Suites de Cauchy et construction des nombres réels

1 Les rationnels, un ensemble très incomplet.

1.1 Incomplétude algébrique.

Exercice 1. Les babyloniens (environ 1700 avant J.C) savaient construire géométriquement et approcher un nombre x tel que $x^2 = 2$. En effet, une tablette babylonienne montre un carré de côté 1 dont les diagonales sont donc de longueur $\sqrt{2}$. La tablette approche $\sqrt{2}$ à 410^{-7}. Euclide d'Alexandrie sait démontrer vers 300 avant J.C que le nombre x n'est pas rationnel. Et vous? [1].

1.2 Incomplétude topologique

Définition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels est dite de Cauchy si pour tout $\boldsymbol{\epsilon \in \mathbb{Q}}$ strictement positif[2], il existe un entier N tel que pour n, m supérieurs à N, on a $|u_n - u_m| < \epsilon$.

En d'autres termes, lorsque que l'on s'approche de l'infini, tous les termes de la suite sont proches les uns des autres. Dans un monde idéal, cela devrait signifier que la suite converge. Nous allons voir que pour l'ensemble $\mathbb{Q}$, ce n'est pas le cas, et allons construire, dans l'exercice suivant, une suite de Cauchy de rationnels **qui ne converge pas**.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **décroissante minorée** de rationnels. Nous allons montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. On raisonne par l'absurde et on suppose donc que

Il existe $\boldsymbol{\epsilon}$ **dans** $\boldsymbol{\mathbb{Q}^{+,*}}$ tel que pour tout N dans $\mathbb{N}$, il existe m, n dans N tels que $|u_m - u_n| > \epsilon$.

1. Construire une extraction ϕ telle que $u_{\phi(N)} - u_{\phi(N+1)} > \epsilon$ pour tout N dans $\mathbb{N}$
2. Montrer que la suite $(u_{\phi(0)} - u_{\phi(N)})_{N\in\mathbb{N}}$ est positive et majorée.
3. Montrer que $u_{\phi(0)} - u_{\phi(N)} > N\epsilon$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. (On utilisera $u_{\phi(0)} - u_{\phi(N)} = u_{\phi(0)} - u_{\phi(1)} + u_{\phi(1)} - u_{\phi(2)} + ... + u_{\phi(N-1)} - u_{\phi(N)}$). Conclure à une contradiction.
4. On considère la suite de rationnels définie par récurrence par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$.
   (a) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a $u_n > 0$ et $u_n^2 > 2$.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée.
   (c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. (Indication: si elle convergeait vers une limite $l \in \mathbb{Q}$ que devrait vérifier l ? Conclure en utilisant l'exercice 1.)

2 Construction des réels

Afin d'asseoir l'analyse sur des fondements rigoureux, les mathématiciens de la fin du 19-ième siècle ressentent la nécessité de présenter une construction mathématique des nombres réels à partir des nombres rationnels. La construction que nous allons étudier ici est due à Méray (1869), Cantor et Heine (1872). Elle repose sur la notion de suites de Cauchy développées par le mathématicien du même nom vers 1821. L'idée est de *rajouter* à l'ensemble des rationnels toutes les limites de ses suites de Cauchy. Une construction alternative basée sur la relation d'ordre dans $\mathbb{Q}$ et les ensembles que cette relation découpe, *les coupures*, est due à Dedekind (1872) mais ne sera pas abordée ici.

[1] On raisonnera par l'absurde en supposant qu'il existe $a, b \in \mathbb{Z}^*$ premiers entre eux tels que $(\frac{a}{b})^2 = 2$.
[2] Nous voulons construire les réels. On ne peut donc pour l'instant considérer que des *epsilon* rationnels!

2.1 Le corps des réels

Exercice 3. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy à valeurs rationnelles.

1. Montrer que si u, v sont dans $\mathcal{C}$ alors la suite somme $u + v$ est également dans $\mathcal{C}$.
2. Montrer que si u, v sont dans $\mathcal{C}$ alors la suite produit $u \times v$ est dans $\mathcal{C}$. (On utilisera le fait qu'une suite de Cauchy est bornée).
3. On définit une relation $\mathfrak{R}$ sur $\mathcal{C}$ de la façon suivante: soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $\mathcal{C}$, on dit que $u\,\mathfrak{R}\,v$ si et seulement si la limite de la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et est nulle. En somme, $u\,\mathfrak{R}\,v$ si et seulement si

   $$\text{Pour tout } \boldsymbol{\epsilon} \textbf{ dans } \mathbb{Q}^{+,*} \text{ il existe } N \text{ dans } \mathbb{N}, \text{ tel que pour tout } n \geq N \text{ on a } |u_n - v_n| \leq \epsilon.$$

   Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}$
4. Soit $\mathcal{R}$ le quotient de $\mathcal{C}$ par $\mathfrak{R}$ et soit $\pi : \mathfrak{R} \to \mathcal{R}, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \overline{u}$ l'application quotient où $\overline{u}$ désigne la classe d'équivalence de la suite u. Soient a et b deux éléments de $\mathcal{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de Cauchy de rationnels représentant a et b, c'est-à-dire, telles que $a = \overline{u}$ et $b = \overline{v}$. La somme de a et b est définie comme $\overline{(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ et est notée $a + b$. Le produit de a et b est définie comme $\overline{(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ et notée $a \times b$. Montrer que la somme et le produit de a et b ne dépendent pas du choix de représentants de a et b.
5. Soit a un rationnel. On définit une application $\iota : \mathbb{Q} \to \mathcal{R}$ par $\iota(a) = \overline{(a)}$ où (a) est la suite constante de terme général a. Montrer que ι est injective.

