nu_{D_0}(\widehat{\mathcal{F}})$ sont égaux. En combinant les relations précédentes, il vient

$$\nu_D(\widehat{F}) = \nu_D(\widehat{\mathcal{F}}) + 1 - \epsilon(D),$$

la composante D_0 étant dicritique, $\epsilon(D)$ est nul.

2. $V(c)$ contient deux composantes D_0 et D_1 .

- (a) D_0 et D_1 sont non dicritiques : soit \widehat{F}_c le germe de fonction méromorphe obtenue en multipliant \widehat{F}^i , un germe d'équation de D_0 et un germe d'équation de D_1 en c . Visiblement \widehat{F}_c est une équation équilibrée des séparatrices du feuilletage $E^{i*}\widehat{\mathcal{F}}$. À nouveau, on sait que $\nu_c(\widehat{F}_c)$ est égal à $\nu_c(E^{i*}\widehat{\mathcal{F}}) + 1$. Or, par construction, on dispose de l'égalité $\nu_c(\widehat{F}_c) = 2 + \nu_c(\widehat{F}_c^i)$. L'hypothèse de récurrence assure de plus que, pour tout $D_c \in V(c)$, $\nu_{D_c}(\widehat{F}) = \nu_{D_c}(\widehat{\mathcal{F}}) + 1$. La combinaison des relations précédentes montre l'égalité

$$\nu_D(\widehat{F}) = \nu_D(\widehat{\mathcal{F}}) + 1 - \epsilon(D).$$

- (b) D_0 est dicritique et D_1 est non-dicritique : ce cas est similaire aux précédents. □

VI.3.1 Les faisceaux transversalement formels.

Lorsque l'on relève par l'éclatement standard de l'origine de \mathbb{C}^2 un élément de $\mathbb{C}[[x, y]]$, on obtient une série qui s'écrit dans les coordonnées standards d'un éclatement $(x, t) \mapsto (x, tx)$:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} A_k(x)t^k$$

où les fonctions A_k sont des polynômes, en particulier, des séries de rayons de convergence infinis. Aussi, on adopte la définition suivante :

Définition VI.3.2. Soit \mathcal{M} un arbre. Le faisceau des fonctions transversalement formelles $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}}$ est la limite inductive

$$\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}} = \lim_{\leftarrow k \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{\mathcal{M}}/\mathcal{I}^{k+1}.$$

Dans un système de coordonnées adaptées, les sections de $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}}$ au voisinage d'un point régulier du diviseur s'écrivent

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} A_k(y)x^k, \quad \mathcal{D} = \{x = 0\}$$

où les séries A_k ont un rayon de convergence minoré par une constante strictement positive. Au voisinage d'un point singulier du diviseur, ses sections sont de la forme

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (A_k(x) + B_k(y))(xy)^k, \quad \mathcal{D} = \{xy = 0\}$$

où les fonctions A_k et B_k ont un rayon de convergence minoré par une constante strictement positive. De cette définition découlent naturellement celles de *faisceau des 1-formes transversalement formelles* et de *faisceau des germes de champs de vecteurs transversalement formels* par simple extension des scalaires. Plus concrètement, le faisceau des germes de champs de vecteurs transversalement formels est le faisceau de base \mathcal{D} , noté \mathcal{X} , dont la fibre s'écrit en coordonnées adaptées comme l'espace des champs

$$a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

où a et b sont des germes de fonctions transversalement formelles.

On dispose alors d'une nouvelle caractérisation des singularités de deuxième espèce. Pour la préciser, définissons $\widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{N}}$ le faisceau de base \mathcal{D} des germes de champs transversalement formels tangents à la transformée totale des zéros de la fonction \widehat{N} . Les sections de $\widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{N}}$ sont ainsi des champs de vecteurs tangents au diviseur exceptionnel, tangents aux transformées strictes des séparatrices isolées mais aussi tangents à $2 - \nu(D)$ courbes du pinceau de chaque composante dicritique de valence plus petite que 2. Soit $\widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{\mathcal{F}}}$ le sous-faisceau de $\widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{N}}$ des germes de champs tangents au feuilletage $\widehat{\mathcal{F}}$. On note $\widehat{\mathcal{J}}_{\geq 3}$ le faisceau des fonctions transversalement formelles nulles le long des pôles de \widehat{F} , c'est-à-dire $\nu(D) - 2$ courbes du pinceau de chaque composante dicritique de valence plus grande que trois. Un calcul en coordonnées locales utilisant les formes normales (VI.1) permet de montrer la proposition suivante :

Proposition VI.3.2. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $\widehat{\mathcal{F}}$ est de deuxième espèce.
2. La suite de faisceaux

