Un problème de Riemann-Hilbert local non-linéaire pour les germes de feuilletages holomorphes singuliers en dimension deux.

Yohann Genzmer [a],

[a] *Laboratoire Emile Picard, Université Paul Sabatier 118 route de Narbonne 31062 Toulouse Cedex*

Reçu le ***** ; accepté après révision le +++++

Présenté par

Résumé

Nous montrons un théorème de type Riemann-Hilbert local non-linéaire pour les germes de feuilletage holomorphe singulier dans $\mathbb{C}^2$. Ce résultat a pour conséquence que l'espace de cobordisme d'un feuilletage de deuxième espèce non-dicritique s'envoie surjectivement sur la classe d'équisingularité de ses séparatrices.

Abstract

On a local non linear Riemann-Hilbert problem for germs of singular foliation in $\mathbb{C}^2$. We prove a result of Riemann-Hilbert kind for germs of foliation in $\mathbb{C}^2$. This result has the following consequence: the cobordism class of a second kind foliation in $\mathbb{C}^2$ is onto the equisingularity class of its separatrix.

1. Introduction

À coordonnées et unités multiplicatives près, un *germe de feuilletage $\mathcal{F}$ holomorphe singulier à singularité isolée* dans $\mathbb{C}^2$ correspond à la donnée d'un germe de 1-forme holomorphe singulière en $0 \in \mathbb{C}^2$

$$\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy, \quad \text{avec } a \wedge b = 1, \quad a, b \in \mathbb{C}\{x,y\}.$$

Un résultat de C. Camacho et de P. Sad [1] assure que $\mathcal{F}$ admet toujours une *séparatrice*, c'est-à-dire un germe de courbe invariante irréductible analytique en 0. Lorsque $\mathcal{F}$ a un nombre infini de séparatrices, on dit qu'il est $\mathcal{F}$ *dicritique*. Si $\mathcal{F}$ est non-dicritique, on note $\mathrm{Sep}(\mathcal{F})$ le germe de courbe défini par l'union des séparatrices de $\mathcal{F}$.

Email address: `genzmer@math.ups-tlse.fr` (Yohann Genzmer).

Le feuilletage $\mathcal{F}$ est dit *réduit* s'il existe des coordonnées (u, v) telles que $\omega = udv + \lambda vdu + \ldots,\ \lambda \notin \mathbb{Q}_{<0}$. Si $\mathcal{F}$ n'est pas réduit, on lui associe un *morphisme de réduction*

$$E : (\mathcal{M}, \mathcal{D}) \to (\mathbb{C}^2, 0)$$

tel que le feuilletage à singularité isolée $E^*\mathcal{F}$ défini par $E^*\omega$ ne présente que des singularités réduites le long du diviseur exceptionnel $\mathcal{D}$.
Lorsque le feuilletage $E^*\mathcal{F}$ n'a aucune singularité de type selle-noeud, i-e. $\lambda = 0$, dont la variété faible coïncide avec le germe déterminé par $\mathcal{D}$, $\mathcal{F}$ est dit de *deuxième espèce*.

Soit $S = \mathrm{Sep}(\mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ est un feuilletage non-dicritique et de deuxième espèce et S' un germe de courbe topologiquement équivalent à S.
Théorème 1.1 *Il existe un feuilletage $\mathcal{F}'$ topologiquement équivalent à $\mathcal{F}$ tel que $S' = \mathrm{Sep}(\mathcal{F}')$.*
Ce théorème est la conséquence d'un résultat plus précis dont l'énoncé appelle l'introduction d'autres notions.
L'*arbre dual* de réduction $\mathbb{A}^*(\mathcal{M}, \mathcal{D}, S)$ est un graphe fléché pondéré dont l'ensemble des sommets est en bijection avec $\mathrm{Comp}(\mathcal{D})$, l'ensemble des composantes irréductibles de $\mathcal{D}$. Deux sommets sont reliés si et seulement si les composantes associées se rencontrent. Chaque sommet est pondéré par auto-intersection de la composante et on lui adjoint une flèche pour chaque transformée stricte de séparatrice qu'il rencontre.

