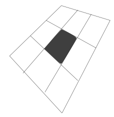
Enoncé des sujets de projets de Mathématiques 2019-2020

N°	Enoncé
1	Dans un trapèze $ABCD$ où AB est parallèle à CD, on considère un point K de CD. Quel est le point M de AB tel que l'aire du quadrilatère intersection des triangles MCD et KAB soit maximale ?
2	Peut-on obtenir un triangle équilatéral par section plane d'un tétraèdre quelconque ?
3	On considère deux cercles tangents en O. Soient A et B deux points contenus dans chacun des cercles. Quel est l'aire maximale du triangle AOB ?
4	Existe-t-il une fonction de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ayant la propriété suivante : pour tout $a,\ b$ avec $a < b$, on a $$f\left(]a, b[\right) = \mathbb{R}.$$
5	Tracer une droite qui coupe en deux moitiés égales l'aire et le périmètre d'un triangle.
6	On considère un tétraèdre dont toutes les faces ont la même aire. Montrer que toutes les faces sont identiques.
7	On considère le tétraèdre suivant $$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle\| 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x,\ 0 \leq z \leq 1 - x - y \right\}$$ Le dessiner. Montrer que son volume est $\frac{1}{6}$. Est-il possible d'en mettre 6 dans un cube de côté 1 ?
8	Dans un tétraèdre, on choisit un point par côté. Il en résulte quatre tétraèdres, un issu de chaque sommet et formé avec les points choisis dans les côtés adjacents. Montrer que l'un de ces tétraèdres à un volume inférieur à $\frac{1}{8}$ du volume du tétraèdre initial.
9	Soit f une fonction continue et dérivable. Sa dérivée peut-elle être discontinue en tout point ?
10	On considère un cône infini contenu dans le demi-espace supérieur. Peut-on y inscrire un cube de telle façon que 7 sommets du cube soient sur la surface du cône ?
11	On découpe un grand rectangle en petits rectangles donc les côtés sont parallèles aux côtés du grand. On suppose que pour chaque petit rectangle, un des côtés est de longueur un nombre entier. Montrer que c'est aussi le cas pour le grand.
12	Construire une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ surjective. Est-ce qu'elle peut-être continue ? Bijective ? Bijective et continue ?
13	On considère deux demi-droites d_1 et d_2 issues d'un point A. On joue au billard dans l'angle qu'elles forment. Est-il possible de jouer un coup avec une infinitié de bandes sans que la boule parte à l'infini ?
14	Sur une sphère de rayon R, on place n points distants deux à deux d'au moins 1. Quel est la valeur maximale de n ?
15	On se déplace à la surface d'un cube. Quel est le point le plus éloigné du milieu d'une arête ?

N°	Enoncé
16	Dans un quadrilatère convexe, on partage chaque côté en 3. Exprimer l'aire du quadrilatère central en fonction du quadrilatère de départ. Et si on découpe en 5 ? En 7 ? En 9 ? 
17	Deux joueurs jouent aux carte. Ils jouent à la bataille classique. Est-ce qu'une partie peut durer indéfiniment ?
18	Pour x dans $\mathbb{R}$, on note $d(x,\mathbb{Z})$ la distance entre x et l'entier le plus proche de x. Calculer $d(x,\mathbb{Z})$ en utilisant la fonction partie entière. On considère la fonction $$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{d(2^n x,\mathbb{Z})}{2^n}.$$ Dessiner le graphe de f_N pour plusieurs valeur de N. Quels sont les points où la fonction f_∞ est dérivable ?
19	Soit P un parallépipède rectangle. Peut-on découper P en un nombre fini de pièces de façon à recomposer un cube ? *En dehors éventuellement d'un couteau, on aura le droit de n'utiliser que la règle et le compas.*
20	Un ensemble de points du plan est dit intégral si et seulement si la distances entre deux quelconques des points de cet ensemble est un nombre entier. Quels sont les ensembles intégraux infinis ?
21	Soit k un nombre entier strictement positif. Etudier les suites définies par: u_0 est un nombre entier quelconque et u_{n+1} est la somme des puissances k-ième des chiffres de u_n.
22	On considère un quadrilatère de l'espace tangent à une sphère. Montrer que les points de tangence sont coplanaires.
23	Un cercle est inscrit sur la face d'un cube. Un autre est circonscrit à une face voisine. Quelle est la plus petite distance entre deux points de ces cercles ?
24	Dans un plan $\mathcal{P}$ de l'espace on considère un point P. Soit par ailleurs un point Q en dehors de $\mathcal{P}$. Trouver l'ensemble des points R de $\mathcal{P}$ tels que le quotient $$\frac{QP+PR}{QR}$$ soit maximal.
25	Etudier l'application définie de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par $$\phi(x,y) = (y, \lvert y\rvert - x)$$ et ses itérées.

