Groupes ABCDEF
Année universitaire 2019/2020
Unité d'enseignement UE3
Lundi 6 janvier 2020
Semestre S3

Mathématiques

durée : 2h

Nom :
Prénom :
Groupe :

Aucun document n'est autorisé. Aucune calculatrice quel que soit son type n'est autorisée.

Le temps associé à chaque exercice n'est donné qu'à titre indicatif.

Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1. (25 min) Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = y^2 - x^3 + 6x$$

(1) Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f.
(2) Déterminer ses points critiques.
(3) Déterminer la nature des points critiques.
(4) Déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à la surface S définie par

$$S : z = f(x,y)$$

au point $(1,1,6)$.
(5) Dessiner S dans le cadre ci-dessous

Exercice 2. (40 min) Soit D le domaine de l'espace défini par

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq z,\ x+z \leq 1 \right\}.$$

(1) Dessiner D. Vérifier que c'est une pyramide. Sans calculer d'intégrale, en déduire que son volume est égal à

$$V = \frac{1}{6}.$$

(2) Montrer qu'une paramétrisation de D s'écrit

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \phi_2(x), 0 \leq z \leq \psi_2(x) \right\}$$

où ϕ_2 et ψ_2 sont deux fonctions que l'on déterminera.

(3) De la paramétrisation ci-dessus, calculer les intégrales

$$\iiint_D x \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \iiint_D y \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \iiint_D z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(4) En déduire la position du centre de gravité de D en supposant que celui-ci présente une masse volumique uniforme égale à 1.

Exercice 3. (15 min) La hauteur maximale d'un projectile lancé depuis le sol à une vitesse v et selon un angle α avec l'horizontale est donnée par

$$h = \frac{v^2 \sin^2(\alpha)}{2g}.$$

Sur Vénus, on effectue une expérience pour déterminer une valeur approximative de g en lançant un projectile on obtient les résultats suivants

$$\begin{aligned} v &= 10\ \pm 10^{-1}\ m.s^{-1} \\ \alpha &= \frac{\pi}{4}\ \pm 10^{-2}\ rad \\ h &= 25 \pm 10^{-1} m \end{aligned}$$

(1) Déterminer g en fonction de v, α et h. En déduire la valeur de g sur Vénus.
(2) Donner une expression littérale pour δg en fonction de v, α, h et δv, $\delta\alpha$ et δh.
(3) Déterminer *un ordre de grandeur* de l'erreur d'estimation δg effectuée dans cette expérience.

Exercice 4. (40 min) Soit D le domaine du plan défini par

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \leq 2,\ -x \leq y, x \leq y \right\}.$$

On assimile D à une surface de densité surfacique constante égale à 1.

(1) Dessiner D.
(2) Montrer que D peut être paramétrer en coordonnées polaires par

$$\left\{ (\rho,\theta) \middle| 0 \leq \rho \leq \sqrt{2},\ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq b \right\}$$

où b est une constante que l'on déterminera.
(3) Expliquer pourquoi le centre de gravité de D est sur l'axe (Oy).
(4) Sans calculer d'intégrale, déterminer la surface de D.
(5) En effectuant un changement de variable polaire, déterminer l'intégrale

$$\iint_D y \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(6) En déduire la position du centre de gravité de D.