Sommaire

Relation d'équivalence et d'ordre

I - Relation d'équivalence

Soit E un ensemble (Théorie de Zermelo-Fraenkel)

1 - Définitions

* Une relation d'équivalence sur E est une partie du produit cartésien $E \times E$, notée en général $\mathcal{R}$.
Lorsqu'un couple (x, y) appartient à $\mathcal{R}$, on notera $x \mathcal{R} y$, qui se lira "x est en relation avec y".

On demande que :
- $\mathcal{R}$ soit réflexive

  $\forall x \in E, \ x \mathcal{R} x$

- $\mathcal{R}$ soit symétrique

  $\forall x \in E, \forall y \in E$
  $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$

- $\mathcal{R}$ soit transitive

  $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E$
  $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$

* Produit cartésien de A et B :

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A, y \in B\}$$

* Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.
On appelle classe d'équivalence de x :

$$\mathcal{C}(x) = \{y \in E / x \mathcal{R} y\}$$

2 - Exemples

* $E = \{\text{tous les objets}\}$

$x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow$ x et y ont la même couleur

① x et x ont la même couleur : $x \mathcal{R} x$
$\mathcal{R}$ est réflexive

② si x et y ont la même couleur, alors y et x ont la même couleur.
$\mathcal{R}$ est symétrique

③ si x et y ont la même couleur et si y et z ont la même couleur, alors x et z ont la même couleur
$\mathcal{R}$ est transitive.

$\mathcal{C}(\text{nuage}) = \{\text{tous les objets blancs}\} = \mathcal{C}(\text{yaourt})$

* $E = \mathbb{Z}$

$x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow x - y$ divisible par 2

① $x - x = 0$, divisible par deux
$\mathcal{R}$ réflexive

② si $x - y$ est divisible par deux alors $-(x-y) = y - x$ est divisible par deux
$\mathcal{R}$ symétrique

③ si $x - y$ est divisible par 2 et si $y - z$ aussi, alors $x - z = x - y + y - z$ est divisible par deux
$\mathcal{R}$ transitive

C'est bien une relation d'équivalence

$\mathcal{C}(0) = \{y \in \mathbb{Z} \,/\, 0 \mathcal{R} y\}$

$= \{y \in \mathbb{Z} \,/\, 0 - y \text{ est divisible par deux}\}$

$= \{\text{entiers pairs}\}$

$\mathcal{C}(2) = \{y \in \mathbb{Z} \,/\, 2 \mathcal{R} y\}$

$= \{y \in \mathbb{Z} \,/\, 2 - y \text{ est divisible par deux}\}$

$= \mathcal{C}(0)$

$= \{\text{entiers pairs}\}$

$\mathcal{C}(1) = \{y \in \mathbb{Z} \,/\, 1 \mathcal{R} y\}$

$= \{y \in \mathbb{Z} \,/\, 1 - y \text{ est divisible par deux}\}$

$= \{\text{entiers impairs}\}$

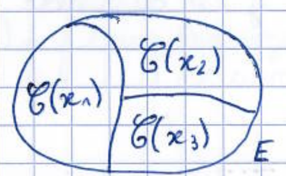
* $E = \mathbb{R}^2$

$(u, v) \mathcal{R} (u', v') \Longleftrightarrow \begin{array}{l} u - u' \in \mathbb{Z} \\ v - v' \in \mathbb{Z} \end{array}$

$$\mathscr{C}(0;0) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (0;0)\,\mathcal{R}\,(u,v)\}$$
$$= \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,\middle/\, \begin{array}{l} 0-u \in \mathbb{Z} \\ 0-v \in \mathbb{Z} \end{array}\right\}$$
$$= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,/\, u \in \mathbb{Z} \text{ et } v \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \mathbb{Z}^2$$

3 - Propriétés

* Si $x \mathcal{R} y$ alors $\mathscr{C}(x) = \mathscr{C}(y)$
* Si $\mathscr{C}(x) \cap \mathscr{C}(y) \neq \emptyset$ alors $\mathscr{C}(x) = \mathscr{C}(y)$
* L'ensemble des classes d'équivalence constitue une partition de E



Démonstrations

$A = B \iff A \subset B$ et $B \subset A$
$A \subset B \iff \forall x \in A,\ x \in B$

* Supposons que $x \mathcal{R} y$.

Montrons que $\mathscr{C}(x) \subset \mathscr{C}(y)$

Soit $z \in \mathscr{C}(x)$, alors $x \mathcal{R} z$

Par hypothèse, on a $x \mathcal{R} y$ or $\mathcal{R}$ étant symétrique on a $y \mathcal{R} x$.
Par transitivité (comme $\mathcal{R}$ est transitive), on a $y \mathcal{R} z$ donc $z \in \mathscr{C}(y)$

Montrons que $\mathscr{C}(y) \subset \mathscr{C}(x)$

Soit $z \in \mathscr{C}(y)$, alors $y \mathcal{R} z$

Comme $x \mathcal{R} y$, la transitivité assure que $x \mathcal{R} z$ donc $z \in \mathscr{C}(x)$.

Ainsi $\mathscr{C}(x) = \mathscr{C}(y)$

* Supposons que $\mathscr{C}(x) \cap \mathscr{C}(y) \neq \emptyset$.

Il existe $z \in \mathscr{C}(x) \cap \mathscr{C}(y)$, c'est à dire $x \mathcal{R} z$ et $y \mathcal{R} z$.

Par symétrie et transitivité, on a donc $x \mathcal{R} y$

D'après la démonstration précédente, $\mathscr{C}(x) = \mathscr{C}(y)$

* $\forall x \in E$, $x \in \mathscr{C}(x)$ donc $\mathscr{C}(x) \neq \emptyset$

de plus $\bigcup_{x \in E} \mathscr{C}(x) = E$

donc l'ensemble des classes d'équivalence constitue bien une partition de E.

4 - Ensemble quotient

* Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.
L'ensemble quotient, noté $E/\mathcal{R}$ est l'ensemble dont les éléments sont les classes d'équivalence.

Le quotient vient avec une application passage au quotient.

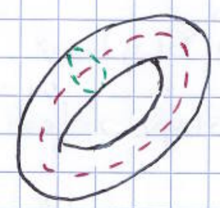
$$\pi : \begin{cases} E \longrightarrow E/\mathcal{R} \\ x \longrightarrow \mathscr{C}(x) \end{cases}$$

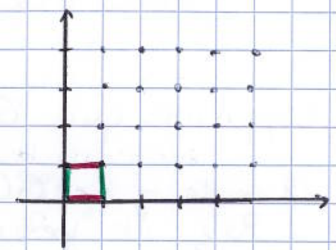
Exemples :

* $E/\mathcal{R} = \{\{\text{tous les objets verts}\}, \{\text{tous les objets bleus}\}, \dots\}$

* $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{\mathcal{C}(0), \mathcal{C}(1)\}$

* $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$ = Tore





II - Relations d'ordre

Soit E un ensemble

1- Définitions et Vocabulaire

* Une relation d'ordre sur E est une partie de $E \times E$ notée $\preccurlyeq$.
Lorsque $(x, y) \in \preccurlyeq$, on préfère noter $x \preccurlyeq y$ et on lira " x plus petit que y ".

On demande que :
- Réflexivité : $\forall x \in E \; x \preccurlyeq x$
- Antisymétrie $\forall x \in E, \; \forall y \in E$ $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x \Rightarrow x = y$
- Transitivité $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E$ $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z \Rightarrow x \preccurlyeq z$

* Une relation d'ordre est dite totale lorsque $\forall x \in E, \; \forall y \in E \; : \; x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$

* Soit A une partie de E.
  - Un majorant de A est un élément de $M \in E$ tel que $\forall x \in A \quad x \preccurlyeq M$
  - Un minorant de A est un élément de $m \in E$ tel que $\forall x \in A \quad m \preccurlyeq x$
  - A est dite bornée si elle admet un majorant et un minorant.
  - A admet un plus grand élément si il existe un majorant $M \in A$
  - A admet un plus petit élément si il existe un minorant $m \in A$
  - A admet une borne supérieure $B \in A$ si B est un majorant de A et si pour tout majorant M de A on a $B \preccurlyeq M$.
  Autrement dit, la borne supérieure lorsqu'elle existe est le plus petit des majorants.
  - A admet une borne inférieure $b \in E$ si b est minorant de A plus grand que tous les minorants de A

2- Exemples : simple, grave et bizarre

* $E = \mathbb{R}$ $\quad \leqslant$ ordre standard (total)

$A = [0, 1[$

- A est bornée car -1 est un minorant et 42 est un majorant.

