

# Mathématiques

durée : 2h

Nom :  
Prénom :  
Groupe :

*Aucun document n'est autorisé. Aucune calculatrice quel que soit son type n'est autorisée.*

*Le temps associé à chaque exercice n'est donné qu'à titre indicatif.*

*Les quatre exercices sont indépendants.*

**Exercice 1.** (25 min) Soit  $f$  la fonction définie par

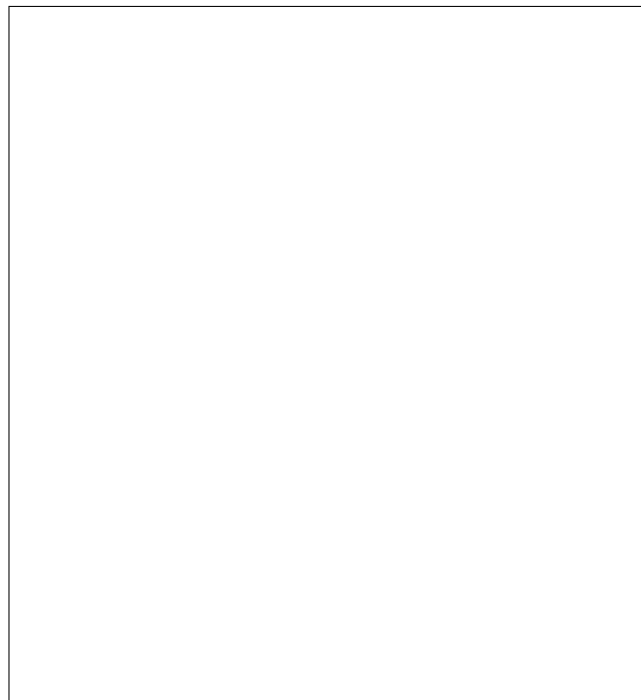
$$f(x, y) = y^2 - x^3 + 6x$$

- (1) Calculer les dérivées partielles premières et secondes de  $f$ .
- (2) Déterminer ses points critiques.
- (3) Déterminer la nature des points critiques.
- (4) Déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à la surface  $S$  définie par

$$S : z = f(x, y)$$

au point  $(1, 1, 6)$ .

- (5) Dessiner  $S$  dans le cadre ci-dessous



**Exercice 2.** (40 min) Soit  $D$  le domaine de l'espace défini par

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z, x + z \leq 1\}.$$

- (1) Dessiner  $D$ . Vérifier que c'est une pyramide. Sans calculer d'intégrale, en déduire que son volume est égal à

$$V = \frac{1}{6}.$$

- (2) Montrer qu'une paramétrisation de  $D$  s'écrit

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \phi_2(x), 0 \leq z \leq \psi_2(x)\}$$

où  $\phi_2$  et  $\psi_2$  sont deux fonctions que l'on déterminera.

- (3) De la paramétrisation ci-dessus, calculer les intégrales

$$\iiint_D x dx dy dz, \iiint_D y dx dy dz, \iiint_D z dx dy dz.$$

- (4) En déduire la position du centre de gravité de  $D$  en supposant que celui-ci présente une masse volumique uniforme égale à 1.

**Exercice 3.** (15 min) La hauteur maximale d'un projectile lancé depuis le sol à une vitesse  $v$  et selon un angle  $\alpha$  avec l'horizontale est donnée par

$$h = \frac{v^2 \sin^2(\alpha)}{2g}.$$

Sur Vénus, on effectue une expérience pour déterminer une valeur approximative de  $g$  en lançant un projectile on obtient les résultats suivants

$$v = 10 \pm 10^{-1} \text{ m.s}^{-1}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \pm 10^{-2} \text{ rad}$$

$$h = 25 \pm 10^{-1} \text{ m}$$

- (1) Déterminer  $g$  en fonction de  $v$ ,  $\alpha$  et  $h$ . En déduire la valeur de  $g$  sur Vénus.
- (2) Donner une expression littérale pour  $\delta g$  en fonction de  $v$ ,  $\alpha$ ,  $h$  et  $\delta v$ ,  $\delta \alpha$  et  $\delta h$ .
- (3) Déterminer *un ordre de grandeur* de l'erreur d'estimation  $\delta g$  effectuée dans cette expérience.

**Exercice 4.** (40 min) Soit  $D$  le domaine du plan défini par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2, -x \leq y, x \leq y\}.$$

On assimile  $D$  à une surface de densité surfacique constante égale à 1.

- (1) Dessiner  $D$ .
- (2) Montrer que  $D$  peut être paramétriser en coordonnées polaires par

$$\left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq b \right\}$$

où  $b$  est une constante que l'on déterminera.

- (3) Expliquer pourquoi le centre de gravité de  $D$  est sur l'axe  $(Oy)$ .
- (4) Sans calculer d'intégrale, déterminer la surface de  $D$ .
- (5) En effectuant un changement de variable polaire, déterminer l'intégrale

$$\iint_D y dx dy.$$

- (6) En déduire la position du centre de gravité de  $D$ .