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{\mathcal{F}}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{N}} \xrightarrow{E^* \frac{\widehat{\omega}}{\widehat{F}}(\cdot)} \widehat{\mathcal{J}}_{\geq 3} \longrightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration: Supposons \mathcal{F} de deuxième espèce et c un point de \mathcal{D} . Le faisceau noyau du morphisme $E^* \frac{\widehat{\omega}}{\widehat{F}}(\cdot)$ défini sur $\widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{N}}$ est naturellement le faisceau $\widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{\mathcal{F}}}$. Le calcul de l'image s'effectue localement en un point p . Dans chaque cas à suivre, nous donnons une écriture locale en coordonnées adaptées de $E^* \frac{\widehat{\omega}}{\widehat{F}}$ et d'une solution de $E^* \frac{\widehat{\omega}}{\widehat{F}}(X) = g$ pour g section locale de $\widehat{\mathcal{J}}_{\geq 3}$:

1. Le point c est un point régulier d'une composante irréductible non-dicritique qui n'est ni un pôle ni un zéro de \widehat{F} :

$$E^* \frac{\widehat{\omega}}{\widehat{F}} = \frac{u}{x} dx, \quad X = \frac{g}{u} x \frac{\partial}{\partial x}, \quad (\widehat{\mathcal{J}}_{\geq 3})_c = (\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}})_c.$$

2. Le point c est un point régulier d'une composante irréductible dicritique qui n'est ni un pôle ni un zéro de \widehat{F} :

$$E^* \frac{\widehat{\omega}}{\widehat{F}} = u dy, \quad X = \frac{g}{u} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (\widehat{\mathcal{J}}_{\geq 3})_c = (\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}})_c.$$

3. Le point c est un point singulier du diviseur :

$$E^* \frac{\widehat{\omega}}{\widehat{F}} = \frac{u}{x^{\epsilon(D_0)} y^{\epsilon(D_1)}} dx, \quad X = \frac{gx^{\epsilon(D_0)} y^{\epsilon(D_1)}}{u} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (\widehat{\mathcal{J}}_{\geq 3})_c = (\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}})_c.$$

4. Le point c est un zéro de \widehat{F} :

$$E^* \frac{\widehat{\omega}}{\widehat{F}} = \frac{u}{y} dy, \quad X = \frac{g}{u} y \frac{\partial}{\partial y}, \quad (\widehat{\mathcal{J}}_{\geq 3})_c = (\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}})_c.$$

5. Le point c est un pôle de \widehat{F} :

$$E^* \frac{\widehat{\omega}}{\widehat{F}} = u y dy, \quad X = \frac{g}{u y} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (\widehat{\mathcal{J}}_{\geq 3})_c = (y) (\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}})_c.$$

Ainsi, dans chacun des cas, le morphisme $E^* \frac{\widehat{\omega}}{\widehat{F}}(\cdot)$ est surjectif dans $\widehat{\mathcal{J}}_{\geq 3}$, ce qui prouve l'exactitude de la suite.

□

Cette suite exacte présente au moins deux intérêts : elle permet de généraliser le résultat de réalisation à la classe des feuilletages de deuxième espèce et de calculer certaines obstructions à ce résultat dans le cas dicritique.

VI.4 Théorème d'existence pour les feuilletages de deuxième espèce non-dicritiques.

La suite exacte de (VI.3.2) est bien entendue à rapprocher de la suite exacte de la proposition (III.2.1). En particulier, dans le cas non-dicritique $\widehat{\mathcal{J}}_{\geq 3}$ est égal au faisceau $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}}$ et l'on retrouve l'analogie formel de (III.2.1). Le critère (VI.3.2) devient alors le résultat établi dans [31]. Avant de précisément nous pencher sur les obstructions dicritiques, nous allons utiliser la suite exacte ci-dessus pour établir le théorème de réalisation pour les feuilletages de deuxième espèce non-dicritique.

VI.4.1 Cobordisme formel

Le formalisme développé dans les chapitres (II) et (III) se transpose si naturellement dans le contexte formel que nous ne détaillons pas les définitions afférentes. L'existence de la suite exacte (VI.3.2) fournit un théorème de cobordisme infinitésimal, traduction de la proposition (III.2.2) dans le contexte formel tandis que l'algorithme (III.2.3) se généralise sans difficulté au cas formel. Aussi, nous obtenons le résultat suivant : soit $\widehat{\mathcal{F}}$ un germe de feuilletage transversalement formel marqué de deuxième espèce **non-dicritique** sur un arbre transversalement formel $\widehat{\mathcal{M}}$. Soit \widehat{Z} une croix adaptée à $\widehat{\mathcal{F}}$.

Proposition VI.4.1. *Soit $\widehat{\mathcal{N}}$ un élément de $\text{Col}_0(\widehat{\mathcal{M}}, \widehat{\mathcal{Z}}, \mathcal{U})$. Alors il existe une suite finie de 1-cocycles $(\widehat{T}_{ij}^k)_{k=1, \dots, N}$ telle que*

$$\widehat{\mathcal{N}} \stackrel{\widehat{\mathcal{C}}_0}{\simeq} \widehat{\mathcal{M}}[e^{\widehat{T}_{ij}^1}][e^{\widehat{T}_{ij}^2}][\dots][e^{\widehat{T}_{ij}^N}].$$