- A admet un plus petit élément : 0. C'est aussi la borne inférieure car les minorants de A appartiennent à $]-\infty, 0]$, et le plus grand de ses éléments est 0.

- A n'admet pas de plus grand élément car $1 \notin A$. Néanmoins 1 est la borne supérieure.

* $E = \mathbb{Q}$ $\leqslant$ ordre standard

$A = \{ x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^2 < 2 \}$

- A est majorée, mais A n'a pas de borne supérieure, car ce serait $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

* $E = \mathbb{N}^*$ $a \preccurlyeq b \iff a$ divise b

  - a divise a donc $\preccurlyeq$ réflexif

  - si a divise b et b divise a alors $a = b$ donc $\preccurlyeq$ antisymétrique

  - si a divise b et b divise c alors $\exists k \in \mathbb{N} \,/\, b = ka$ et $\exists k' \in \mathbb{N} \,/\, = k'b$ donc $c = kk'a$ donc a divise c et $\preccurlyeq$ transitif

Soit $A = \{2, 3, 5\}$

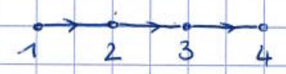
- A est majorée par $30 = \mathrm{ppcm}(2,3,5)$ c'est aussi la borne supérieur

- A n'admet pas de plus grand élément

- La borne inférieure de A est 1.

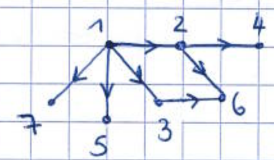
- $\preccurlyeq$ n'est pas totale car $3 \nmid 5$ et $5 \nmid 3$

$\mathbb{N}$ $\leq$



polymaths
Terence Tao

$\mathbb{N}$ $\preccurlyeq$



3 - Propriétés

* Théorème :

Soit $\mathcal{N}$, un ensemble muni d'un ordre $\preccurlyeq$
On suppose que :

- $\preccurlyeq$ est total
- Toute partie non vide admet un plus petit élément.
- Toute partie majorée non-vide admet un plus grand élément
- $\mathcal{N}$ n'admet pas de plus grand élément

Alors il existe une bijection $f : \mathcal{N} \to \mathbb{N}$ qui est croissante : $\forall x \in \mathcal{N}$, $\forall y \in \mathcal{N}$ $x \preccurlyeq y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$

* Axiome :

Il existe un ensemble $\mathcal{N}$ avec toutes les propriétés du théorème

* Théorème (dit de la borne supérieure)

Toute partie de $\mathbb{R}$ majorée non vide admet une borne supérieure.

<u>Démonstration</u> : voir DM

* Théorème (admis) Structure de $\mathbb{R}$

Tout corps totalement ordonné, complet et archimédien ($\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$) est isomorphe à $\mathbb{R}$

Suites réelles

On dispose désormais de deux ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$, on est donc amenés naturellement à étudier les fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, c'est à dire les suites réelles.

On adopte la notation suivante : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ plutôt que :

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longmapsto f(n) \end{cases}$$

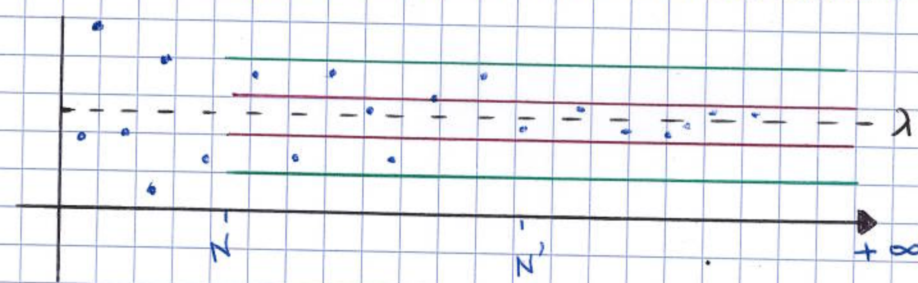
La valeur de la suite pour un entier n donné est appelée "terme de la suite au rang n".

L'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est parfois appelée "image de la suite".

* Une suite est dite respectivement majorée, minorée ou bornée, lorsque son image est respectivement majorée, minorée ou bornée comme partie de $(\mathbb{R}, \leq)$.

* On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - \lambda| \leq \varepsilon$$



I - Théorèmes fondamentaux

* Toute suite convergente est bornée

Démonstration :

Pour $\varepsilon = 1$ on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \lambda| \leqslant 1$

Posons $M = \max \{u_k\}_{k=0 \dots N-1} \cup \{1+\lambda\}$

$$m = \min \{u_k\}_{k=0 \dots N-1} \cup \{\lambda - 1\}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ si $n \geqslant N$ alors on sait que :

$$|u_n - \lambda| \leqslant 1 \Rightarrow \lambda - 1 \leqslant u_n \leqslant \lambda + 1$$

$$\Rightarrow m \leqslant \lambda - 1 \leqslant u_n \leqslant \lambda + 1 \leqslant M$$

- si $n \leqslant N-1$, alors il est clair que

$$\min \{u_k\}_{k=0 \dots N-1} \leqslant u_n \leqslant \max \{u_k\}_{k=0 \dots N-1}$$

donc on a aussi $m \leqslant u_n \leqslant M$

donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée

* → (vrai aussi dans les espaces topologiques séparés donc dans les espaces métriques)

* Si la limite existe alors elle est unique.

Démonstration : (absurde)

Supposons qu'il existe deux limites λ et λ' distinctes, c'est à dire $\lambda \neq \lambda'$

Considérons $\varepsilon = \dfrac{|\lambda - \lambda'|}{4}$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_1 \Rightarrow |u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_2 \Rightarrow |u_n - \lambda'| \leqslant \varepsilon$$

Considérons $N_3 = \max(N_1, N_2)$

$$|\lambda - \lambda'| = |\lambda - u_{N_3} + u_{N_3} - \lambda'| \leqslant |\lambda - u_{N_3}| + |\lambda' - u_{N_3}|$$

$$|\lambda - \lambda'| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \frac{|\lambda - \lambda'|}{2}$$

ce qui est impossible.

* Théorème de la limite monotone.

(très spécifique à $\mathbb{R}$)

* Toute suite croissante majorée converge

Démonstration :

Soit $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Par hypothèse, A est majoré et non vide. D'après le théorème de la borne supérieure, A admet une borne supérieure.

Posons $\lambda = \sup A$

Soit $\varepsilon > 0$

Par définition de la borne supérieure, $\lambda - \varepsilon$ n'est pas un majorant.

