Groupes ABCDEFGH - Rattrapage
Année universitaire 2015/2016
Unité d'enseignement UE3
Vendreri 08 janvier 2016
Semestre S3

Mathématiques

durée : 2h

1. Questions de cours.

(1) Donner les coordonnées (x_G, y_G, z_G) du centre de gravité G d'un solide Ω assimilée à un élément de $\mathbb{R}^2$ de masse totale m et de masse volumique μ.
(2) Donner le moment d'inertie par rapport à l'axe (Ox) d'un objet Ω assimilé à un élément de $\mathbb{R}^3$ de masse volumique μ.
(3) Donner la formule du changement de variable cylindrique dans une intégrale triple.

2. Calcul intégral.

2.1. **Centre de gravité.** Soit $a > 0$ un réel strictement positif. Soit Ω le domaine défini par

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus x \geq 0,\ \frac{x}{a} \leq y \leq \sqrt{x} \right\}.$$

(1) Résoudre $\frac{x}{a} = \sqrt{x}$ avec $x > 0$. Dessiner le domaine Ω.
(2) Calculer

$$\text{Aire}\,(\Omega) = \iint_\Omega 1 \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

puis

$$\iint_\Omega x \mathrm{d}x \mathrm{d}y \quad \text{et} \quad \iint_\Omega y \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

(3) En déduire les coordonnées du centre de gravité.

2.2. **Changement de coordonnées.** On considère le domaine D défini par

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0 \right\}.$$

D est la demi-boule supérieure de rayon 1. À l'aide d'un changement de coordonnées en coordonnées sphériques, calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int\int\int_D \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z.$$

3. Dessin d'une surface.

Le but de ce problème est de dessiner aussi bien que possible la surface

$$z = y^2 - x^3 + x.$$

(1) Soit g la fonction définie par

$$g(x) = x^3 - x$$

Montrer que $g(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [-1, 0] \cup [1, \infty[$. *On écrira que* $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ *et on étudiera le signe de chaque terme.*

(2) Calculer $g^{'}(x)$. Etudier le signe de $g^{'}$.

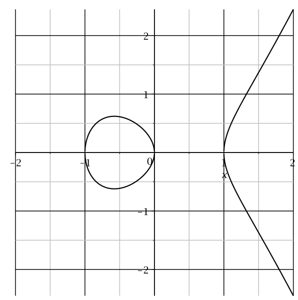
(3) Etablir le tableau de variation de g. *On note que* $\frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0,57$.

(4) Sur un même dessin, représenter le graphe des fonctions $g(x)$, $g(x) - \frac{2}{3\sqrt{3}}$, $g(x) + \frac{2}{3\sqrt{3}}$ et $g(x) + 1$. *On remarque que* $g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ *et on rappelle que le graphe d'une fonction* $f(x) + c$ *est obtenue à partir de celui de* $f(x)$ *par une translation verticale de longueur* c.

(5) Sur le même dessin faire apparaître, les domaines de définitions des fonctions

$$\sqrt{g(x)},\ \sqrt{g(x) - \frac{2}{3\sqrt{3}}},\ \sqrt{g(x) + \frac{2}{3\sqrt{3}}} \text{ et } \sqrt{g(x) + 1}$$

(6) Le dessin ci-dessous représente les graphes des fonctions $\pm\sqrt{g(x)}$.



Sur un nouveau même dessin représenter l'allure des graphes de

$$\pm\sqrt{g(x) - \frac{2}{3\sqrt{3}}},\ \pm\sqrt{g(x) + \frac{2}{3\sqrt{3}}} \text{ et } \pm\sqrt{g(x) + 1}$$

(7) Soit la fonction f définie par

$$f(x, y) = y^2 - x^3 + x.$$

Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, , $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

(8) Montrer que le système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

a deux solutions. En déduire que la surface $z = f(x, y)$ a deux points critiques et en calculant le Hessien, déterminer leur nature.

(9) En remarquant que les courbes obtenues en coupant la surface avec les plans $z = 0$, $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ et 1 sont respectivement les graphes de $\pm\sqrt{g(x)}$, $\pm\sqrt{g(x) - \frac{2}{3\sqrt{3}}}$, $\pm\sqrt{g(x) + \frac{2}{3\sqrt{3}}}$ et $\pm\sqrt{g(x) + 1}$ et à partir des questions ci-dessus, donner une allure de la surface $z = f(x, y)$.