Ici, le 1-cocycle (\widehat{T}_{ij}^p) est à valeurs dans $\widehat{\mathfrak{X}}_{\widehat{\mathcal{F}}_p, \widehat{\mathcal{Z}}_p}$: c'est le faisceau dont la base est le diviseur de l'arbre $\widehat{\mathcal{M}}[e^{\widehat{T}_{ij}^1}][e^{\widehat{T}_{ij}^2}][\dots][e^{\widehat{T}_{ij}^{p-1}}]$ et dont la fibre est l'espace des champs de vecteurs tangents au feuilletage et à la croix obtenus par cobordisme, c'est-à-dire,

$$\widehat{\mathcal{F}}_p = \widehat{\mathcal{F}}[e^{\widehat{T}_{ij}^1}][e^{\widehat{T}_{ij}^2}][\dots][e^{\widehat{T}_{ij}^{p-1}}] \quad \text{et} \quad \widehat{\mathcal{Z}}_p = Z[e^{\widehat{T}_{ij}^1}][e^{\widehat{T}_{ij}^2}][\dots][e^{\widehat{T}_{ij}^{p-1}}].$$

Le résultat de M. Seguy étant vérifié sous l'hypothèse de deuxième espèce non-dicritique, l'algorithme de préparation du cocycle (III.3.4) persiste ici. Dès lors, on obtient un théorème de réalisation pour les feuilletages transversalement formels de deuxième espèce non-dicritiques : soit $\widehat{\mathcal{M}}'$ un arbre marqué transversalement formel.

Théorème VI.4.1 (Réalisation formelle). *Si les arbres duaux de $\widehat{\mathcal{M}}$ et $\widehat{\mathcal{M}}'$ sont conjugués par une conjugaison compatible aux marquages alors il existe $\widehat{\mathcal{F}}'$ un feuilletage transversalement formel marqué sur $\widehat{\mathcal{M}}'$ et une déformation isoholonomique transversalement formelle marquée entre $\widehat{\mathcal{F}}$ et $\widehat{\mathcal{F}}'$.*

VI.4.2 Du formel au convergent.

Un feuilletage holomorphe est dit de deuxième espèce s'il l'est en tant que feuilletage transversalement formel. Lorsque \mathcal{F} est holomorphe de deuxième espèce, une construction dans le contexte convergent dérive de la construction formelle de la proposition (VI.4.1) grâce au résultat suivant : supposons l'arbre \mathcal{M} feuilleté par un feuilletage convergent \mathcal{F} de deuxième espèce non-dicritique et considérons (\widehat{T}_{ij}) appartenant $Z^1(\mathcal{U}, \mathfrak{J}_Z \widehat{\mathfrak{X}}_{\mathcal{F}, Z})$. Alors la déformation isoholonomique associée à (\widehat{T}_{ij}) est transversalement formellement conjuguée à une déformation convergente. Précisément, on dispose du lemme suivant :

Lemme VI.4.2. *Il existe un 1-cocycle $(T_{ij}^c) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathfrak{J}_Z \mathfrak{X}_{\mathcal{F}, Z})$ tel que, pour tout $s \in \overline{\mathbb{D}}$, l'arbre $\mathcal{M}[e^{s \cdot \widehat{T}_{ij}}]$ soit isomorphe à $\mathcal{M}[e^{s \cdot T_{ij}^c}]$ dans $\widehat{\text{Col}}_0(\mathcal{M}, Z, \mathcal{U})$.*

Démonstration: Comme le feuilletage \mathcal{F} est holomorphe, pour tout i, j il existe un champ de vecteurs convergents T_{ij} tangents au feuilletage et une série transversalement formelle $\widehat{\phi}_{ij}$ tels que

$$\widehat{T}_{ij} = \widehat{\phi}_{ij} T_{ij}.$$

Soit n un entier. Considérons le cocycle (T_{ij}^c) à valeurs dans $\mathfrak{X}_{\mathcal{F}, Z}$ défini par

$$T_{ij}^c = \phi_{ij}^n T_{ij}$$

où ϕ_{ij}^n désigne un représentant du jet d'ordre n de $\widehat{\phi}_{ij}$ pour la filtration $(\mathfrak{M}^p)_{p \in \mathbb{N}^*}$. Nous allons montrer que si n est assez grand, les déformations isoholonomiques associées à \widehat{T}_{ij} et T_{ij}^c sont transversalement formellement conjuguées. Considérons le 1-cocycle d'automorphismes suivant

$$\delta_{ij}(x, t, s) = (e^{(t-s)\widehat{T}_{ij}} \circ e^{(s)T_{ij}^c}, t, s).$$

