Groupes ABCDEFGH
Année universitaire 2015/2016
Unité d'enseignement UE3
Mardi 05 janvier 2016
Semestre S3

Mathématiques

durée : 2h

1. Questions de cours.

(1) Donner les coordonnées (x_G, y_G) du centre de gravité G d'une plaque Ω assimilée à un élément de $\mathbb{R}^2$ de masse totale m et de masse surfacique μ.
(2) Donner le moment d'inertie par rapport à l'axe (Oy) d'un objet Ω assimilé à un élément de $\mathbb{R}^3$ de masse volumique μ.
(3) Énoncer le théorème de Schwarz pour une fonction de deux variables f.

2. Calcul intégral.

2.1. Centre de gravité.

Soit Ω le domaine défini par

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash x \geq 0,\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x} \right\}.$$

(1) Résoudre $x^2 = \sqrt{x}$ avec $x > 0$. Dessiner le domaine Ω.
(2) Montrer que si $(x, y) \in D$ alors $(y, x) \in D$. Quelle est la transformation géométrique du plan définie par $(x, y) \to (y, x)$? En déduire que l'abscisse et l'ordonnée de Ω sont égales.
(3) Calculer

$$\text{Aire}(\Omega) = \iint_\Omega 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

et

$$\iint_\Omega x \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(4) En déduire les coordonnées du centre de gravité.

2.2. Changement de coordonnées.

On considère le domaine D défini par $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,,\ x^2 + y^2 \leq 4\,,\ 0 \leq z \leq 2\right\}$.
À l'aide d'un changement de coordonnées en coordonnées cylindriques, calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int\int\int_D \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. Calcul d'incertitude.

La période d'un pendule non amorti de longueur L s'écrit

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

On veut utiliser cette formule pour déterminer une valeur approchée de l'accélération g due à la pensanteur.
On pourra utiliser que

$$\pi^2 \simeq 9,8696$$

(1) Exprimer g en fonction de L et T.

(2) Une expérience effectuée avec un pendule de longueur $1,000 \pm 10^{-2}$ m donne le résultat

$$T = 2,00 \pm 10^{-2} \ s$$

Déterminer la valeur de g et l'incertitude associée à ce calcul.

(3) Dans cette question, on suppose que l'erreur que l'on effectue sur la période T est négligeable.

(a) Montrer que

$$\frac{\delta g}{g} \leq \frac{\delta L}{L}.$$

(b) En supposant qu'on ne puisse pas espérer mieux qu'une erreur de 1 cm sur la longueur du pendule, quelle est la longueur minimale du pendule garantissant une erreur sur g plus petite que 10^{-3} $m.s^{-2}$?

4. Recherche d'extrema.

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^2y - 9y - 2.$$

(1) Calculer le gradient de f et la Hessienne de f pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(2) Déterminer les points critiques de f.

(3) Ces points correspondent-ils à des extrema ? Si oui, précisez leur nature.

(4) On considère la surface S donnée par

$$z = f(x, y).$$

(a) Montrer que l'intersection de cette surface avec la plan $z = 0$ est donnée par la relation

$$y = \frac{2}{x^2 - 9}.$$

Dessiner rapidement la courbe obtenue.

(b) Déduire des informations obtenues ci-dessus l'allure de la surface S.