Soit K un compact de $\mathbb{C}^p$ contenant 0. Un *déploiement de $\mathcal{F}$ de base K* est la donnée d'un germe de feuilletage $\mathcal{F}_K$ de codimension 1 dans $(\mathbb{C}^{2+p}, \{0\} \times K)$ de lieu singulier $\{0\} \times K$ tel que les feuilles de $\mathcal{F}_K$ soient transverses aux fibres de la projection

$$\Pi : (\mathbb{C}^{2+p}, \{0\} \times K) \to (\mathbb{C}^p, K), \quad \Pi(x, t) = t,$$

et tel que $i^*\mathcal{F}_P = \mathcal{F}$, $i : (\mathbb{C}^2, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^{2+p}, \{0\} \times K)$ désignant le plongement $i(x) = (x, 0)$. Le déploiement est dit équisingulier lorsqu'il admet une réduction des singularités *en famille* dans un sens natural précisé dans [3]. Un déploiement équisingulier est, en particulier, une déformation topologiquement triviale à pseudo-groupe d'holonomie constant [3].
Soit $\mathcal{F}$ un germe en $0 \in \mathbb{C}^2$ de feuilletage singulier de deuxième espèce. Soit $E' : (\mathcal{M}', \mathcal{D}') \to (\mathbb{C}^2, 0)$ un processus d'éclatements et S' un germe de courbe à l'orgine de $\mathbb{C}^2$ réduit par E' tels que

$$\mathbb{A}^*(\mathcal{M}', \mathcal{D}', S') = \mathbb{A}^*(\mathcal{M}, \mathcal{D}, S).$$

Théorème 1.2 *Il existe un germe de feuilletage $\mathcal{F}'$ en $0 \in \mathbb{C}^2$ relié à $\mathcal{F}$ par un déploiement équisingulier tel que E' soit exactement le processus de réduction de $\mathcal{F}'$ et $\mathbb{A}^*(\mathcal{M}', \mathcal{D}', S')$ son arbre dual.*
Ce résultat permet ainsi de réaliser un feuilletage à réduction et pseudo-groupe d'holonomie prescrits.

L'idée directrice de la preuve est l'interprétation cohomologique des déploiements équisinguliers : de façon générale, considérons une variété M feuilleté par un feuilletage $\mathcal{F}$ au voisinage d'un diviseur $\mathcal{D}$. Définissons trois faisceaux en groupes au-dessus de $\mathcal{D}$: $\mathrm{Aut}(M)$ le faisceau des germes au point de $\mathcal{D}$ d'automorphisme de M qui sont l'identité en restriction à $\mathcal{D}$; $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ le sous-faisceau des germes d'automorphisme préservant le feuilletage ; $\mathrm{Fix}(\mathcal{F})$ le sous-faisceau des germes d'automorphisme préservant chaque feuille locale. Tout 1-cocycle $(\phi_{ss'})$ appartenant à $Z^1(\{\mathcal{U}_s\}_s, \mathrm{Aut}(M))$ définit une variété « modelée » sur M obetnue en recollant par $\phi_{ss'}$ des voisinages de $\mathcal{U}_s$ dans M :

$$M' = \coprod (\mathcal{M}, \mathcal{U}_s) \big/_{x \sim \phi_{ss'} x} . \qquad (1)$$

Si le cocycle est cohomologue à un cocycle de $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$, alors il existe sur M' un feuilletage localement isomorphe à $\mathcal{F}$. De surcroît, s'il est cohomologue à un cocycle de $\mathrm{Fix}(\mathcal{F})$ alors ce feuilletage et $\mathcal{F}$ sont reliés par un déploiement équisingulier.

2. Esquisse de la preuve du théorème 1.2.

La preuve se trouve dans [2]. Nous en donnons ici un schéma simplifié : on établit d'abord le résultat sur le premier voisinage infinitésimal du diviseur ; puis, un cocycle de collage étant *préparé*, on effectue une double induction sur la longueur des processus de réduction et sur l'ordre du voisinage dans la filtration de $\mathcal{M}$ par les voisinages infinitésimaux de $\mathcal{D}$. On y développe un algorithme de normalisation fondé sur deux éléments : l'équation cohomologique associée au résultat infinitésimal (2.1) et la formule de Campbell-Hausdorff. Cet algorithme termine grâce à un théorème de stabilité des voisinages de diviseurs exceptionnels.