$\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda - \varepsilon \leqslant u_N$

Soit $n \geqslant N$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, il vient $u_N \leqslant u_n$

Comme enfin λ est un majorant de A on a :

$$\lambda - \varepsilon \leqslant u_N \leqslant u_n \leqslant \lambda \leqslant \lambda + \varepsilon$$

donc $|u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon$

* Soit (u_n) et (v_n) deux suites de limites respectives λ et λ'

- $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda + \lambda'$
- $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda\lambda'$
- si $\lambda \neq 0$, $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{\lambda}$

Démonstration : cas 2

Soit $\varepsilon > 0$, on suppose $\lambda' \neq 0$

Comme u_n est bornée, il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_n| \leqslant M$

$\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_1 \Rightarrow |v_n - \lambda'| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_2 \Rightarrow |u_n - \lambda| \leqslant \frac{\varepsilon}{2|\lambda'|}$

Posons $N_3 = \max(N_1, N_2)$

Soit $n \geqslant N_3$

alors $|u_n v_n - \lambda\lambda'| \leqslant |u_n||v_n - \lambda| + |\lambda'||u_n - \lambda|$

$$\leqslant M \frac{\varepsilon}{2M} + |\lambda'| \frac{\varepsilon}{2|\lambda'|} = \varepsilon$$

II - Valeur d'adhérence

Un des objectifs de cette notion est l'analyse de la divergence d'une suite

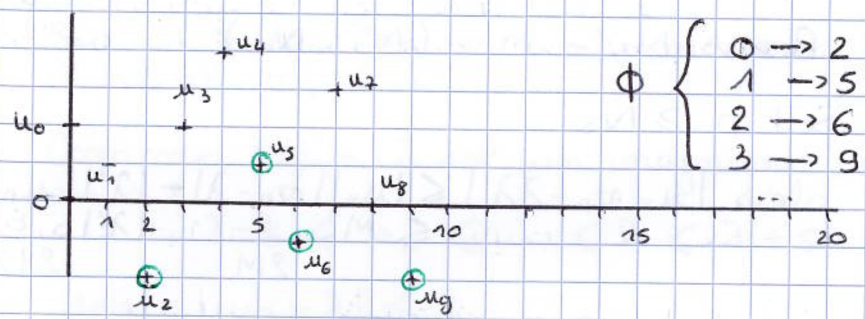
* Une extraction ϕ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$

* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
Une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, encore appelée sous-suite, est une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme

$$v_n = u_{\phi(n)}$$

où ϕ est une extraction

Autrement dit, considérer une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ consiste à choisir certains termes de la suite et à les renuméroter via l'application ϕ



$$\phi \begin{cases} 0 \to 2 \\ 1 \to 5 \\ 2 \to 6 \\ 3 \to 9 \end{cases}$$

$v_0 = u_{\phi(0)} = u_2$
$v_1 = u_{\phi(1)} = u_5$
$v_2 = u_{\phi(2)} = u_6$
$v_3 = u_{\phi(3)} = u_9$
...

Par exemple on pourrait étudier les suites extraites :

$(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $\phi(n) = 2n$ $\quad (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $\phi_n = 2n+1$

* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
Un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ est dit valeur d'adhérence de la suite s'il existe une extraction ϕ telle que la suite $u_{\phi(n)}$ converge vers λ.

En particulier, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$ alors λ est une valeur d'adhérence :
il suffit de choisir $\phi(n) = n$ comme extraction.

Exemple $\quad u_n = (-1)^n$

$u_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ donc la suite extraite
$u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

donc 1 est une valeur d'adhérence

$u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$ donc
$u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$

et -1 est une valeur d'adhérence.

* Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λ, alors toute suite extraite converge également vers λ.
Autrement dit, la suite n'a qu'une seule valeur d'adhérence.

Démonstration :

* Lemme : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\phi(n) \geqslant n + \phi(0)$

Pour $n = 0$ la propriété est vraie
$\phi(0) \leqslant 0 + \phi(0)$

Si la propriété est vraie pour n, alors

$$\phi(n+1) > \phi(n)$$
car ϕ strictement croissante
$\Rightarrow \phi(n+1) \geqslant \phi(n) + 1$
$\Rightarrow \phi(n+1) \geqslant n + \phi(0) + 1 = n+1+\phi(0)$

ce qui démontre le lemme ∎

En particulier, le lemme montre que

$$\phi(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

Soit $\varepsilon > 0$

$\exists N \in \mathbb{N},\ n \quad N \Rightarrow |u_n - \lambda| \leq \varepsilon$

Par ailleurs $\exists N_1 \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \Rightarrow \phi(n) \geq N$

Pour $n \geq N_1$, $\phi(n) \geq N$ donc $|u_{\phi(n)} - \lambda| \leq \varepsilon$

Ainsi $u_{\phi(n)}$ converge vers λ ∎

* On utilisera en fait souvent la contraposée de cette proposition.
si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a au moins deux valeurs d'adhérence distinctes alors elle diverge.

* Théorème de Bolzano - Weierstrass

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée.
Alors la suite admet au moins une valeur d'adhérence.

<u>Démonstration</u>:

Soit m et M, un minorant et un majorant de la suite.
Par définition, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [m, M]$
On va construite deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence

Avec la propriété : l'intervalle $[a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite.

* on pose $a_0 = m$ et $b_0 = M$

* on suppose a_n et b_n construits

Comme $[a_n, b_n]$ contient un nombre infini de termes de la suite, alors, l'un des intervalles

$$\left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right] \text{ ou } \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$$

contient également une infinité de termes de la suite.

Dans le premier cas, on pose :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} \end{cases}$$

sinon

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$$

* $\forall n,\quad a_n \leq b_n$

* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante :

en effet : $a_{n+1} - a_n = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{a_n+b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} \geq 0 \end{cases}$

donc dans tous les cas :
$a_{n+1} \geq a_n$

* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

* $\forall n \in \mathbb{N}\quad |a_n - b_n| = \dfrac{|m-M|}{2^n}$

En effet, vrai en $n = 0$

$$|a_{n+1} - b_{n+1}| = \begin{cases} \left|a_n - \dfrac{a_n+b_n}{2}\right| = \dfrac{|a_n - b_n|}{2} \\ \left|b_n - \dfrac{a_n+b_n}{2}\right| = \dfrac{|a_n-b_n|}{2} \end{cases}$$

donc : $|a_{n+1} - b_{n+1}| = \frac{1}{2} \times \frac{|m-M|}{2^n}$

$$= \frac{|m-M|}{2^{n+1}}$$

en particulier $a_n - b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

car $2^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

* $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant b_n \leqslant b_0$
donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée

$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_0 \leqslant a_n \leqslant b_n$
donc $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée

D'après le théorème de la limite monotone, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, et elles convergent vers la même limite λ car
$a_n - b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Montrons que λ est une valeur d'adhérence
On va construire une extraction par récurrence.

On pose $\phi(0) = 0$ et on suppose $\phi(n)$ construit

$\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $k > \phi(n)$ et $u_k \in I_{n+1}$
car I_{n+1} contient un nombre infini de termes de la suite.

On pose : $\phi(n+1) = k$

Par construction, $\phi(n+1) > \phi(n)$
donc ϕ est une extraction.

Par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{\phi(n)} \in I_n$,
donc $a_n \leqslant u_{\phi(n)} \leqslant b_n$

et le théorème de l'encadrement assure que :

$$u_{\phi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda \quad \blacksquare$$

III - Suites de Cauchy

* Une suite u_n est dite de Cauchy si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geqslant N, |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon$

Autrement dit, assez loin dans la suite, tous les termes de la suite sont très proches les uns des autres

* Toute suite convergente est de Cauchy

Démonstration :

Soit λ la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la propriété de convergence :

$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N \quad |u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon/2$

Soit $p, q \in \mathbb{N}$, alors :

$$|u_p - u_q| = |u_p - \lambda - (u_q - \lambda)| \leqslant |u_p - \lambda| + |u_q - \lambda| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

car p et $q \geqslant N$

donc la suite est de Cauchy

* **Théorème :**

$\mathbb{R}$ est complet, c'est à dire toute suite de Cauchy est convergente.

__Démonstration :__

Pour $\varepsilon = 1$, $\exists N_0 \in \mathbb{N} \mid \forall p, q \geq N_0$,

$|u_p - u_q| \leq 1$ donc $|u_p| - |u_q| \leq 1$

En particulier, $\forall p \geq N_0$, $|u_p| \leq 1 + |u_{N_0}|$

Considérons $M = \max\left(\max\limits_{k=0 \dots N_0-1} |u_k|, 1 + |u_{N_0}|\right)$

Il est clair que $\forall p \in \mathbb{N}$, $|u_p| \leq M$.
Donc la suite est bornée.