N°	Enoncé
26	Déterminer toutes les fonctions continues g de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans lui-même telles que $$g(x) + g(y) + g(z) = \pi \quad \text{dès que } x + y + z = \frac{\pi}{2}.$$ En déduire toutes les fonctions continues f de $]0, \infty[$ dans lui même telles que $$f(a) + f(b) + f(c) = f(a) f(b) f(c)$$ dès que $ab + bc + ac = 1$.
27	Peut-on obtenir un pentagone régulier par section plane d'un cube ?
28	On colorie tous les points du plan avec trois couleurs. Existe-t-il deux points de la même couleur à distance 1 ? On utilise maintenant 7 couleurs. Même question...
29	Existe-t-il une fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ telle que pour tout n $$f(f(n)) = n + p$$ où p est un nombre impair fixé ?
30	Montrer qu'il existe une puissance 2 dont l'écriture décimale démarre par au moins 777 chiffres 7. Estimer le nombre de chiffre de cette puissance de 2.
31	On définit une suite de triangles de la façon suivante: T_0 est un triangle quelconque d'aire 1. Pour construire T_{n+1} à partir de T_n, on considère d'abord le triangle dont les sommets sont les images des sommets de T_n par la réflexion d'axe le côté opposé au sommet. Puis on considère le triangle semblable au triangle obtenu mais d'aire 1. Le triangle obtenu est T_{n+1}. Etudier la suite T_n.
32	On considère deux segments disjoints du plan porté par deux droites non parallèles dont on est incapable de dessiner le point d'intersection, dit *invisible*. Soit P un point en dehors des deux segments. Dessiner à la règle et au compas la droite passant par P et le point *invisible* d'intersections.
33	Montrer que dans tout ensemble de $2n - 1$ entiers, on peut en choisir n dont la somme est divisible par n.
34	On considère un tétraèdre dont au plus un côté est de longueur plus grande que 1. Quel est le périmètre maximal ?
35	On dessine un carré dans un autre carré. Montrer qu'il existe un unique point dans le petit qui représente le même endroit si les deux carrés étaient des cartes du même pays à différentes échelles. Construire ce point à la règle et au compas.
36	Soit n un nombre. On considère $\mathcal{L}(n)$ le nombre obtenu en rangeant dans l'ordre croissant les chiffres de n et $l(n)$ le nombre obtenu en rangeant les chiffres de n dans l'ordre décroissant. Puis on considère la suite définie par u_0 est un nombre quelconque à quatre chiffres et $u_{n+1} = l(u_n) - \mathcal{L}(u_n)$. Etudier cette suite.
37	Le polynôme $n^2 + n + 41$ produit beaucoup de nombres premiers. N'est-ce pas ? Existe-t-il un polynôme non constant P tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P(k)$ est un nombre premier ? *Dans cette question, on considèrera que* 1 *et* -1 *sont des nombres premiers.*
38	Montrer que tout nombre rationnel peut s'écrire comme une somme d'un nombre fini d'éléments deux à deux distincts choisis dans l'ensemble $\left\{ \frac{1}{n} \middle\| n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

N°	Enoncé
39	Peut-on remplir $\mathbb{R}^2$ avec des cercles de rayons strictement positifs et disjoints ? Peut-on remplir $\mathbb{R}^3$ avec des cercles de rayons strictement positifs et disjoints ? Peut-on remplir $\mathbb{R}^3$ avec des sphères de rayons strictement positifs et disjointes ?
40	Existe-t-il un ensemble fini A de points du plan contenant au moins trois points tel que trois points de A ne sont jamais alignés et tel que le centre de tout cercle passant par au moins trois points de A est dans A ?
41	On écrit tous les entiers de 1 à N. Quel est plus petit entier N tel que l'on ait utilisé exactement N fois le chiffre 1 pour le faire ?
42	Quels sont les entiers k tels que la propriété “ être divisible par k “ ne dépend que des N derniers chiffres d'un nombre ?
43	Une suite est dite *jolie* si elle ne prend que des valeurs entières et si hormis ses deux premiers termes, chacun de ses termes est la somme des deux précédents. Montrer que $\mathbb{N}^*$ peut être recouvert par une famille infinie de jolies suites n'ayant deux à deux aucun terme en commun.
44	Déterminer un polynôme à coefficients entiers qui annule $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.
45	On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $$g\left(t\right)=\begin{cases} 1-e^{2i\pi\frac{t}{t+1}} & \text{si } t\geq 0 \\ -1+e^{2i\pi\frac{t}{t+1}} & \text{si } t\leq 0 \end{cases}$$ Dessiner l'image de g. Montrer que g est une bijection continue sur son image. La réciproque est-elle continue ?
46	On considère les six trisectrices d'un triangle. Soit A, B et C les trois points d'intersections de ces trisectrices qui sont les plus proches de chaque côté du triangle. Que peut-on dire du triangle ABC ?