
Parcours Spéciaux 2019-2020
Principes d'analyse - Exercices

Les exercices précédés du symbole ($\lightning$) sont d'un abord plus délicat et pourront être traités dans un second moment. Certaines sections proposent quelques exercices supplémentaires de la base Exo7 dont on trouvera une référence ici

https://perso.math.univ-toulouse.fr/genzmer/files/2016/09/ficall.pdf

Enfin, pour l'apprentissage de la technique de démonstration, on conseille la lecture de

https://perso.math.univ-toulouse.fr/genzmer/files/2019/01/Glossaire.pdf

1. Relation d'équivalence et d'ordre

Exo7 : 5

Exercice 1. Déterminer si chacune des relations ci-dessous est réflexive, symétrique ou transitive.

(1) La relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{Q}$ définie par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy \neq 0$.
(2) La relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{Q}^\star$ définie par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy \neq 0$.
(3) La relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{Z}$ par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y$ est divisible par 3 ou 5

Exercice 2. On considère la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ définie par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xe^y = ye^x.$$

(1) Montrer que c'est une relation d'équivalence.
(2) Décrire la classe d'équivalence $C(x)$ de x pour $x \in \mathbb{R}$. (indication: réécrire la relation $x\mathcal{R}y$ sous la forme $f(x) = f(y)$ pour f une fonction donnée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.)

Exercice 3. Soit la relation $\mathcal{R}_p$ définie sur $\mathbb{N}$ par

$$n \sim m \Longleftrightarrow n - m \text{ est divisible par } p.$$

Montrer que $\mathcal{R}_p$ est une relation d'équivalence. Combien y-a-t il de classe d'équivalence ?

Exercice 4. Soit sur $\mathbb{N}^*$ la relation définie par $a \prec b$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = a^n$.

(1) Montrer que c'est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ?
(2) Est-ce que l'ensemble $\{2, 3\}$ admet un majorant ? un minorant ?
(3) Est-ce que l'ensemble $\{9, 27\}$ admet un majorant ? un minorant ? une borne supérieure ?

Exercice 5. Soient $(E, \leq_E)$ et $(F, \leq_F)$ deux ensembles munis de relations d'ordre. On définit la relation dite *simple* sur $E \times F$ par $(x, y) \leq (x', y')$ si et seulement si $x \leq_E x'$ et $y \leq_F y'$. On définit la relation lexicographique sur $E \times F$ par $(x, y) \leq_{lex} (x', y')$ si et seulement si $x \leq_E x'$ ou $x = x'$ et $y \leq_F y'$.

(1) Montrer que ces deux relations sont des relations d'ordre sur l'ensemble produit.
(2) Montrer que si $\leq_E$ et $\leq_F$ sont des relations d'ordre totale, il en est de même pour $\leq_{lex}$. Qu'en est-il pour la relation d'ordre simple?

Exercice 6. Calculez la borne inférieure de $A = \left\{ \frac{2^n}{2^n - 1} | n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Exercice 7. Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrez que

$$\sup \{ \alpha + x | \, x \in A \} = \alpha + \sup (A).$$

Exercice 8. Montrer qu'il n'y a pas d'application strictement décroissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même.

Exo7 : 51-52-53-54-55-56

Exercice 9. Discuter les propriétés suivantes:

(1) Une suite croissante converge.
(2) Une suite majorée converge.
(3) Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
(4) Une suite positive qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
(5) Une suite telle que $|u_n|$ converge est convergente.
(6) Une suite non bornée tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Exercice 10. Etudier la convergence des suites suivantes:

$u_n = \frac{n^2+1}{3n^3}$	$u_n = \frac{n^3+1}{3n^3+2}$	$u_n = n\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$
$u_n = \frac{E(n\sqrt{2})}{n}$	$u_n = \frac{n\sin(n)}{n^2+1}$	$u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
$u_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$	$u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$	$u_n = \sqrt{n^2+1}-n$
$u_n = n^\alpha \sin\left(\frac{1}{n}\right)$	$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est premier.} \\ \frac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$	

$E(\cdot)$ désigne la partie entière et vérifie $x \leq E(x) < x+1$.

Exercice 11. Etudier la convergence des suites suivantes:

$$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \quad u_{n+1} = u_n(1-u_n) \quad u_{n+1} = \sin(u_n) \quad u_{n+1} = e^{u_n} - 1$$

Exercice 12. Etudier la convergence des suites suivantes:

$$u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{8}\right) \quad u_n = (-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 13. Soit u_n une suite à valeurs entières convergentes. Montrer qu'elle est constante à partir d'un certain rang.

Exercice 14. ($\lightning$) Soit u_n une suite qui tend vers λ. Montrer que la suite

$$U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k$$

tend vers λ. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 15. ($\lightning$) Soit E un ensemble fini et f une fonction de E dans E. On considère une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que quelque soit le terme initial u_0, la suite est périodique à partir d'un certain rang.

Exercice 16. ($\lightning\lightning\lightning$) Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On définit les deux quantités suivantes

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n := \lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right) \text{ et } \liminf_{n\to+\infty} a_n := \lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right)$$

dites limites supérieure et inférieure.