D'après le théorème de Bolzano - Weierstrass, il existe au moins une valeur d'adhérence λ.
On va montrer que c'est en fait la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Par définition, il existe une extraction $n \longmapsto \phi(n)$, telle que $u_{\phi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda$

Soit $\varepsilon > 0$.

$\exists N_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N_1$, $|u_{\phi(n)} - \lambda| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}$, $\forall p, q \geq N_2$ $|u_p - u_q| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Posons $N_3 = \max(N_1, N_2)$

Soit $n \geq N_3$.

$$|u_n - \lambda| = |u_n - u_{\phi(N_3)} + u_{\phi(N_3)} - \lambda|$$
$$\leq |u_n - u_{\phi(N_3)}| + |u_{\phi(N_3)} - \lambda|$$

on a : $N_3 \geq N_1$ donc $|u_{\phi(N_3)} - \lambda| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Par ailleurs, $n \geq N_3 \geq N_2$ et $\phi(N_3) \geq N_3 \geq N_2$

donc $|u_n - u_{\phi(N_3)}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ∎

on peut avoir $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
sans que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

exemple : $u_n = \sqrt{n}$

IV - Equivalence de suites

* Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites
On dit que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont équivalentes lorsque :

$$a_n - b_n = o(a_n)$$

Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, il est équivalent de demander que :

$$\frac{b_n}{a_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

On notera $(a_n) \sim (b_n)$

__Exemple :__

$$n + 34 \sim n$$

$$\frac{n^2 + e^n}{n \ln n + \sqrt{n}} \sim \frac{e^n}{n \ln n}$$

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \quad \text{(équivalent de Stirling)}$$

⚠

- rien ne peut être équivalent à 0.

$$\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{mais} \quad \frac{1}{n} \not\sim 0$$

- on ne peut pas ajouter les équivalents

$$n+1 \sim n \qquad -n+1 \sim -n+3$$

$$\Downarrow$$

$$2 \not\sim 3$$

- on ne peut pas composer les équivalents

$$n+1 \sim n \not\Rightarrow e^{n+1} \sim e^{n}$$

$$\text{car} \quad \frac{e^{n+1}}{e^{n}} = e \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 1$$

* Si $a_n \sim b_n$ et $c_n \sim d_n$ alors
$a_n c_n \sim b_n d_n$

Théorie de l'intégration

au sens de Riemann

Pour donner un sens à $\int_a^b f$

I - Intégration des fonctions constantes par morceaux

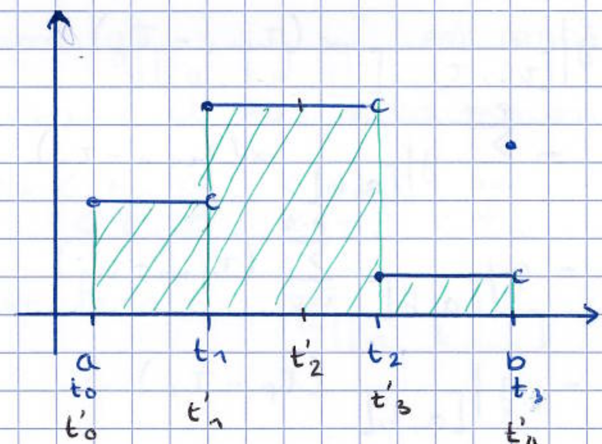
* Soit I un intervalle compact $[a, b] = I$
Une subdivision de I est la donnée d'un $N+1$ uplet $(t_0, t_1, \dots, t_N)$ telle que : $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = b$

$$\underset{t_0}{a} \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad \dots \quad t_{N-1} \quad \underset{t_N}{b}$$

Il y a N sous intervalles

Une fonction $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite constante par morceaux lorsqu'il existe une subdivision $(t_0, t_1, \dots, t_N)$ dite adaptée à g, c'est à dire :

$$\forall i, \ 0 \leq i \leq N-1 \quad g_i = g_{|[t_i, t_{i+1}[} \text{ est constante}$$



les subdivisions $\begin{cases} (t_0, t_1, t_2, t_3) \\ \text{et} \\ (t'_0, t'_1, t'_2, t'_3, t'_4) \end{cases}$

sont toutes deux adaptées à g

* L'intégrale de g, notée $\int_a^b g$
est définie par

$$\int_a^b g = \sum_{i=0}^{N-1} g_i \times (t_{i+1} - t_i)$$

* La quantité

$$\sum_{i=0}^{N-1} g_i \, (t_{i+1} - t_i)$$

ne dépend pas de la subdivision

<u>Démonstration :</u> par récurrence sur N

S'il existe une subdivision adaptée à g avec $N = 1$, alors la fonction est constante sur $[a, b[$.

Considérons une autre subdivision adaptée à g :

$$\tau_0 = a < \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \dots < \tau_p = b$$

$$\sum_{i=0}^{p-1} g|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[} \times (\tau_{i+1} - \tau_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{p-1} g|_{[a,b[} \times (\tau_{i+1} - \tau_i)$$

$$= g|_{[a,b[} \sum_{i=0}^{p-1} (\tau_{i+1} - \tau_i)$$

$$= g|_{[a,b[} \, (\tau_p - \tau_0)$$

$$= g|_{[a,b[} \times (b - a)$$

$$= \int_a^b g \quad \text{car} \quad N = 1$$

Hérédité :

Supposons la propriété vraie pour $N - 1$

Soit g une fonction constante par morceaux et

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

une subdivision adaptée à g

Soit $a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_p = b$

une autre subdivision adaptée à g.

Il existe $i_0 \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ tel que :

$$\tau_{i_0} \leqslant \tau_{N-1} < \tau_{i_0+1}$$

La fonction $g|_{[a, t_{N-1}]}$ est constante par morceaux et les subdivisions

$$t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1}$$
et $$\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{i_0} < t_{N-1}$$

sont adaptées à $g|_{[a, t_{N-1}]}$

$g|_{[t_{N-1}, t_N]}$ est constante par morceaux et les subdivisions :

$$t_{N-1} < t_N$$
$$t_{N-1} < \tau_{i_0+1} < \dots < \tau_{p-1} < \tau_p = t_N = b$$

sont adaptées à $g|_{[t_{N-1}, t_N]}$

$$\sum_{i=0}^{N-1} g|_{[t_i, t_{i+1}[}(t_{i+1} - t_1)$$
$$= \underbrace{\sum_{i=0}^{N-2} g|_{[t_i, t_{i+1}[}}_{\text{hypothèse de récurrence}} + g|_{[t_i, t_{i+1}[}(t_N - t_{N-1})$$
$$= \left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=0}^{i_0-1} g|_{[\tau_i, \tau_{i+1}} \times (\tau_{i+1} - \tau_i) \\ + \underbrace{g|_{[\tau_{i_0}, t_{N-1}[}(t_{N-1} - \tau_{i_0})}_{} \end{array}\right\}$$
$$+ \overbrace{g|_{[t_{N-1}, \tau_{i_0+1}[}(\tau_{i_0+1} - t_{N-1})}$$
$$+ \sum_{i=i_0+1}^{p-1} g|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[}(\tau_{i+1} - \tau_i)$$

on remarque que $g|_{[t_{N-1}, \tau_{i_0+1}[} = g|_{[\tau_{i_0}, t_{N-1}[}$

car $g|_{[\tau_{i_0}, \tau_{i_0+1}[}$ est constante.

Après simplification dans le terme vert, il reste :

$$g|_{[\tau_{i_0}, \tau_{i_0+1}[} \times (\tau_{i_0+1} - \tau_{i_0})$$

Après simplification, on obtient

$$= \sum_{i=0}^{p-1} g|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[}(\tau_{i+1} - \tau_i)$$

Ce qui est la propriété au rang N. ■

* Soit f et g deux fonctions constantes par morceaux sur $[a, b]$ et α un réel.
Alors :

$\alpha f + g$ est une fonction constante par morceaux

$$\int_a^b \alpha f + g = \alpha \int_a^b f + \int_a^b g$$

Démonstration :

Considérons deux subdivisions :

$t_0 < t_1 < \dots < t_N$ une subdivision adaptée à f

$\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_p$ une subdivision adaptée à g.