On construit alors la déformation isoholonomique suivante :

$$\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{D}}^2} = \coprod_i U_i \times \overline{\mathbb{D}}^2 /_{(x,t,s) \sim \delta_{ij}(x,t,s)}$$

qui est naturellement équipée d'une projection analytique $\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{D}}^2} \xrightarrow{\Pi} \overline{\mathbb{D}}^2$. Cette variété est le voisinage d'un diviseur $\mathcal{D}_{\overline{\mathbb{D}}^2}$ obtenu par recollement des traces du diviseur $(\mathcal{D} \cap U_i) \times \overline{\mathbb{D}}^2$. Par trivialité de la déformation isoholonomique le long de $U_i \times \overline{\mathbb{D}}^2$, il existe une famille $\{X_i\}$ de champs de vecteurs tangents au feuilletage et à la croix telle que le champ X_i soit holomorphe sur $U_i \times \overline{\mathbb{D}}^2$ et vérifie

$$(T\Pi)(X_i) = \frac{\partial}{\partial s}.$$

Le 1-cocycle $(X_i - X_j)$ est à valeurs dans le faisceau de base $\mathcal{D}_{\overline{\mathbb{D}}}$ des germes de champs de vecteurs transversalement formels tangents au feuilletage et à la croix, *verticaux* et nuls à l'ordre n le long du diviseur $\mathcal{D}_{\overline{\mathbb{D}}}$. Notons $\widehat{\mathfrak{X}}_{\mathcal{F}, Z, n}^{\overline{\mathbb{D}}^2}$ le faisceau de base $\mathcal{D}_{\overline{\mathbb{D}}}$ des germes de champs de vecteurs transversalement formels tangents au feuilletage et à la croix, *verticaux* et nuls à l'ordre n le long du diviseur $\mathcal{D}_{\overline{\mathbb{D}}^2}$. Comme $\widehat{\mathfrak{X}}_{\mathcal{F}, Z, 1}^{\overline{\mathbb{D}}^2}$ est cohérent, d'après [3], on dispose du lemme suivant

Propriété VI.4.1. *Pour n assez grand, l'application naturelle*

$$H^1(\widehat{\mathfrak{X}}_{\mathcal{F}, Z, n}^{\overline{\mathbb{D}}^2}) \longrightarrow H^1(\widehat{\mathfrak{X}}_{\mathcal{F}, Z, 1}^{\overline{\mathbb{D}}^2})$$

est triviale.

Ainsi, il existe un 0-cocycle (Y_i) à valeurs dans $\widehat{\mathfrak{X}}_{\mathcal{F}, Z, 1}^{\overline{\mathbb{D}}^2}$ tel que pour tout i, j

$$X_i - X_j = Y_i - Y_j.$$

Ainsi, en posant $X = X_i - Y_i$, on obtient un champ transversalement formel global tangent au feuilletage et à la croix tel que $T\Pi(X) = \frac{\partial}{\partial s}$. Considérons le germe d'automorphisme défini par

$$\phi(x, t, s) = (e^{(s)X}(x, t, 0), t, s).$$

Par construction, ϕ conjugue transversalement formellement les déformations isoholonomiques $\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{D}}^2}$ et $\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{D}} \times \{0\}} \times \overline{\mathbb{D}}$. Par restriction à la diagonale $\{(s, s) | s \in \overline{\mathbb{D}}\}$, il vient les relations

$$\delta_{ij}(x, s, s) = (e^{s \cdot T_{ij}^c}, s, s) \quad \text{et} \quad \delta_{ij}(x, s, 0) = (e^{s \cdot \widehat{T}_{ij}}, s, 0).$$

Aussi, les déformations isoholonomiques associées aux cocycles (\widehat{T}_{ij}) et (T_{ij}^c) sont conjuguées : pour tout s

$$\mathcal{M}[e^{s \cdot \widehat{T}_{ij}}] \overset{\widehat{\mathcal{C}}_0}{\cong} \mathcal{M}[e^{s \cdot T_{ij}^c}].$$

□

En appliquant le lemme (VI.4.2) à chaque cobordisme élémentaire du résultat (VI.4.1), on obtient un théorème de réalisation pour les feuilletages holomorphes de deuxième espèce non-dicritiques. Soit \mathcal{F} un feuilletage holomorphe de deuxième espèce non-dicritique marqué et \mathcal{M} l'arbre cime de son processus de réduction. Soit \mathcal{M}' un arbre marqué quelconque.

Théorème VI.4.3 (Réalisation formelle). *Si les arbres duaux de \mathcal{M} et \mathcal{M}' sont conjugués par une conjugaison compatible aux marquages alors il existe un feuilletage marqué \mathcal{F}' sur \mathcal{M}' et une déformation isoholonomique marquée entre \mathcal{F} et \mathcal{F}' .*

Nous insistons ici sur la nature particulière de ce résultat : s'il est *a priori* possible de contrôler la classe analytique des séparatrices convergentes du feuilletage construit \mathcal{F}' par des techniques similaires à celles déjà employées, il est en revanche impossible de prescrire la classe formelle des séparatrices formelles dans une même classe d'équisingularité. En effet, la présence de séparatrices formelles est un facteur de rigidité : deux feuilletages holomorphes qui présentent une séparatrice formelle commune sont égaux. De plus, le long d'une déformation isoholonomique, la séparatrice formelle d'un selle-nœud évolue non seulement dans la même classe formelle mais aussi dans la même classe analytique.

VI.5 Obstruction dicritique.