Nous admettrons que la somme et le produit de $\mathfrak{R}$ étendent la somme et le produit de $\mathbb{Q}$ et ont donc les mêmes propriétés: associativité, commutativité, existence d'inverses pour la somme, c'est-à-dire, pour tout $a \in \mathcal{R}$, il existe b tel que $a + b = \overline{(0)}$ (prenons $b = \overline{(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ si $a = \overline{u}$ par exemple.), existence d'inverses pour les éléments a non nuls, c'est-à-dire, pour tout $a \in \mathcal{R}^*$, il existe b tel que $a \times b = \overline{(1)}$.

Exercice 4. Nous allons montrer qu'il existe $l \in \mathcal{R}$ tel que $l \times l = \overline{(2)}$.

1. On considère la suite u_n définie à l'exercice 2 question 4. On pose alors $v_n = u_n^2$. Montrer que pour tout n
   $$v_{n+1} - 2 = \frac{(v_n - 2)^2}{4v_n}.$$
2. En déduire que v_n tend vers 2.
3. On note l la classe de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{R}$. Montrer finalement que
   $$l \times l = \overline{(2)}$$

L'exerice construit ainsi dans $\mathcal{R}$ une racine carré de 2. Plus généralement, nous avons construit un ensemble $\mathcal{R}$ muni de deux opérations somme et produit qui possèdent de *bonnes propriétés algébriques.* On appellera $\mathcal{R}$ le corps des nombres réels.

2.2 $\mathcal{R}$ est un corps ordonné.

On souhaite désormais définir une relation d'ordre sur $\mathcal{R}$ compatible avec la relation d'ordre classique $\leq$ sur $\mathbb{Q}$. Soient x, y deux éléments de $\mathcal{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de Cauchy les représentant, c'est-à-dire, $\overline{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}} = x$ et $\overline{(v_n)_{n\in\mathbb{N}}} = y$. On définit une relation $\geq_{\mathcal{R}}$ sur $\mathcal{R}$ de la façon suivante. On dit que $x \geq_{\mathcal{R}} y$ si

- $x = y$

- ou s' il existe un rationnel $a \in \mathbb{Q}$ strictement positif et un entier N tels que pour tout $n \geq N$, on a $u_n - v_n \geq a$.

Exercice 5.

1. Montrer que la définition de $\geq_{\mathcal{R}}$ est indépendante du choix des représentants de x et y. (On montrera que si $u \,\mathfrak{R}\, u'$ et $v \,\mathfrak{R}\, v'$ et s'il existe un rationnel $a \in \mathbb{Q}$ strictement positif et un entier N tels que pour tout $n \geq N$ on a $u_n - v_n \geq a$ alors il existe un rationnel $a' \in \mathbb{Q}$ strictement positif et un entier N' tels que pour tout $n \geq N'$, on a $u'_n - v'_n \geq a'$.)
2. Montrer que ι est croissante, c'est-à-dire, pour tous $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que $a \geq b$ on a $\overline{(a)} \geq_{\mathcal{R}} \overline{(b)}$.

   On admet que la relation d'ordre $\geq_{\mathcal{R}}$ vérifie les propriétés suivantes:

   - Si $a \geq_{\mathcal{R}} b$ et $a' \geq_{\mathcal{R}} b'$ alors $a + a' \geq_{\mathcal{R}} b + b'$.
   - Si $c \geq_{\mathcal{R}} 0$ et $a \geq_{\mathcal{R}} b$ alors $ac \geq_{\mathcal{R}} bc$.
3. Montrer que $\mathcal{R}$ muni de $\geq_{\mathcal{R}}$ est *archimédien*, c'est-à-dire,
$$\text{Pour tout } a \geq_{\mathcal{R}} 0, \text{ il existe } n \text{ dans } \mathbb{N} \text{ tel que } \overline{(n)} >_{\mathcal{R}} a.$$
4. Soit $x \in \mathcal{R}$ positif.
   (a) Montrer que l'ensemble $A = \{b \in \mathbb{N} | x <_{\mathcal{R}} \overline{(b+1)}\}$ est non vide.(On utilisera le fait que $\mathcal{R}$ est archimédien.)
   (b) Montrer que A admet un plus petit élément qu'on notera a. En déduire que
   $$\overline{(a)} \leq_{\mathcal{R}} x <_{\mathcal{R}} \overline{(a+1)}.$$
   (c) Montrer qu'il existe un unique entier naturel noté $E(x)$ tel que
   $$\overline{(E(x))} \leq_{\mathcal{R}} x <_{\mathcal{R}} \overline{(E(x)+1)}.$$
   On appelle $E(x)$ la partie entière de x.