En superposant, on obtient une subdivision

$T_0 < T_1 < \dots < T_M$ adaptée à la fois à f et à g.

En particulier, la fonction $\alpha f + g$ est constante par morceaux.

Par définition :

$$\int_a^b \alpha f + g = \sum_{i=0}^{M-1} (\alpha f + g)|_{[T_i, T_{i+1}[} \times (T_{i+1} - T_i)$$

comme T_0 est adapté à f et à g,
on peut écrire :

$$\int_a^b \alpha f + g = \alpha \sum_{i=0}^{M-1} f_{|[T_i, T_{i+1}[}(T_{i+1} - T_i)$$

$$- \sum_{i=0}^{M-1} g_{|[T_i, T_{i+1}[}(T_{i+1} - T_i)$$

$$= \alpha \int_a^b f + \int_a^b g \quad \blacksquare$$

II – Fonctions Riemann-intégrables

Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$
Considérons

$$\mathcal{C}^+(f) = \{ \phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ constante par morceaux telle que } f \leq \phi$$
$$\text{i.e. } \forall x \in [a,b] \ f(x) \leq \phi(x) \}$$

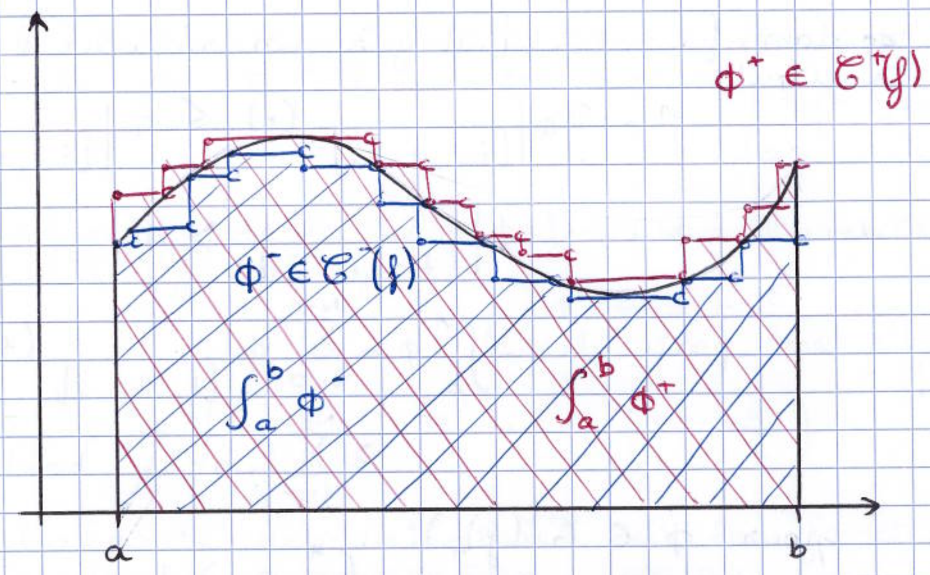
$$\mathcal{C}^-(f) = \{ \phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ constante par morceaux telle que } f \geq \phi \}$$

* La fonction f est dite Riemann-intégrable si et seulement si :

- * $\mathcal{C}^+(f)$ et $\mathcal{C}^-(f)$ sont non-vides
- * $\sup\limits_{\phi \in \mathcal{C}^-(f)} \int_a^b \phi = \inf\limits_{\phi \in \mathcal{C}^+(f)} \int_a^b \phi$

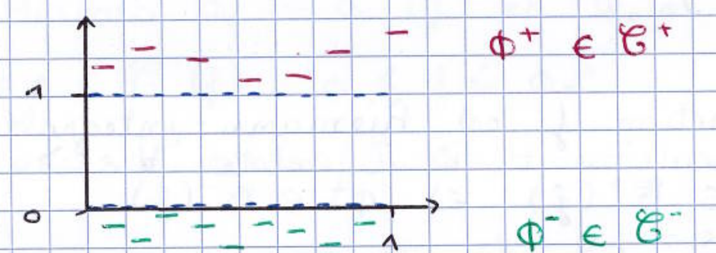
Cette valeur commune est appelée intégrale de f sur $[a, b]$ et est notée

$$\int_a^b f$$



Exemples de fonctions non Riemann intégrables :

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : [0,1] \longrightarrow \{0, 1\} \quad \begin{cases} \text{si } x \in \mathbb{Q} : \\ \quad \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = 1 \\ \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \quad \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = 0 \end{cases}$$



Cette fonction n'est pas Riemann-intégrable

si $\phi \in \mathcal{C}^+(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}})$, considérons une subdivision adaptée à ϕ $\quad 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$
par définition : $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \leq \phi$ car $\phi \in \mathcal{C}^+(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}})$

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}|[t_i, t_{i+1}[} \leq \underbrace{\phi_{|[t_i, t_{i+1}[}}_{\text{constante}}$$

or dans $[t_i, t_{i+1}[$ il y a un rationnel r donc :

$$1 = 1\!\!1_{\mathbb{Q}}\big|_{[t_i, t_{i+1}[}(r) \leq \phi\big|_{[t_i, t_{i+1}[}$$

donc pour i, $\phi\big|_{[t_i, t_{i+1}[} \geq 1$

en particulier $\int_0^1 \phi = \sum_{i=0}^{N-1} \phi\big|_{[t_i, t_{i+1}[}(t_{i+1} - t_i)$

$$\geq \sum_{i=0}^{N-1} t_{i+1} - t_i = t_N - t_0 = 1$$

pour $\phi \in \mathcal{E}^+(1\!\!1_{\mathbb{Q}})$ $\int_b^a \phi \geq 1$

De même pour $\phi \in \mathcal{E}^-(1\!\!1_{\mathbb{Q}})$, $\int_a^b \phi \leq 0$

donc $\int_b^a 1\!\!1_{\mathbb{Q}}$ n'a aucun sens (pour le moment)

* Une fonction f est Riemann-intégrable si et seulement si il existe $\forall \varepsilon > 0$ $\phi^+ \in \mathcal{E}^+(f)$ et $\phi^- \in \mathcal{E}^-(f)$ tels que : $\int_a^b \phi^+ - \phi^- \leq \varepsilon$

Démonstration :

Supposons f Riemann-intégrable et considérons $\alpha = \int_a^b f = \sup_{\phi \in \mathcal{E}^-(f)} \int_a^b \phi$

$$= \inf_{\phi \in \mathcal{E}^+(f)} \int_a^b \phi$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, il existe $\phi^- \in \mathcal{E}^-(f)$ tel que : $\int_a^b \phi^- \geq \alpha - \frac{\varepsilon}{2}$

Par définition de la borne inférieure, il existe $\phi^+ \in \mathcal{E}^+(f)$ tel que : $\int_a^b \phi^+ \leq \alpha - \frac{\varepsilon}{2}$

$$\int_a^b \phi^+ - \int_a^b \phi^- = \alpha + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Par linéarité des intégrales sur les fonctions constantes par morceaux, on a :

$$\int_a^b \phi^+ - \phi^- \leq \varepsilon$$

Réciproquement, on remarque que $\mathcal{E}^+(f)$ et $\mathcal{E}^-(f)$ sont non-vides.
Considérons $\phi_0^+ \in \mathcal{E}^+(f)$ et $\phi_0^- \in \mathcal{E}^-(f)$

$\forall \phi \in \mathcal{E}^-(f)$ $\phi \leq f \leq \phi_0^+$

donc $\int_a^b \phi \leq \int_a^b \phi_0^+$

ainsi l'ensemble $\left\{ \int_a^b \phi \,/\, \phi \in \mathcal{E}^-(f) \right\}$

est majoré et non vide.

