Parcours Spéciaux 2018-2019
Principes d'analyse - Exercices

Les exercices précédés du symbole ($\lightning$) sont d'un abord plus délicat et pourront être traités dans un second moment. Certaines sections proposent quelques exercices supplémentaires de la base Exo7 dont on trouvera une référence ici

https ://perso.math.univ-toulouse.fr/genzmer/files/2016/09/ficall.pdf

Enfin, pour l'apprentissage de la technique de démonstration, on conseille la lecture de

https ://perso.math.univ-toulouse.fr/genzmer/files/2019/01/Glossaire.pdf

1. Relation d'équivalence et d'ordre

Exo7 : 5

Exercice 1. Déterminer si chacune des relations ci-dessous est réflexive, symétrique ou transitive.

(1) La relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{Q}$ définie par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy \neq 0$.

(2) La relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{Q}^\star$ définie par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy \neq 0$.

(3) La relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{Z}$ par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y$ est divisible par 3 ou 5

Exercice 2. On considère la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ définie par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xe^y = ye^x.$$

(1) Montrer que c'est une relation d'équivalence.

(2) Décrire la classe d'équivalence $C(x)$ de x pour $x \in \mathbb{R}$. (indication : réécrire la relation $x\mathcal{R}y$ sous la forme $f(x) = f(y)$ pour f une fonction donnée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.)

Exercice 3. Soit la relation $\mathcal{R}_p$ définie sur $\mathbb{N}$ par

$$n \sim m \Longleftrightarrow n - m \text{ est divisible par } p.$$

Montrer que $\mathcal{R}_p$ est une relation d'équivalence. Combien y-a-t il de classe d'équivalence ?

Exercice 4. Pour un ensemble E on définit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

(1) Calculer $\mathcal{P}(\{0\})$ et $\mathcal{P}(\{0,1\})$

(2) Montrer que la relation d'inclusion est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$. Est-ce un ordre total ?

(3) On suppose que $E = \mathbb{R}$. Est-ce que l'ensemble $\{\{0\},\{1\}\}$ admet un minorant ? un majorant ? une borne supérieure ? une borne inférieure ?

(4) Montrer que toute partie de $\mathcal{P}(E)$ admet une borne inférieure et une borne supérieure.

Exercice 5. Soit sur $\mathbb{N}^*$ la relation définie par $a \prec b$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = a^n$.

(1) Montrer que c'est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ?

(2) Est-ce que l'ensemble $\{2,3\}$ admet un majorant ? un minorant ?

(3) Est-ce que l'ensemble $\{9,27\}$ admet un majorant ? un minorant ? une borne supérieure ?

Exercice 6. Soient $(E, \leq_E)$ et $(F, \leq_F)$ deux ensembles munis de relations d'ordre. On définit la relation dite *simple* sur $E \times F$ par $(x,y) \leq (x',y')$ si et seulement si $x \leq_E x'$ et $y \leq_F y'$. On définit la relation lexicographique sur $E \times F$ par $(x,y) \leq_{lex} (x',y')$ si et seulement si $x \leq_E x'$ ou $x = x'$ et $y \leq_F y'$.

(1) Montrer que ces deux relations sont des relations d'ordre sur l'ensemble produit.

(2) Montrer que si $\leq_E$ et $\leq_F$ sont des relations d'ordre totale, il en est de même pour $\leq_{lex}$. Qu'en est-il pour la relation d'ordre simple ?

Exercice 7. Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrez que

$$\sup\{\alpha + x | x \in A\} = \alpha + \sup(A).$$

Exercice 8. Calculez la borne supérieure de $A = \left\{\frac{2^n}{2^n-1} | n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 9. Montrer qu'il n'y a pas d'application strictement décroissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même.

2. Suites numériques

Exo7 : 51-52-53-54-55-56

Exercice 10. Discuter les propriétés suivantes :

(1) Une suite croissante converge.

(2) Une suite majorée converge.

(3) Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

(4) Une suite positive qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.

(5) Une suite telle que $|u_n|$ converge est convergente.