3 Décimaux et suites de Cauchy

3.1 Nombres décimaux

Exercice 6. Soit $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres rationnels. On dit que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un *développement décimal positif* si

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = \frac{a_n}{10^n}$ avec $a_n \in \mathbb{N}^*$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le quotient de $10^n * d_n$ dans la division euclidienne par 10 est $10^{n-1} * d_{n-1}$.

1. Montrer que si $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un *développement décimal positif* alors la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. (On montrera que $0 < d_{n+k} - d_n < 10^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en montrant que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $0 < d_{m+1} - d_m \geq 9 * 10^{-(m+1)}$ et en écrivant $d_{n+k} - d_n = \sum_{m=n}^{n+k-1}(d_{m+1} - d_m)$ [3].
2. Soit $x \in \mathcal{R}$ tel que $x >_{\mathcal{R}} 0$. On considère la suite de rationnels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$.
   (a) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un développement positif décimal(Indication: on écrira $10^n * x_n = 10 * q + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < 10$ et on montrera que $\overline{(q)} \leq_{\mathcal{R}} 10^{n-1}x <_{\mathcal{R}} \overline{(q+1)}$. Conclure en utilisant l'unicité de la partie entière.)
   (b) Montrer que la classe de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{R}$ est la classe de x dans $\mathcal{R}$.

[3] On rappelle la formule de la série géométrique $1 + b + b^2 + \cdots + b^{m-1} = \frac{1-b^m}{1-b}$. pour tout $b \in \mathbb{Q}$ différent de 1.

3.2 Complétude de $\mathcal{R}$

On dit qu'une suite de nombres réels $x^{(k)}$ converge vers un nombre réel l si

(1) Pour tout $\boldsymbol{\epsilon}$ **dans** $\boldsymbol{\mathcal{R}^{+,*}}$ il existe N dans $\mathbb{N}$, tel que pour tout $k \geq N$ on a $-\epsilon \leq_{\mathcal{R}} x^{(k)} - l \leq_{\mathcal{R}} \epsilon$.

On dit qu'une suite de nombres réels $x^{(k)}$ est de Cauchy si

(2)
Pour tout $\boldsymbol{\epsilon}$ **dans** $\boldsymbol{\mathcal{R}^{+,*}}$ il existe N dans $\mathbb{N}$, tel que pour tout m, k dans N on a $-\epsilon <_{\mathcal{R}} x^{(k)} - x^{(m)} <_{\mathcal{R}} \epsilon$.

On rappelle que pour tout nombre rationnel $q \in \mathbb{Q}$, la notation $\overline{(q)}$ désigne la classe de la suite constante de terme général q dans les réels. Dans cet exercice, on montre que tout nombre réel est limite de nombres rationnels et que toute suite de Cauchy de nombres réels converge dans $\mathcal{R}$. On dit que le corps des nombres réels est *complet*.

Exercice 7.

1. Soit $x \in \mathcal{R}$ un réel positifs et $x_n = \frac{E(10^n * x)}{10^n}$. Par l'exercice 6, la suite de rationnels x_n est de Cauchy et sa classe $\overline{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}}$ est égale à x. On considère désormais la suite de réels $x^{(k)}$ telle que $x^{(k)} = \overline{(x_k)}$, c'est-à-dire $x^{(k)}$ représente la suite de terme constant x_k. Montrons que la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers x.(Indication: On montrera que $\overline{(0)} \leq_{\mathcal{R}} x - \overline{(x_k)} <_{\mathcal{R}} \overline{(\frac{1}{10^k})}$.)

   Un argument de symétrie entre les réels positifs et négatifs montre que pour tout $x \in \mathcal{R}$ il existe un nombre rationnel x_n tel que

   $$-\overline{(\frac{1}{10^n})} \leq_{\mathcal{R}} x - \overline{(x_n)} <_{\mathcal{R}} \overline{(\frac{1}{10^n})}.$$

   On dit que les rationnels, vus comme leur image par ι, sont *denses* dans les réels.

2. Nous allons montrer que toute suite de Cauchy $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{R}$.

   (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit α_k tel que $-\overline{(\frac{1}{10^k})} \leq_{\mathcal{R}} x^{(k)} - \overline{(\alpha_k)} <_{\mathcal{R}} \overline{(\frac{1}{10^k})}$. Montrer que la suite de nombres rationnels $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. On note $\alpha = \overline{(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}}$ la classe de la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{R}$.

   (b) Montrer que la suite $x^{(k)}$ converge vers α. (Indication: pour tout $k \in \mathbb{N}$, écrire $x^{(k)} - \alpha = x^{(k)} - \overline{(\alpha_k)} + \overline{(\alpha_k)} - \alpha$ et montrer que $\overline{(\alpha_k)} - \alpha$ converge vers zéro.)