Groupes ABCDEFGH
Année universitaire 2015/201
Unité d'enseignement UE3
Jeudi 07 janvier 2016
Semestre S3

Mathématiques

durée : 2h

1. Calcul intégral.

Soit Ω le domaine défini par

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash\, x \geq 0,\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x} \right\}.$$

(1) Résoudre $x^2 = \sqrt{x}$ avec $x > 0$. Dessiner le domaine Ω.
(2) Montrer que si $(x,y) \in D$ alors $(y,x) \in D$. Quelle est la transformation géométrique du plan définie par $(x,y) \to (y,x)$? En déduire que l'abscisse et l'ordonnée de Ω sont égales.
(3) Calculer

$$\text{Aire}\,(\Omega) = \iint_\Omega 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

et

$$\iint_\Omega x \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(4) En déduire les coordonnées du centre de gravité.

2. Calcul d'incertitude.

La période d'un pendule non amorti de longueur L s'écrit

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

On veut utiliser cette formule pour déterminer une valeur approchée de l'accélération g due à la pensanteur. On pourra utiliser que

$$\pi^2 \simeq 9,8696$$

(1) Exprimer g en fonction de L et T.
(2) Une expérience effectuée avec un pendule de longueur $1,000 \pm 10^{-2}\ m$ donne le résultat

$$T = 2,00 \pm 10^{-2}\ s$$

Déterminer la valeur de g et l'incertitude associée à ce calcul.
(3) Dans cette question, on suppose que l'erreur que l'on effectue sur la période T est négligeable.
  (a) Montrer que

$$\frac{\delta g}{g} \leq \frac{\delta L}{L}.$$

  (b) En supposant qu'on ne puisse pas espérer mieux qu'une erreur de 1 cm sur la longueur du pendule, quelle est la longueur minimale du pendule garantissant une erreur sur g plus petite que $10^{-3}\ m.s^{-2}$?

3. Dessin d'une surface.

Le but de ce problème est de dessiner aussi bien que possible la surface
$$z = y^2 - x^3 + x.$$

(1) Soit g la fonction définie par
$$g(x) = x^3 - x$$
Montrer que $g(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [-1, 0] \cup [1, \infty[$. *On écrira que $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ et on étudiera le signe de chaque terme.*

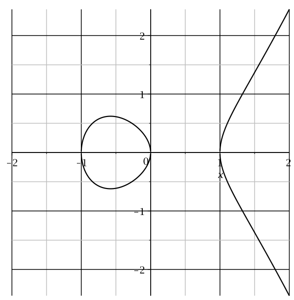
(2) Calculer $g'(x)$. Etudier le signe de g'.

(3) Etablir le tableau de variation de g. *On note que $\frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0,57$.*

(4) Sur un même dessin, représenter le graphe des fonctions $g(x)$, $g(x) - \frac{2}{3\sqrt{3}}$, $g(x) + \frac{2}{3\sqrt{3}}$ et $g(x) + 1$. *On remarque que $g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ et on rappelle que le graphe d'une fonction $f(x) + c$ est obtenue à partir de celui de $f(x)$ par une translation verticale de longueur c.*

(5) Sur le même dessin faire apparaître, les domaines de définitions des fonctions
$$\sqrt{g(x)},\ \sqrt{g(x) - \frac{2}{3\sqrt{3}}},\ \sqrt{g(x) + \frac{2}{3\sqrt{3}}} \text{ et } \sqrt{g(x)+1}$$

(6) Le dessin ci-dessous représente les graphes des fonctions $\pm\sqrt{g(x)}$.



Sur un nouveau même dessin représenter l'allure des graphes de
$$\pm\sqrt{g(x) - \frac{2}{3\sqrt{3}}},\ \pm\sqrt{g(x) + \frac{2}{3\sqrt{3}}} \text{ et } \pm\sqrt{g(x)+1}$$

(7) Soit la fonction f définie par
$$f(x, y) = y^2 - x^3 + x.$$
Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, , $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

(8) Montrer que le système
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$
a deux solutions. En déduire que la surface $z = f(x, y)$ a deux points critiques et en calculant le Hessien, déterminer leur nature.

(9) En remarquant que les courbes obtenues en coupant la surface avec les plans $z = 0$, $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ et 1 sont respectivement les graphes de $\pm\sqrt{g(x)}$, $\pm\sqrt{g(x) - \frac{2}{3\sqrt{3}}}$, $\pm\sqrt{g(x) + \frac{2}{3\sqrt{3}}}$ et $\pm\sqrt{g(x)+1}$ et à partir des questions ci-dessus, donner une allure de la surface $z = f(x, y)$.