2.1. *Résultat à l'échelle infinitésimale.*

Soit $\widehat{\mathcal{X}}$ et $\widehat{\mathcal{T}}$ les faisceaux de base $\mathcal{D}$ des germes de champ de vecteurs formels tangents respectivement au diviseur $\mathcal{D}$ et au feuilletage $\mathcal{F}$. Désignons par $\mathfrak{M}$ le faisceau de base $\mathcal{D}$ engendré par les germes formels de fonction globale au voisinage de $\mathcal{D}$ nulle le long de celui-ci. L'hypothèse de deuxième espèce portant sur le feuilletage $\mathcal{F}$ se traduit ici de la façon suivante :
Lemme 2.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application naturelle*

$$H^1(\mathcal{D}, \mathfrak{M}^n \widehat{\mathcal{T}}) \to H^1(\mathcal{D}, \mathfrak{M}^n \widehat{\mathcal{X}})$$

est surjective.
Ce lemme constitue l'analogue de (1.2) à l'échelle infinitésimale.

2.2. *Préparation d'un cocycle.*

Soit $E' : (\mathcal{M}', \mathcal{D}') \to (\mathbb{C}^2, 0)$ un processus d'éclatements de même arbre dual que $\mathcal{F}$. Un résultat de [5] montre qu'il existe un processus d'éclatement $\tilde{E}$ tel que $\tilde{\mathcal{M}}$ soit feuilleté par un feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ relié à $\mathcal{F}$ par un déploiement équisingulier, les diviseurs $\mathcal{D}' \subset \mathcal{M}'$ et $\tilde{\mathcal{D}} \subset \tilde{\mathcal{M}}$ étant biholomorphes. Dès lors, il existe un recouvrement $(V_D)_{D \in \mathrm{Comp}(\tilde{\mathcal{D}})}$ de $\tilde{\mathcal{D}}$ et une famille $(\phi_D)_{D \in \mathrm{Comp}(\tilde{\mathcal{D}})}$ tels que V_D soit un voisinage tubulaire de D et ϕ_D un biholomorphisme de V_D dans un voisinage tubulaire d'une composante de $\mathcal{D}'$ qui conjugue $\tilde{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{D}'$. La variété obtenue par recollement selon le cocycle $(\phi_{DD'}) = \left(\phi_D^{-1} \phi_{D'}\right)$

$$\coprod \left(\tilde{\mathcal{M}}, V_D\right) /_{x \sim \phi_{DD'}(x)}$$

est visiblement biholomorphe à $\mathcal{M}'$. On montre alors le lemme de préparation suivant :
Lemme 2.2 *Quitte à raffiner le recouvrement (V_D), chaque composante du cocycle de collage est le flot d'un champ s'écrivant $fX + Y$ où X est un champ tangent à $\tilde{\mathcal{D}}$, f une fonction nulle sur $\tilde{\mathcal{D}}$ et Y un champ tangent à $\tilde{\mathcal{D}}$ à l'ordre deux.*
Un tel cocycle sera dit *préparé*.

2.3. *Les inductions.*

À partir du cocycle préparé, noté (ϕ_{ij}), on effectue une induction sur la longueur du processus de réduction $\mathcal{F}$ et sur l'ordre de tangence au diviseur de ce cocycle. Suivant l'idée directrice, le but est de mettre en évidence un cocycle cohomologue à (ϕ_{ij}) à valeurs dans $\mathrm{Fix}(\tilde{\mathcal{F}})$. L'induction traite séparément la partie $(\phi_{ij})^0$ du cocyle à support dans $\mathcal{D}^0$ et la partie $(\phi_{ij})^1$ du cocycle à support dans les composantes connexes de $\tilde{\mathcal{D}} \backslash \mathcal{D}^0$, $\mathcal{D}^0$ désignant la composante de $\tilde{\mathcal{D}}$ créée par le premier éclatement. L'hypothèse de récurrence normalise directement le cocycle $(\phi_{ij})^1$ puisque son support est une famille de processus d'éclatement de longueur strictement inférieure à celle de E'. Le cocycle $(\phi_{ij})^0$ est normalisé par un algorithme de type Newton que nous allons décrire succintement :