L'analyse des obstructions dicritiques conduit dans un premier temps à se focaliser sur la classe analytique du diviseur. Si le feuilletage présente une composante dicritique D de valence supérieure à quatre, le birapport des points singuliers du diviseur sur cette composante est un invariant analytique de déformation isoholonomique : une déformation infinitésimale tangente au feuilletage et donc transverse au diviseur ne saurait modifier le voisinage d'ordre 0 de D et donc ce birapport. L'exemple qui suit montre que des obstructions infinitésimales apparaissent aussi à des ordres plus grands dans les voisinages infinitésimaux.

VI.5.1 Contre-exemples dans le cas dicritique.

Considérons la 1-forme

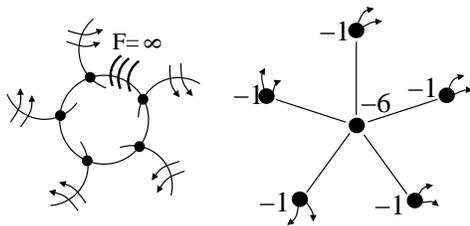
$$\omega = (x^5y + x^8 - y^6)dx + (y^5x - x^6)dy = x^7dH$$

$$H = \frac{y^6}{6x^6} - \frac{y}{x} + \frac{x^2}{2}.$$

Celle-ci a une singularité isolée en 0 de multiplicité 6 et admet pour arbre dual l'arbre de la figure (VI.1). La composante centrale est dicritique et de valence 5. Le feuilletage induit par ω est sans doute plus *lisible* après un éclatement puisque dans la bonne carte $\{y = tx, x = x\}$, celui-ci est associé à la 1-forme

$$(t^5 - 1)dt + xdx.$$

Le feuilletage est donc partout lisse sauf en chaque point $(t, 0)$, $t^5 = 1$ où il présente une singularité réduite pour laquelle le diviseur n'est pas invariant. Chacune de ces singularités

FIG. VI.1 – Arbre et arbre dual de ω .

est donc réduite relativement au diviseur après un éclatement. Le feuilletage \mathcal{F} admet ainsi 10 séparatrices isolées lisses, 2 sur chaque composante extrême de l'arbre. Comme ces composantes sont de multiplicité 1, ces courbes sont les transformées strictes de 10 courbes lisses à l'origine de \mathbb{C}^2 qui ont chacune une équation $h_i, i = 1, \dots, 10$ avec $\nu_0(h_i) = 1$. Comme la valence de la composante centrale est 5, la fonction

$$F(x, y) = \frac{h_1(x, y)h_2(x, y) \cdots h_{10}(x, y)}{(x - y)(x + y)(x + 2y)}$$

est une équation équilibrée des séparatrices. On retrouve d'ailleurs le résultat (VI.3.1) puisque $\nu_0(F) = 7 = \nu_0(\omega) + 1$. Les obstructions au théorème de réalisation à l'échelle infinitésimale sont incarnées par le premier groupe de cohomologie du faisceau $\mathcal{J}_{\geq 3}$. La suite exacte courte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{J}_{\geq 3} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{M}}/\mathcal{J}_{\geq 3} \rightarrow 0$$

induit une suite exacte longue en cohomologie qui s'écrit

$$\cdots H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{M}}) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{M}}/\mathcal{J}_{\geq 3}) \rightarrow H^1(\mathcal{J}_{\geq 3}) \rightarrow 0.$$

Le calcul de la cohomologie de ces faisceaux appelle l'usage d'un recouvrement du diviseur un peu plus fin qu'un recouvrement distingué : on considère le recouvrement contenant les ouverts distingués standards où l'ouvert $D_0 \setminus \{a_1, \dots, a_5\}$ est cependant raffiné par les ouverts

$$\tilde{D}_0 = D_0 \setminus (\{a_1, \dots, a_5\} \cup \{F = \infty\})$$

et la trace d'un voisinage de chaque composante de $\{F = \infty\}$ notée respectivement P_1, P_2 et P_3 . La section globale s du faisceau quotient $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}/\mathcal{J}_{\geq 3}$ définie dans les coordonnées (x, t) par

$$\begin{cases} s|_{P_1} = 0 \\ s|_{P_2} = 0 \\ s|_{P_3} = x \\ s = 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

n'est pas l'image d'une section globale de $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$. En effet, si tel était le cas, il existerait une fonction f holomorphe à l'origine de \mathbb{C}^2 telle que

$$f(x, x) = 0, \quad f(x, -x) = 0, \quad \text{et} \quad f(x, -\frac{1}{2}x) = x,$$

ce qui est manifestement impossible. Aussi, l'image de s dans le groupe $H^1(\mathcal{J}_{\geq 3})$ est non triviale. Une solution de l'équation $E^* \frac{\omega}{F}(X) = s$ dans le module $H^1(\mathcal{X}_N)$ s'écrit en coordonnées

$$\begin{cases} X = \frac{x}{t(t^5 - 1)} \frac{\partial}{\partial t} & \text{sur } P_3 \cap \tilde{D}_0, \\ X = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{VI.8})$$

Les calculs ci-dessus montrent que la déformation de l'espace induite par le 1-cocycle (VI.8) ne peut être le support d'une déformation isoholonomique du feuilletage \mathcal{F} .

