DM1: LE THÉORÈME DE STRUCTURE DE $\mathbb{N}$.

Le but de ce problème est de montrer le théorème suivant

Theorem 1. *Si $(\mathcal{N}_1, \prec_1)$ et $(\mathcal{N}_2, \prec_2)$ sont deux ensembles naturels alors il existe une bijection croissante entre les deux ensembles, c'est-à-dire, une application bijective $f : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ telle que*

$$\forall x, y \in \mathcal{N}_1,\ x \prec_1 y \implies f(x) \prec_2 f(y).$$

Un ensemble naturel que vous connaissez bien, le *baby ensemble* naturel, c'est $\mathbb{N}$ avec son ordre $\leq$. Cet ensemble sert à compter, en gros. Le théorème ci-dessus dit que si vous prenez un autre ensemble naturel pour compter alors ça ne sert à rien, car il a exactement la même structure que tous les autres ensembles naturels. Pour le problème ci-dessous, il faudra faire appel à tous les axiomes de Peano.

1. La fonction $sc_{\mathcal{N}}$ et la fonction $prec_{\mathcal{N}}$.

Soit un ensemble naturel $(\mathcal{N}, \prec)$

(1) Montrer que $\mathcal{N}$ admet un plus petit élément. On le notera $0_{\mathcal{N}}$.

(2) Soit $x \in \mathcal{N}$. Montrer que l'ensemble $\{y \in \mathcal{N} | x \prec y \text{ et } x \neq y\}$ est non vide. En déduire qu'il admet un plus petit élément. On appelle cet élément le *successeur* de x et on le note

$$sc_{\mathcal{N}}(x) = \min \{y \in \mathcal{N} | x \prec y \text{ et } x \neq y\}.$$

(3) Montrer que pour tout x

$$x \prec sc_{\mathcal{N}}(x) \text{ et } x \neq sc_{\mathcal{N}}(x)$$

En déduire que la fonction successeur est strictement croissante, c'est-à-dire, si $x \prec_{\mathcal{N}_1} y$ et $x \neq y$ alors $sc_{\mathcal{N}_1}(x) \prec_1 sc_{\mathcal{N}_1}(y)$ et $sc_{\mathcal{N}_1}(x) \neq sc_{\mathcal{N}_1}(y)$.

(4) Pour tout $x \neq 0_{\mathcal{N}}$, on pose

$$prec_{\mathcal{N}}(x) = \max \{y \in \mathcal{N} | y \prec x \text{ et } y \neq x\}.$$

Montrer que cette fonction est bien définie. On l'appelle la fonction *précédent*.

(5) Montrer que

$$sc_N \circ prec_{\mathcal{N}}(x) = x.$$

2. La bijection f.

Soit f définie par récurrence par

$$f(0_{\mathcal{N}_1}) = 0_{\mathcal{N}_2}$$

et pour tout $x \in \mathcal{N}_1$, si f est définie en x, on la définit en $sc_{\mathcal{N}_1}(x)$ par

$$f(sc_{\mathcal{N}_1}(x)) = sc_{\mathcal{N}_2}(f(x)).$$

(1) On va montrer par l'absurde que f est surjective. Supposons donc que cela n'est pas vrai.
   (a) Soit $A = \{y \in \mathcal{N}_2 |$ il n'existe pas $x \in \mathcal{N}_1$ tel que $f(x) = y\}$. Expliquer pourquoi l'hypothèse ci-dessus montre que $A \neq \emptyset$.
   (b) Soit c le plus petit élément de A. Montrer que $c \neq 0_{\mathcal{N}_1}$.
   (c) En considérant le précédent de c, la question 1.5 et la définition de f, montrer que l'on aboutit à une contradiction.

(2) On va montrer que f est strictement croissante, c'est-à-dire, si $x \prec_1 y$ et $x \neq y$ alors $f(x) \prec_2 f(y)$ et $f(x) \neq f(y)$.
   (a) On va montrer par l'absurde que si $0_{\mathcal{N}_1} \prec_1 y$ et $0 \neq y$ alors $0_{\mathcal{N}_2} \prec_2 f(y)$ et $0_{\mathcal{N}_2} \neq f(y)$.
      (i) supposons que $f(y) \prec_{\mathcal{N}_2} 0_{\mathcal{N}_2}$. Montrer alors que $f(y) = 0_{\mathcal{N}_2}$.

(ii) En considérant $c = prec_{\mathcal{N}_1}(y)$ et la définition de f, montrer que l'on aboutit à une contradiction.

(b) Soit $P(x)$ la propriété " pour tout y si $x \prec_1 y$ et $x \neq y$ alors $f(x) \prec_2 f(y)$ et $f(x) \neq f(y)$". On vient de montrer $P(0_{\mathcal{N}_1})$. Montrer que si $P(x)$ est vraie alors $P(sc_{\mathcal{N}_1}(x))$ est vraie également. *(question plus difficile).* En déduire que f est strictement croissante.

(c) Déduire de la stricte croissance de f son injectivité.