(6) Une suite non bornée tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Exercice 11. Etudier la convergence des suites suivantes :

$u_n = \frac{n^2+1}{3n^3}$	$u_n = \frac{n^3+1}{3n^3+2}$	$u_{n+1} = n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$
$u_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$	$u_n = \frac{n\sin(n)}{n^2+1}$	$u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{8}\right)$
$u_n = \frac{E\left(n\sqrt{2}\right)}{n}$	$u_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$	$u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
$u_{n+1} = \sqrt{a+u_n}$	$u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$	$u_{n+1} = e^{u_n} - 1$
$u_n = n^\alpha \sin\left(\frac{1}{n}\right)$	$u_n = \sqrt{n^2+1} - n$	$u_n = \ln\left(1+\ln\left(\cdots\ln\left(n-1+\ln(n)\right)\right)\right)$
$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est premier.} \\ \frac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$	$u_{n+1} = u_n\left(1-u_n\right)$	$u_{n+1} = \sin\left(u_n\right)$

$E(\cdot)$ désigne la partie entière et vérifie $x \leq E(x) < x+1$.

Exercice 12. Soit u_n une suite à valeurs entières convergentes. Montrer qu'elle est constante à partir d'un certain rang.

Exercice 13. Soit E un ensemble fini et f une fonction de E dans E. On considère une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que quelque soit le terme initial u_0, la suite est périodique à partir d'un certain rang.

Exercice 14. ($\lightning$) Soit u_n une suite qui tend vers λ. Montrer que la suite

$$U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k$$

tend vers λ. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 15. (ϟϟϟ) Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On définit les deux quantités suivantes

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n := \lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right) \text{ et } \liminf_{n\to+\infty} a_n := \lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right)$$

dites limites supérieure et inférieure.

(1) Vérifier que ces deux définitions ont bien un sens, c'est-à-dire, que les deux limites existent.

(2) Calculer les limites supérieure et inférieure de la suite $a_k = (-1)^k(1+\frac{1}{k})$

(3) Vérifier les assertions suivantes
- $\limsup_{n\to+\infty} a_n < \alpha \Rightarrow \exists n \forall k > n\ a_k < \alpha$.
- $\limsup_{n\to+\infty} a_n > \alpha \Rightarrow \forall n \exists k > n\ a_k > \alpha$.

(4) Montrer que $\limsup_{n\to+\infty} a_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de la suite a_n.

(5) Montrer que la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si ses limites, supérieure et inférieure, sont égales.

(6) Montrer qu'une suite bornée avec une seule valeur d'adhérence converge vers cette valeur.

Exercice 16. (ϟϟ) On introduit le principe d'extraction diagonale. Soient $(x_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}, (x_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (x_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles bornées.

(1) Montrer qu'il existe une extraction ϕ telle que pour tous $i = 1, \ldots, p$, la suite $(x_{\phi(n)}^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

(2) Montrer que ce principe s'étend à un nombre infini de suites.

Exercice 17. Déterminer des équivalents simple des suites suivantes

$u_n = \frac{n^2+1}{n^4}$	$u_n = n^5 + n^4 - 2$	$u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
$u_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$	$u_n = \sqrt{n^2+1} - n$	$u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$
$u_n = \left(\ln\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\ln\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$	$u_n = \sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$	$u_n = \sum_{k=1}^n k!$

3. Intégrales de Riemann

Exo7 : 85 – 93 & 96

3.1. **Théorie.**

Exercice 18. Soit f une fonction définie sur $[0,1]$ et vérifiant

$$(\star) \qquad |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$$

pour tout x, y dans $[0,1]$ pour une certaine constante M.

(1) Montrer que

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t)\right)dt\right| \leq \frac{M}{2n}.$$

(2) En déduire que si f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt.$$

On montrera que si f est $\mathcal{C}^1$, elle vérifie l'hypothèse $(\star)$.

Exercice 19. Soient $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. On pose $I_n = \int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt$

(1) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que I_n tend vers 0.

(2) Montrer que ceci est encore vrai si f est en escalier.

(3) (ϟ) En déduire que le résultat subsiste pour f continue par morceaux.

Exercice 20. (ϟϟ) Soit u_n une suite à valeur dans $[0,1]$. On dit qu'elle est équirépartie si la suite

$$\frac{\text{Card}\{\, u_k \in [a,b] |\, k \leq n\}}{n} \to b-a.$$

(1) Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite équirépartie sur $[0,1]$ est $[0,1]$.