(1) Vérifier que ces deux définitions ont bien un sens, c'est-à-dire, que les deux limites existent.
(2) Vérifier les assertions suivantes
   - $\limsup_{n\to+\infty} a_n < \alpha \Rightarrow \exists n \forall k > n \ a_k < \alpha$.
   - $\limsup_{n\to+\infty} a_n > \alpha \Rightarrow \forall n \exists k > n \ a_k > \alpha$.
(3) Montrer que $\limsup_{n\to+\infty} a_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de la suite a_n.

(4) Montrer que la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si ses limites, supérieure et inférieure, sont égales.
(5) Montrer qu'une suite bornée avec une seule valeur d'adhérence converge vers cette valeur.

Exercice 17. Déterminer des équivalents simple des suites suivantes

$u_n = \frac{n^2+1}{n^4}$	$u_n = n^5 + n^4 - 2$	$u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
$u_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$	$u_n = \sqrt{n^2+1} - n$	$u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$
$u_n = \left(\ln\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\ln\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$	$u_n = \sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$	$u_n = \sum_{k=1}^{n} k!$

3. Intégrales de Riemann

Exo7 : 85 – 93 & 96

3.1. **Théorie.**

Exercice 18. Soit f une fonction définie sur $[0,1]$ et vérifiant

$$(\star) \qquad |f(x) - f(y)| \leq M\,|x-y|$$

pour tout x, y dans $[0,1]$ pour une certaine constante M.

(1) Montrer que
$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t)\right)dt\right| \leq \frac{M}{2n}.$$
(2) En déduire que si f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ alors
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt.$$
On montrera que si f est $\mathcal{C}^1$, elle vérifie l'hypothèse $(\star)$.
(3) Déterminer la limite de la suite suivante
$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{n^2+k^2}.$$

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Justifier que les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes sont $\mathcal{C}^1$ et donner leur dérivée.

(1) $g(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t)dt$;
(2) $g(x) = \int_0^x f(t+x)dt$;

Exercice 20. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$. Pour $x \neq 0$, on pose

$$F(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)dt.$$

(1) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^*$ et peut être prolongée par continuité en 0. On effectue ce prolongement.
(2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et donner l'expression de sa dérivée sous forme intégrale.
(3) Etudier la dérivabilité de F en 0

Exercice 21. Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction $f_n(x) = n^a x e^{-nx}$.

(1) Montrer que pour $x_0 \geq 0$ la suite $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0
(2) Etudier, en fonction de a, la convergence de la suite $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$.
(3) Qu'en concluez vous?

3.2. **Calcul.**

Exercice 22. Calculer une primitive de

$e^x \cos(x)$	$\frac{\ln x}{x}$	$\frac{1}{x \ln x}$
$\tan x$	$\sqrt{1-x^2}$	$x^k e^x$
$\cos^2 x$	$x \arctan x$	$\frac{1}{x^3-1}$

Exercice 23. Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Calculer les intégrales suivantes

- $\int_0^t \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} dx$;
- $\int_0^t \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)} dx$;
- $\int_0^t \frac{1}{1+\sin(x)} dx$.

Exercice 24. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note I_n l'intégrale $\int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

(1) En faisant une intégration par partie, calculer I_{n+1} en fonction de I_n;
(2) En déduire une expression de I_n en fonction de n.
(3) En utilisant la formule du binôme, calculer I_n.
(4) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

4. Intégrales généralisées.

Exercice 25. Pour chacune des intégrales généralisées suivantes, étudier la convergence de l'intégrale et, lorsqu'elle est convergente, donner sa valeur :

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$	$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$	$\int_0^{\infty} \cos t dt$	$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t} dt$
$\int_{-1}^0 \frac{e^t}{\sqrt{1-e^t}}\ dt$	$\int_0^{+\infty} te^t\ dt$	$\int_0^1 \ln t\ dt$	$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln t}\ dt$

Exercice 26. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^4}\ dt$	$\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^4}\ dt$	$\int_0^1 \frac{\sin t}{t^2}\ dt$	$\int_1^{+\infty} \ln(1+\frac{2}{t^3})\ dt$
$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt$	$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\ dt$	$\int_0^1 \frac{1-e^t}{t\sqrt{t}}\ dt$	$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\ dt$
$\int_1^{+\infty} \frac{e^t}{t^2}\ dt$	$\int_0^1 \frac{1}{e^t - \cos t}\ dt$	$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2 \ln t}\ dt$	$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)^2}\ dt$

Exercice 27. On souhaite montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est semiconvergente.

(1) En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.
(2) Montrer que $\int_1^{+\infty} |\frac{\sin(t)}{t}| dt$ est divergente. *Indication: pour* $t \geq 1$*, on a*

$$\frac{|\sin(t)|}{t} \geq \frac{\sin(t)^2}{t} = \frac{1-\cos(2t)}{2t}.$$

Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{t} dt$ *diverge.*

Exercice 28. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt$ converge et vaut 0.

Exercice 29. En utilisant la règle d'Abel, montrer que les intégrales suivantes convergent.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} \quad (\alpha > 0), \quad \int_0^{+\infty} (\sin t)(\sin \frac{1}{t}) dt.$$