Soit $B = \sup \left\{ \int_a^b \phi \,/\, \phi \in \mathcal{E}^-(f) \right\}$

$\forall \phi \in \mathcal{E}^+(f)$, $\phi_0^- \leq f \leq \phi$

donc $\int_a^b \phi_0^- \leq \int_a^b \phi$

donc $\left\{ \int_a^b \phi \,/\, \phi \in \mathcal{E}^+(f) \right\}$ est minoré

Soit b sa borne inférieure.

Par définition, on a :

$\forall \phi^+ \in \mathcal{E}^+(f),\ \phi^- \in \mathcal{E}^-(f)$

$$\int_a^b \phi^+ - \int_a^b \phi^- \geq B - b$$

donc la propriété oblige $B = b$

donc $\sup_{\phi \in \mathcal{E}^-} \int_a^b \phi = \inf_{\phi \in \mathcal{E}^+} \int_a^b \phi$

Ce qui signifie que f est Riemann-intégrable ■

* L'intégrale de Riemann est :
  * positive, i.e : $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$
  * linéaire $\int_a^b \alpha f + g = \alpha \int_a^b f + \int_a^b g$

Démonstration :

* Si $f \geq 0$ sur $[a,b]$ on considère

$\alpha = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$. On a $\alpha \geq 0$

La fonction constante égale à α appartient à $\mathcal{E}^-(f)$ car $\alpha \leq f(x)$ $\forall x \in [a,b]$ donc :

$$\int_a^b \alpha \leq \int_a^b f \Rightarrow \alpha(b-a) \leq \int_a^b f \text{ donc } \int_a^b f \geq 0$$

* Montrons que $\alpha f + g$ est Riemann-intégrable

Si $\alpha = 0$, c'est évident.

Supposons $\alpha \neq 0$ et $\alpha > 0$

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists\, \phi_1^+, \phi_1^-, \phi_2^+, \phi_2^-$ tel que $\phi_1^\pm \in \mathcal{E}^\pm(f)$ et $\phi_2^\pm \in \mathcal{E}^\pm(f)$ tel que :

$$\int_a^b \phi_1^+ - \phi_1^- \leq \frac{\varepsilon}{2\alpha}$$

et $$\int_a^b \phi_2^+ - \phi_2^- \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\alpha \phi_1^+ + \phi_2^+ \in \mathcal{E}^+(\alpha f + g)$$

car $\alpha \phi_1^+ + \phi_2^+$ est constante par morceaux et :

$\alpha \phi_1^+ + \phi_2^+ \geq \alpha f + g$ car $\phi_1^+ \geq f$, $\phi_2^+ \geq g$ et $\alpha > 0$

de même $\alpha \phi_1^- + \phi_2^- \in \mathcal{E}^-(f)$

et $$\int_a^b \alpha \phi_1^+ + \phi_2^+ - \left(\alpha \phi_1^- + \phi_2^-\right)$$

$$= \alpha \int_a^b \phi_1^+ - \phi_1^- + \int_a^b \phi_2^+ - \phi_2^-$$

$$\leq \alpha \frac{\varepsilon}{2\alpha} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donc $\alpha f + g$ est Riemann-intégrable

* Lemme

Si f est Riemann-intégrable alors $-f$ l'est également et

$$\int_a^b -f = -\int_a^b f$$

<u>Démonstration du lemme</u>

La preuve repose sur les remarques suivantes

$$\{-\phi^+ \mid \phi^+ \in \mathcal{E}^+(f)\} = \mathcal{E}^-(-f)$$

car $f \leq \phi^+ \Longleftrightarrow -\phi^+ \leq -f$

$$\{-\phi^- \mid \phi^- \in \mathcal{E}^-(f)\} = \mathcal{E}^+(-f)$$

Par ailleurs, $$-\sup_{\phi^- \in \mathcal{E}^-(f)} \int_a^b \phi^- = \inf_{\phi^- \in \mathcal{E}^-(f)} \int_a^b -\phi^-$$

$$= \inf_{\phi^+ \in \mathcal{E}^+(-f)} \int_a^b \phi^+$$

$\|$ *

$$-\inf_{\phi^+ \in \mathcal{E}^+(f)} \int_a^b \phi^+ = \sup_{\phi^+ \in \mathcal{E}^+(f)} \int_a^b -\phi^+$$

$$= \sup_{\phi^- \in \mathcal{E}^-(-f)} \int_a^b \phi^-$$

**

Si f est Riemann-intégrable, alors l'égalité * est vérifiée. Et donc l'égalité ** aussi, c'est à dire $-f$ est Riemann-intégrable.

En lisant les égalités, on a immédiatement :

$$\int_a^b -f = -\int_a^b f$$

Ce qui prouve que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha f + g$ est Riemann-intégrable. ■

Montrons que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b \alpha f + g = \alpha \int_a^b f + \int_a^b g$$

Considérons d'abord $\alpha \geq 0$

- Soit $\phi_1^- \in \mathcal{E}^-(f)$ et $\phi_2^- \in \mathcal{E}^-(g)$.

Comme $\alpha \geq 0$, $\alpha\phi_1^- + \phi_2^- \in \mathcal{E}^-(\alpha f + g)$

donc par définition : $\int_a^b \alpha\phi_1^- + \phi_2^- \leq \int_a^b \alpha f + g$

Comme $\int$ est un opérateur linéaire sur les fonctions constantes par morceaux, on a :

$$\alpha \int_a^b \phi_1^- + \int_a^b \phi_2^- \leq \int_a^b \alpha f + g$$

En passant à la borne supérieure, on obtient

$$\alpha \sup_{\phi_1^- \in \mathcal{E}^-(f)} \int_a^b \phi_1^- + \sup_{\phi_2^- \in \mathcal{E}^-(g)} \int_a^b \phi_2^- \leq \int_a^b \alpha f + g$$

$$\alpha \int_a^b f + \int_a^b g \leq \int_a^b \alpha f + g$$

- Soit ϕ_1^+ et $\phi_2^+ \in \mathcal{E}^+(f)$ et $\mathcal{E}^+(g)$ alors $\alpha\phi_1^+ + \phi_2^+ \in \mathcal{E}^+(\alpha f + g)$

donc $\int_a^b \alpha f + g \leq \int_a^b \alpha\phi_1^+ + \phi_2^+ = \alpha \int_a^b \phi_1^+ + \int_a^b \phi_2^+$

en passant à la borne inférieure,

on obtient

$$\int_a^b \alpha f + g \leqslant \alpha \int_a^b f + \int_a^b g$$

Donc finalement :

$$\int_a^b \alpha f + g = \alpha \int_a^b f + \int_a^b g \quad \blacksquare$$

* $\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|$

* Propriété dite de Chasles

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

en exercice

f constante par morceau puis f quelconque

<u>Démonstration de</u> $\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|$

Il faut montrer que si f est Riemann-intégrable, alors $|f|$ également.

Si f et g RI et $h = \max(f, g)$ alors h RI

f RI $\Rightarrow |f|$ RI $\quad f \leqslant |f|$ et $-f \leqslant |f|$

* Théorèmes

Toute fonction continue sur $[a, b]$ est Riemann-intégrable.