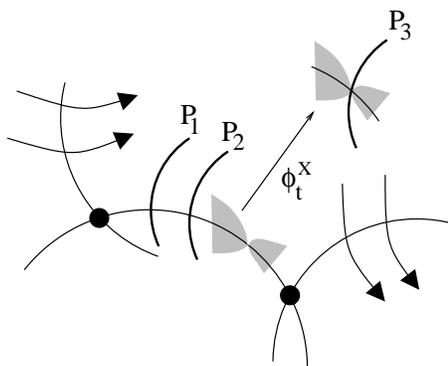


FIG. VI.2 – Déformation de l'arbre par le flot de X le long de l'ouvert $P_3 \cap \tilde{D}_0$.

Il faut remarquer que l'obstruction ne se situe pas au niveau du diviseur car sa classe analytique est invariante le long de cette déformation : en effet, le cocycle (VI.8) s'annule le long du diviseur et ainsi son flot coïncide avec l'identité le long de celui-ci. La transformation induite par ce flot n'est pas non plus un automorphisme *basique* du feuilletage, c'est-à-dire, qui envoie une feuille de \mathcal{F} sur une feuille de \mathcal{F} . En effet, un calcul simple montre que

$$L_X E^* \frac{\omega}{F} \wedge E^* \frac{\omega}{F} = t(t^5 - 1) dx \wedge dt \neq 0 \quad (\text{VI.9})$$

où $L_X(\cdot)$ désigne la dérivée de Lie induite par le champ X ; l'annulation de (VI.9) est une condition nécessaire et suffisante pour que le flot de X soit une transformation *basique* de \mathcal{F} .

VI.5.2 Les points de fugues

Bien que l'on observe des obstructions à l'échelle infinitésimale, il est possible de réaliser une construction qui s'apparente aux constructions précédentes dans le cas dicritique. Pour lever l'obstruction due à la suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \hat{\mathcal{X}}_{\hat{F}} \longrightarrow \hat{\mathcal{X}}_{\hat{N}} \xrightarrow{E^* \frac{\hat{\omega}}{\hat{F}}(\cdot)} \hat{\mathcal{J}}_{\geq 3} \longrightarrow 0,$$

considérons un sur-faisceau de $\hat{\mathcal{X}}_{\hat{N}}$: soit $\hat{\mathcal{X}}_{\hat{F}}$ le faisceau des germes de champs de vecteurs transversalement formels tangents au diviseur et aux zéros d'une équation équilibrée des séparatrices \hat{F} admettant un pôle logarithmique le long des pôles de \hat{F} . En dehors des pôles de la fonction

de \widehat{F} , les faisceaux $\widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{N}}$ et $\widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{F}}$ sont égaux. Aux pôles de \widehat{F} , la fibre du faisceau \mathcal{X} est l'espace des champs de vecteurs qui s'écrivent en coordonnées locales adaptées

$$a(x, y)x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{b(x, y)}{y} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Il n'est alors pas difficile de vérifier que la suite de faisceaux

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{F}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{F}} \xrightarrow{E^* \frac{\partial}{\widehat{F}}(\cdot)} \widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}} \longrightarrow 0$$

est exacte. L'inconvénient du nouveau faisceau considéré est qu'il ne permet pas en l'état de faire fonctionner l'algorithme (III.2.4) car au voisinage des pôles de \widehat{F} , les flots des sections de $\widehat{\mathcal{X}}$ ne sont pas définis. Pour autant, considérons l'exemple élémentaire suivant de section de $\widehat{\mathcal{X}}$ au voisinage d'une composante des pôles de \widehat{F}

$$X = \frac{x}{y} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Le flot de X au temps 1 s'écrit

$$\phi_X = (x, y) \mapsto \left(x, y \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{2x}{y^2}} \right).$$

Celui-ci est bien défini et est un automorphisme de la couronne $\left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid \left| \frac{2x}{y^2} \right| < 1 \right\}$ le long de $\{x = 0\}$. Le feuilletage $\widehat{\mathcal{F}}$ est localement donné sur cette couronne par la 1-forme dy . Or, un simple calcul montre que l'image de dy par ce flot s'écrit

$$\phi_X^* dy = \left(1 + \frac{2x}{y^2} \right)^{-\frac{1}{2}} (y dy + dx).$$

Le feuilletage induit par cette 1-forme sur la couronne se prolonge ainsi holomorphiquement à l'intérieur de la couronne en un feuilletage lisse transverse au diviseur $\{x = 0\}$ sauf en $(0, 0)$ où la feuille d'équation $\frac{y^2}{2} + x = 0$ est tangente au diviseur. Le germe de feuilletage obtenu est lisse dicritique mais non-réduit. Il se réduit après deux éclatements. Cette construction se généralise à tout champ de vecteurs à pôle logarithmique et devrait permettre d'énoncer les faits suivants : soit \mathcal{F} et \mathcal{F}' deux germes de feuilletages. Reprenant une terminologie introduite par F. Cano et N. Corral dans [6], on dit que \mathcal{F} domine \mathcal{F}' lorsque le morphisme total de réduction de \mathcal{F} se factorise au travers du morphisme de \mathcal{F}' : il existe un diagramme commutatif vérifiant