(2) Soit $I=[a,b]$ un intervalle de $[0,1]$ et f_I la fonction qui vaut 1 sur I et 0 ailleurs. Calculer la valeur de la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f_I\left(u_k\right).$$

(3) Plus généralement, soit f une fonction en escalier, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(u_k\right) = \int_0^1 f\left(x\right) dx.$$

Exercice 21. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Justifier que les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes sont $\mathcal{C}^1$ et donner leur dérivée.

(1) $g(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t)dt$;

(2) $g(x) = \int_0^x f(t+x)dt$;

(3) $g(x) = \int_0^x xf(t)dt$.

Exercice 22. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$. Pour $x \neq 0$, on pose

$$F(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^{x} f(t)dt.$$

(1) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^*$ et peut être prolongée par continuité en 0. On effectue ce prolongement.

(2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et donner l'expression de sa dérivée sous forme intégrale.

(3) Etudier la dérivabilité de F en 0

Exercice 23. Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction $f_n(x) = n^a x e^{-nx}$.

(1) Montrer que pour $x_0 \geq 0$ la suite $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0

(2) Etudier, en fonction de a, la convergence de la suite $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$.

(3) Qu'en concluez vous ?

3.2. **Calcul.**

Exercice 24. Soit P_n le polynôme défini par $P_n\left(x\right) = \frac{x^n(bx-a)^n}{n!}$.

(1) Montrer que P_n ainsi que toutes ses dérivées prennent des valeurs entières en 0 et $\frac{a}{b}$.

(2) Montrer que

$$I_n = \int_0^{\pi} P_n\left(t\right) \sin\left(t\right) dt$$

tend vers 0 lorsque n tend vers ∞.

(3) En déduire que π ne peut pas être un nombre rationnel.

Exercice 25. Calculer une primitive de

$e^x \cos\left(x\right)$	$\frac{\ln x}{x}$	$\frac{1}{x \ln x}$
$\tan x$	$\sqrt{1-x^2}$	$x^k e^x$
$\cos^2 x$	$x \arctan x$	$\frac{1}{x^3-1}$

Exercice 26. Déterminer la limite de la suite suivante
$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}.$$

Exercice 27. Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Calculer les intégrales suivantes
— $\int_0^a \frac{sin(x)}{1+cos(x)} dx$;
— $\int_0^a \frac{cos(x)}{1+cos(x)} dx$;
— $\int_0^a \frac{1}{1+cos(x)} dx$.

Exercice 28. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note I_n l'intégrale $\int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

(1) En faisant une intégration par partie, calculer I_{n+1} en fonction de I_n ;
(2) En déduire une expression de I_n en fonction de n.
(3) En utilisant la formule du binôme, calculer I_n.
(4) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

4. Intégrales généralisées.

Exercice 29. Pour chacune des intégrales généralisées suivantes, étudier la convergence de l'intégrale et, lorsqu'elle est convergente, donner sa valeur :

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$	$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$	$\int_0^{\infty} \cos t dt$	$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t} dt$
$\int_{-1}^0 \frac{e^t}{\sqrt{1-e^t}}\ dt$	$\int_0^{+\infty} te^t\ dt$	$\int_0^1 \ln t\ dt$	$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln t}\ dt$

Exercice 30. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^4}\ dt$	$\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^4}\ dt$	$\int_0^1 \frac{\sin t}{t^2}\ dt$	$\int_1^{+\infty} \ln(1+\frac{2}{t^3})\ dt$
$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt$	$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\ dt$	$\int_0^1 \frac{1-e^t}{t\sqrt{t}}\ dt$	$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\ dt$
$\int_1^{+\infty} \frac{e^t}{t^2}\ dt$	$\int_0^1 \frac{1}{e^t-\cos t}\ dt$	$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2\ln t}\ dt$	$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)^2}\ dt$

Exercice 31. On souhaite montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est semiconvergente.

(1) En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.
(2) Montrer que $\int_1^{+\infty} |\frac{\sin(t)}{t}| dt$ est divergente. *Indication : pour $t \geq 1$, on a*
$$\frac{|\sin(t)|}{t} \geq \frac{\sin(t)^2}{t} = \frac{1-\cos(2t)}{2t}.$$
Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{t} dt$ diverge.

Exercice 32. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt$ converge et vaut 0.

Exercice 33. En utilisant la règle d'Abel, montrer que les intégrales suivantes convergent.
$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} \quad (\alpha > 0)\,, \quad \int_0^{+\infty} (\sin t)(\sin \frac{1}{t}) dt\,.$$