Démonstration :

* Lemme :

Toute fonction continue sur un intervalle compact $[a, b]$ est uniformément continue :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Démonstration du lemme :

Supposons $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x, y \in [a, b]$ tels que :

$$|x-y| \leqslant \eta \text{ et } |f(x)-f(y)| > \varepsilon$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $\eta = \frac{1}{n}$

Alors, $\exists x_n$ et $y_n \in [a, b]$ tels que

$$|x_n - y_n| \leqslant \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n)-f(y_n)| > \varepsilon$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in [a, b]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\phi(n)$ une extraction ~~de (x_n)~~ telle que $x_{\phi(n)} \longrightarrow x_\infty$ et $x_\infty \in [a, b]$

$$|y_{\phi(n)} - x_\infty| = |y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)} + x_{\phi(n)} - x_\infty|$$
$$\leqslant |y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)}| + |x_{\phi(n)} - x_\infty|$$
$$\leqslant \frac{1}{\phi(n)} + |x_{\phi(n)} - x_\infty|$$

Comme $\phi(n) \longrightarrow \infty$ et $x_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_\infty$

on a $y_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_\infty$

Or f est continue en x_∞, donc $f(x_{\phi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_\infty)$

et $f(y_{\phi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_\infty)$

donc $f(x_{\phi(n)}) - f(y_{\phi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ce qui est impossible quand on doit avoir :

$$|f(x_{\phi(n)}) - f(y_{\phi(n)})| > \varepsilon \quad \blacksquare$$

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$

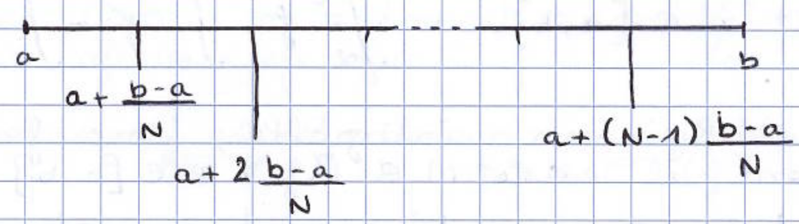
Soit $\varepsilon > 0$.

Comme f est uniformément continue,

$$\exists \eta > 0, \quad |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon/_{b-a}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{b-a}{N} = \eta$

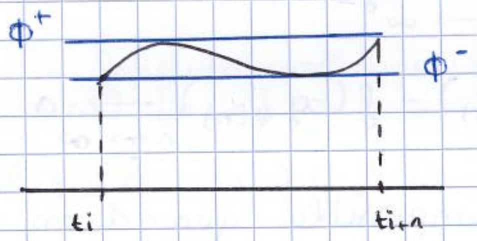
Considérons la subdivision $t_0 = a$ et $t_k = a + k\frac{b-a}{N}$, $k \in \{0, \dots, N\}$



on pose $\phi^+ = \{ x \in [t_i, t_{i+1}[, \ \phi^+(x) = \sup_{x \in [t_i, t_{i+1}[} f(x)$

$\phi^- = \{ x \in [t_i, t_{i+1}[, \ \phi^-(x) = \inf_{x \in [t_i, t_{i+1}[} f(x)$

$$\int_a^b \phi^+ - \phi^- = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\phi^+|_{[t_i, t_{i+1}[} - \phi^-|_{[t_i, t_{i+1}[} \right) (t_{i+1} - t_i)$$



$$\int_a^b \phi^+ \leqslant \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\varepsilon}{b-a} (t_{i+1} - t_i) = \frac{\varepsilon}{b-a} \times (b-a) = \varepsilon \quad \blacksquare$$

III – Propriétés de classe des intégrales de Riemann

* Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$
Alors la fonction définie par:

$$t \longmapsto \int_\alpha^t f \quad \text{où } \alpha \text{ est un réel fixé dans } [a,b]$$

est continue.

Démonstration:

Soit $x \in [a,b]$. $\quad \int_\alpha^t f - \int_t^x f = \int_x^t f$

f est Riemann-intégrable, donc f est bornée
donc il existe $M \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [a,b] \ |f(x)| \leqslant M$

$$\left| \int_\alpha^t f - \int_\alpha^x f \right| = \left| \int_x^t f \right| \leqslant \int_x^t |f| \leqslant \int_x^t M = M(t-x)$$

or $M(t-x) \xrightarrow[t \to x]{} 0$

donc $\int_\alpha^t f \xrightarrow[t = x]{} \int_\alpha^x f$.

donc $t \longmapsto \int_\alpha^t f$ est continue $\blacksquare$

* Soit f une fonction continue sur $[a,b]$
alors:
$t \longmapsto \int_\alpha^t f$ est une fonction continue et dérivable dont la dérivée est la fonction f.

* Théorème fondamental du calcul intégrable

Soit f, une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Supposons que f admette une primitive, c'est à dire une fonction F dérivable sur $[a,b]$, telle que $F' = f$

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Démonstration

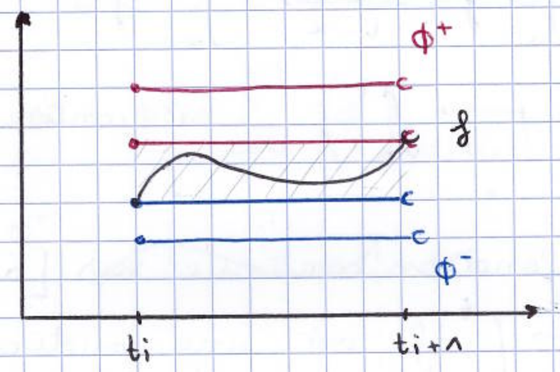
Soit $\varepsilon > 0$. On va montrer que $\left| \int_a^b f - F(b) - F(a) \right|$ est inférieur ou égal à $\frac{3}{2} \varepsilon$

Comme f est Riemann-intégrable,
$\exists \ \phi^+ \in \mathcal{E}^+(f)$ et $\phi^- \in \mathcal{E}^-(f)$

$$\phi^- \leqslant f \leqslant \phi^+ \quad \text{et} \quad \int_a^b \phi^+ - \phi^- < \varepsilon$$

Considérons une subdivision adaptée à ϕ^- et ϕ^+

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$



En modifiant comme sur le dessin ϕ^- et ϕ^+, on peut supposer que :

$$\phi^+\Big|_{[t_i, t_{i+1}[} = \sup_{[t_i, t_{i+1}[} (f) = M_i$$

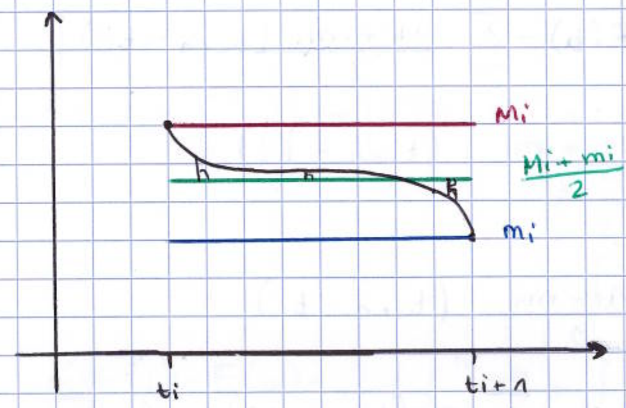
$$\phi^-\Big|_{[t_i, t_{i+1}[} = \inf_{[t_i, t_{i+1}[} (f) = m_i$$

Soit G définie sur $[t_i, t_{i+1}]$ par :

$$G(x) = F(x) - \frac{M_i + m_i}{2} x$$

$G(x)$ est continue est dérivable sur $[t_i, t_{i+1}]$ de dérivée :

$$G'(x) = F'(x) - \frac{M_i + m_i}{2}$$
$$= f(x) - \frac{M_i + m_i}{2}$$



D'après le dessin, $\left| f(x) - \frac{M_i + m_i}{2} \right| \leqslant \frac{M_i - m_i}{2}$