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M}_{\mathcal{F}} & \xrightarrow{E} & \mathcal{M}_{\mathcal{F}'} & \xrightarrow{E_{\mathcal{F}'}} & (\mathbb{C}^2, 0) \\ \cup & & \cup & & \cup \\ \Sigma_{\mathcal{F}} & \rightarrow & \Sigma_{\mathcal{F}'} & \rightarrow & 0 \\ \cup & & \cup & & \cup \\ \emptyset & \rightarrow & S & \rightarrow & 0 \end{array} .$$

L'ensemble S est appelé *l'ensemble des points de fuite*. Au vue du calcul effectué ci-dessus, on démontre le résultat suivant :

Théorème VI.5.1. *Soit \mathcal{F} un feuilletage de deuxième espèce sur un arbre \mathcal{M} et F une équation équilibrée de ses séparatrices. Soit \mathcal{M}' un arbre topologiquement conjugué à \mathcal{M} . Il existe un feuilletage \mathcal{F} sur \mathcal{M}' et un feuilletage \mathcal{F}_d tels que :*

1. *le feuilletage \mathcal{F}_d domine \mathcal{F}' et l'ensemble S des points de fugue est en bijection compatible aux marquages avec la trace des pôles de F sur le diviseur exceptionnel de \mathcal{M} .*
2. *$\mathcal{F}|_{(\mathcal{M}, \mathcal{D} \setminus \{F=\infty\})}$ et $\mathcal{F}'|_{(\mathcal{M}', \mathcal{D}' \setminus S)}$ sont reliés par une déformation isoholonomique.*

En particulier, les feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{F}' ont mêmes composantes irréductibles non-dicritiques et les représentations d'holonomie au-dessus de chaque composante non-dicritique sont analytiquement conjuguées. Ce résultat pourrait fournir une nouvelle preuve du résultat de F. Cano et N. Corral sur l'existence d'un modèle logarithmique pour les feuilletages dicritiques [10][6] si l'on disposait d'une caractérisation *transverse* de l'existence d'une intégrale première multiforme pour les feuilletages dicritiques : en effet, soit \mathcal{M} un arbre feuilleté par un feuilletage \mathcal{F} de deuxième espèce. En utilisant le résultat d'A.L. Neto, on construit un feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ transversalement linéaire sur un arbre $\tilde{\mathcal{M}}$ topologiquement conjugué à \mathcal{M} tel que les indices des singularités et les composantes dicritiques de \mathcal{F} et $\tilde{\mathcal{F}}$ soient les mêmes. En appliquant le résultat ci-dessus, on construit un feuilletage \mathcal{F}' dominant \mathcal{F} transversalement linéaire tel que les indices des singularités et les composantes dicritiques de \mathcal{F} et \mathcal{F}' soient les mêmes. Comme \mathcal{F}' est transversalement linéaire, il constitue un *modèle logarithmique dominant* \mathcal{F} au sens de F. Cano et N. Corral.

Bibliographie

- [1] M. Berthier, D. Cerveau, and R. Meziani. Transformations isotropes des germes de feuilletages holomorphes. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 78(7) :701–722, 1999.
- [2] C. Camacho, A. Lins Neto, and P. Sad. Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields. *J. Differential Geom.*, 20(1) :143–174, 1984.
- [3] C. Camacho and H. Movasati. *Neighborhoods of analytic varieties*, volume 35 of *Monografías del Instituto de Matemática y Ciencias Afines*. Instituto de Matemática y Ciencias Afines, IMCA, Lima, 2003.
- [4] C. Camacho and P. Sad. Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields. *Ann. of Math. (2)*, 115(3) :579–595, 1982.
- [5] M. Canalis-Durand, J. P. Ramis, R. Schäfke, and Y. Sibuya. Gevrey solutions of singularly perturbed differential equations. *J. Reine Angew. Math.*, 518 :95–129, 2000.
- [6] F. Cano and N. Corral. Logarithmic model for dicritic foliation. *Preprint.*, 2005.
- [7] D. Cerveau and R. Moussu. Groupes d’automorphismes de $(\mathbf{C}, 0)$ et équations différentielles $dy + \dots = 0$. *Bull. Soc. Math. France*, 116(4) :459–488 (1989), 1988.
- [8] D. Cerveau and P. Sad. Problèmes de modules pour les formes différentielles singulières dans le plan complexe. *Comment. Math. Helv.*, 61(2) :222–253, 1986.
- [9] B. Chabat. *Introduction à l’analyse complexe. Tome 1*. “Mir”, Moscow, 1990.
- [10] N. Corral. Sur la topologie des courbes polaires de certains feuilletages singuliers. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 53(3) :787–814, 2003.
- [11] R. Godement. Théorie des faisceaux. *Hermann, Paris*, 1973.
- [12] H. Grauert. Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (5) :64, 1960.
- [13] H. Grauert and R. Remmert. *Coherent analytic sheaves*, volume 265 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [14] C. Hertling. Formules pour la multiplicité et le nombre de Milnor d’un feuilletage sur $(\mathbf{C}^2, 0)$. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 9(4) :655–670, 2000.
- [15] C. Hertling. *Frobenius manifolds and moduli spaces for singularities*, volume 151 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [16] F. Kirwan. *Complex algebraic curves*, volume 23 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