(i) si chaque composante ϕ_{ij} est le flot d'un champ s'écrivant $T_{ij}^0 + X_{ij}^n$ où T_{ij}^0 est tangent au feuilletage et X_{ij}^n est tangent au diviseur à l'ordre n, le lemme 2.1 permet d'écrire l'équation cohomologique infinitésimale :

$$X_{ij}^n = T_{ij}^1 + X_i^n - X_j^n \tag{2}$$

où (T_{ij}) est un 1-cocycle de $\mathfrak{M}^n\widehat{\mathcal{T}}$ et (X_i) est un 0-cocycle de $\mathfrak{M}^n\widehat{\mathcal{X}}$.

(ii) A partir de la relation (2) et à l'aide de la formule de Campbell-Hausdorff, on montre que l'application $e^{-X_i^n}\phi_{ij}\,e^{X_j^n}$ est le flot d'un champ s'écrivant $T_{ij}^0 + T_{ij}^1 + X_{ij}^{n+1}$ où X_{ij}^{n+1} est tangent au diviseur à l'ordre $n+1$

Cet algorithme est initié par le lemme de préparation et aboutit en prouvant un résultat de stabilité des voisinages de diviseurs exceptionnels stipulant que deux 1-cocycles suffisament tangents sont cohomologues. Finalement, on a montré l'existence d'un isomorphisme

$$\mathcal{M}' \simeq \coprod(\tilde{\mathcal{M}}, U_i) \Big/_{x\sim e^{T_{ij}}(x)},$$

où (T_{ij}) est à valeurs dans $\widehat{\mathcal{T}}$. Ainsi, $\mathcal{M}'$ admet un feuilletage relié à $\tilde{\mathcal{F}}$ et donc à $\mathcal{F}$ par un déploiement équisingulier.

3. Classe de cobordisme d'un feuilletage.

Considérons $\mathrm{Cob}\,(\mathcal{F})$ l'ensemble des feuilletages holomorphes reliés à $\mathcal{F}$ par un déploiement équisingulier holomorphe et $\widehat{\mathrm{Cob}}\,(\mathcal{F})$ l'ensemble des feuilletages formels reliés à $\mathcal{F}$ par un déploiement équisingulier formel. Soit $S = \mathrm{Sep}(\mathcal{F})$ et $\widehat{S}$ l'union des séparatrices formelles de $\mathcal{F}$. Notons $\mathcal{E}(S)$ désigne la classe d'équisingularité de S, c'est-à-dire l'ensemble des courbes topologiquement conjuguées à S et $\widehat{\mathcal{E}}(\widehat{S})$ la classe d'équisingularité formelle de $\widehat{S}$. Le théorème 1.2 a pour conséquence le résultat suivant :

Théorème 3.1 *Si $\mathcal{F}$ est de deuxième espèce non-dicritique, alors les applications*

$$\mathrm{Cob}\,(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{E}(S) \quad \text{et} \quad \widehat{\mathrm{Cob}}\,(\mathcal{F}) \longrightarrow \widehat{\mathcal{E}}(\widehat{S})$$

définies par $\mathcal{H} \mapsto \mathrm{Sep}(\mathcal{H})$ sont des surjections à fibres connexes.

Ce théorème admet comme corollaire trivial le théorème (1.1).

Références

[1] C. Camacho, P. Sad, Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields. Ann. of Math (2), 115(3), 1982.

[2] Y. Genzmer, Construction of foliations with prescribed separatrix, *preprint* 2006.

[3] J.F. Mattei, Modules de feuilletages holomorphes singuliers. I. Équisingularité. Invent. Math. 103(2), 1991.

[4] J.F. Mattei et R. Moussu, Holonomie et intégrales premières. Ann SCi. École Norm. Sup, (4), 13(4) : 469-523, 1980.

[5] M. Seguy, Cobordismes et reliabilités équisingulières de singularités marquées de feuilletages holomorphes en dimension deux. Thèse, Toulouse, 2003.