D'après l'inégalité des accroissements finis

$$|G(t_{i+1}) - G(t_i)| \leqslant \frac{M_i - m_i}{2} (t_{i+1} - t_i)$$

donc $\left| F(t_{i+1}) - F(t_i) - \frac{M_i - m_i}{2} (t_{i+1} - t_i) \right|$

$$\leqslant \frac{M_i - m_i}{2} (t_{i+1} - t_i) \quad , \ i = 0 \dots N-1$$

$$\Bigg| \underbrace{F(t_N) - F(t_0)}_{\substack{-F(t_{N-1}) + F(t_{N-1}) \\ -F(t_{N-2}) + F(N-2) + \dots \\ -F(t_1) + F(t_1)}} - \sum_{i=0}^{N-1} \frac{M_i + m_i}{2} (t_{i+1} - t_i) \Bigg|$$

$$= \left| \sum_{i=0}^{N-1} F(t_{i+1}) - F(t_i) - \sum_{i=0}^{N-1} \frac{M_i + m_i}{2} (t_{i+1} - t_i) \right|$$

$$= \left| \sum_{i=0}^{N-1} F(t_{i+1}) - F(t_i) - \left(\frac{M_i + m_i}{2} \right) (t_{i+1} - t_i) \right|$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{N-1} \left| F(t_{i+1}) - F(t_i) - \frac{M_i + m_i}{2} (t_{i+1} - t_i) \right|$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{N-1} \frac{M_i - m_i}{2} (t_{i+1} - t_i)$$

donc $\left| F(b) - F(a) - \sum_{i=0}^{N-1} \frac{M_i + m_i}{2}(t_{i+1} - t_i) \right|$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{N-1} \frac{M_i - m_i}{2} (t_{i+1} - t_i)$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} \frac{M_i - m_i}{2} (t_{i+1} - t_i)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} M_i (t_{i+1} - t_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} m_i (t_{i+1} - t_i)$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b \phi^+ - \frac{1}{2} \int_a^b \phi^- \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

donc $F(b) - F(a) - \frac{1}{2}\left(\int_a^b \phi^+ + \int_a^b \phi^- \right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$

Comme $\phi^- \leqslant f \leqslant \phi^+$, on a :

$$\left| \int_a^b (\phi^+ - f) \right| = \int_a^b (\phi^+ - f) \leqslant \int_a^b (\phi^+ - \phi^-) \leqslant \varepsilon$$

car $-f \leqslant -\phi^-$

$$\left| \int_a^b (\phi^- - f) \right| = \int_a^b (f - \phi^-) \leqslant \int_a^b (\phi^+ - \phi^-) \leqslant \varepsilon$$

car $f \leqslant \phi^+$

donc $\left| \int_a^b (\phi^+ - f) + \int_a^b (\phi^- - f) \right| \leqslant 2\varepsilon$

donc $\left| \frac{1}{2}\left(\int_a^b \phi^+ + \phi^- \right) - \int_a^b f \right| \leqslant \varepsilon$

Finalement,

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f \right| = \left| F(b) - F(a) - \frac{1}{2}\left(\int_a^b \phi^+ + \int_a^b \phi^- \right) + \frac{1}{2}\left(\int_a^b \phi^+ + \int_a^b \phi^- \right) - \int_a^b f \right|$$

$$\leqslant \left| F(b) - F(a) - \frac{1}{2}\left(\int_a^b \phi^+ + \int_a^b \phi^- \right) \right| + \left| \frac{1}{2}\left(\int_a^b \phi^+ + \int_a^b \phi^- \right) - \int_a^b f \right|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon$$

$$\leqslant \frac{3}{2} \varepsilon$$

■

Introduction à la théorie des séries

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \ln 2$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

* Une série numérique est une suite S_n de la forme $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

* La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée terme général de la série

* La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée suite des sommes partielles ou série de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lorsque la suite S_n converge, on dit que la série converge. Sa limite est appelée somme de la série.

$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$ on notera $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lambda$

* Si la série des $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Démonstration :

Si $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$

alors $S_{n+1} - S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda - \lambda = 0$

et $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Remarque : On utilisera parfois la contraposée de ce résultat.

La réciproque est archifausse ! En effet :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

I - Étude des séries à termes positifs

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \qquad \text{avec} \quad u_k \geq 0$$

On étudie d'abord ces séries là car

$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Sa convergence est donc équivalente au fait qu'elle est majorée.

* La série $\sum_{k=0}^{n} x^k$ où x est un réel fixé converge si et seulement si $|x| < 1$

La somme de la série est alors $\frac{1}{1+x}$

Démonstration :

On remarque que pour $x = 1$ la série diverge.

Si $x \neq 1$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Si $|x| < 1$ alors $x^{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{1-x}$

Si $|x| \geqslant 1$, alors $x^k \not\xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

donc S_n diverge

■

* Si $0 \leq u_n \leq v_n$ et si la série des (v_n) converge, alors la série des (u_n) également.

Démonstration.

Comme $\forall k \in \mathbb{N}, u_k \leq v_k$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} v_k}$$

existe car par hypothèse la série de v_k converge.

Donc la suite des sommes partielles.

$\sum_{k=0}^{n} u_k$ est majorée.

Comme elle est croissante, elle converge.

Exemples : $\sum \frac{1}{(n+1)4^n}$ est convergente car :

$\frac{1}{(n+1)4^n} \leq \frac{1}{4^n}$ sa série $\sum_{k=0}^{n} x^k$ avec $n = \frac{1}{4} < 1$

donc la série $\sum \frac{1}{4^n}$ converge,

donc $\sum \frac{1}{(n+1)4^n}$ converge également

* Si u_n et v_n (qui sont positifs) sont équivalentes, $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$

alors $\sum u_n$ converge $\Longleftrightarrow$ $\sum v_n$ converge

Démonstration :

Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$ alors $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant N$

$|u_n| \leqslant 2|v_n|$

Comme u_n et v_n sont positives :

$u_n \leq 2 v_n$ pour $n \geqslant N$

Si $\sum v_n$ est convergente alors la série $\sum 2v_n$ est convergente donc d'après la propriété précédente, la série $\sum u_n$ est convergente

■

Remarque : Dans la propriété page 50, il suffit que l'inégalité $0 \leq u_n \leq v_n$ soit vraie à partir d'un certain rang N

$n \geq N$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{n} v_k$$

$$\leq \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{+\infty} v_k}_{}$$

majore les sommes partielles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

* On considère la série dite de Riemann :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

La série de Riemann converge si et seulement si $x > 1$

Démonstration :

+ Si $x \leq 0$ alors $\frac{1}{k^x} \underset{k\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$

la série ne converge pas.

+ Si $x = 1$ la série obtenue est la série harmonique

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \quad \text{c'est une série divergente}$$

+ Si $x \in]0,1[$ alors $k^x \leq k$ donc

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{k^x}$$

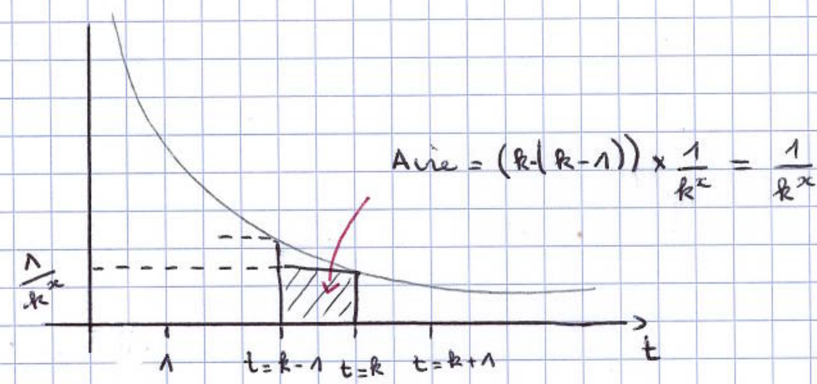
donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}$

or $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$

donc $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^x} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$

+ Si $x > 1$ technique comparaison série / intégrale

$t \longrightarrow 1/t^x$



$$\frac{1}{k^x} \leq \text{Aire sous la courbe entre } k-1 \text{ et } k = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^x}\,dt$$

pour $k \geq 2$

$$\frac{1}{k^x} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^x}\,dt$$

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^x} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^x} \leq 1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{N} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^x}\,dt}_{\text{Chasles}}$$

$$\leq 1 + \int_{1}^{N} \frac{dt}{t^x} = 1 + \left[\frac{1}{1-x}\,\frac{1}{t^{x-1}}\right]_{t=1}^{N}$$

$$= 1 + \frac{1}{(1-x)N^{(x-1)}} - \frac{1}{1-x}$$

Comme $x > 1$:

$$\frac{1}{N^{x-1}} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$$

donc $1 + \frac{1}{(1-x)N^{x-1}} - \frac{1}{1-x}$ est une suite convergente donc majorée

donc $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^x}$ est majorée et donc convergente

■