- [17] K. Kodaira. *Complex manifolds and deformation of complex structures*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, english edition, 2005. Translated from the 1981 Japanese original by Kazuo Akao.
- [18] S. Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.
- [19] A. Lins Neto. Construction of singular holomorphic vector fields and foliations in dimension two. *J. Differential Geom.*, 26(1) :1–31, 1987.
- [20] F. Loray. Towards the Galois groupoid of nonlinear O.D.E. In *Differential equations and the Stokes phenomenon*, pages 203–275. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2002.
- [21] F. Loray. A preparation theorem for codimension-one foliations. *Ann. of Math. (2)*, 163(2) :709–722, 2006.
- [22] F. Loray. *Pseudo-groupe d'une singularité de feuilletage holomorphe en dimension deux*. Preprint edition, 2006.
- [23] D. Marín. Moduli spaces of germs of holomorphic foliations in the plane. *Comment. Math. Helv.*, 78(3) :518–539, 2003.
- [24] J. Martinet and J.-P. Ramis. Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (55) :63–164, 1982.
- [25] J. Martinet and J.-P. Ramis. Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 16(4) :571–621 (1984), 1983.
- [26] J. N. Mather and S. S. T. Yau. Classification of isolated hypersurface singularities by their moduli algebras. *Invent. Math.*, 69(2) :243–251, 1982.
- [27] J.-F. Mattei. Modules de feuilletages holomorphes singuliers. I. Équisingularité. *Invent. Math.*, 103(2) :297–325, 1991.
- [28] J.-F. Mattei. Quasi-homogénéité et équiréductibilité de feuilletages holomorphes en dimension deux. *Astérisque*, (261) :xix, 253–276, 2000. Géométrie complexe et systèmes dynamiques (Orsay, 1995).
- [29] J.-F. Mattei and R. Moussu. Holonomie et intégrales premières. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 13(4) :469–523, 1980.
- [30] J.-F. Mattei and E. Salem. Complete systems of topological and analytical invariants for a generic foliation of $(\mathbf{C}^2, 0)$. *Math. Res. Lett.*, 4(1) :131–141, 1997.
- [31] J.-F. Mattei and E. Salem. Modules formels locaux de feuilletages holomorphes. *PrePrint.*, 2004.
- [32] R. Moussu. Holonomie évanescence des équations différentielles dégénérées transverses. In *Singularities and dynamical systems (Iraklion, 1983)*, volume 103 of *North-Holland Math. Stud.*, pages 161–173. North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [33] E. Paul. Feuilletages holomorphes singuliers à holonomie résoluble. *J. Reine Angew. Math.*, 514 :9–70, 1999.
- [34] E. Paul. Formal normal forms for the perturbations of a quasi-homogeneous Hamiltonian vector field. *J. Dynam. Control Systems*, 10(4) :545–575, 2004.

- [35] R. Pérez Marco and J.-C. Yoccoz. Germes de feuilletages holomorphes à holonomie prescrite. *Astérisque*, (222) :7, 345–371, 1994. Complex analytic methods in dynamical systems (Rio de Janeiro, 1992).
- [36] M. Postnikov. *Leçons de géométries des groupes et algèbres de Lie*. Mir, 1985.
- [37] M. Seguy. *Cobordismes et reliabilité équisinbulière de singularités marquées de feuilletages holomorphes en dimension deux*. PhD thesis, Toulouse, 2003.
- [38] A. Seidenberg. Reduction of singularities of the differential equation $A dy = B dx$. *Amer. J. Math.*, 90 :248–269, 1968.
- [39] Y.T. Siu. Every Stein subvariety admits a Stein neighborhood. *Invent. Math.*, 38(1) :89–100, 1976/77.
- [40] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry*. Publish or Perish Inc., Boston, Mass., 1975.
- [41] E. Stróżyńska and H. Żoładek. The analytic and formal normal form for the nilpotent singularity. *J. Differential Equations*, 179(2) :479–537, 2002.
- [42] J. M. Wahl. Equisingular deformations of plane algebroid curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 193 :143–170, 1974.
- [43] J.-C. Yoccoz. Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques. *Astérisque*, (231) :3–88, 1995. Petits diviseurs en dimension 1.
- [44] O. Zariski. On the Topology of Algebroid Singularities. *Amer. J. Math.*, 54(3) :453–465, 1932.
- [45] O. Zariski. Studies in equisingularity. I. Equivalent singularities of plane algebroid curves. *Amer. J. Math.*, 87 :507–536, 1965.
- [46] O. Zariski. *Le problème des modules pour les branches planes*. Hermann, Paris, second edition, 1986. Course given at the Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, Paris, October–November 1973, With an appendix by Bernard Teissier.