IUT Toulouse Midi-Pyrénées — Génie Mécanique et Productique, Techniques Aerospatiales — Université Toulouse III

TD1-S3 : Fonctions de plusieurs variables.

Dérivées partielles, surfaces.

Exercice 1. *Dérivées partielles d'ordre 1.*

(1) Pour la fonction $f(x,y) = x^2y^2 + \sin(2xy)$, calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
(2) Vérifier que la fonction $g(x,y) = x^3y + 4x^2y^2 - y^4$ satisfait l'équation

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} = 4g.$$

Exercice 2. *Dérivées partielles d'ordre 2.*

Montrer que pour $h(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$, on a

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

Exercice 3. *Règle de la chaîne.*

Soit g une fonction de 3 variables. On note

$$f(x,y,z) = g(x-y, y-z, z-x).$$

Montrer que

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Exercice 4. *Gradient.*

Soit S la surface déterminée par l'équation

$$f(x,y,z) = 2xyz + x^2 + y^2 + z^2 = 5.$$

Déterminer le gradient de f en tout point. En déduire une équation du plan tangent à S en $(1,1,1)$.

Exercice 5. *Surface, gradient et plan tangent.*

Soit S la surface représentative de la fonction

$$f(x,y) = x^2 + \cos(y).$$

(1) Déterminer les points d'intersections de S avec la droite $x = 0$ et $z = -\frac{1}{2}$.
(2) Calculer le gradient de f en ces points.
(3) Déterminer l'équation du plan tangent à S en ces points.

TD2-S3 : Fonctions de plusieurs variables.

Dérivées d'ordre supérieure, formule de Taylor, surface.

Exercice 1. *Formule de Taylor à l'ordre* 2.
Calculer les dérivées secondes des fonctions suivantes

- $f(x,y) = 2x^2 + 3\cos(xy)$
- $g(x,y) = e^{xy} + (x+y)^3$
- $h(x,y) = \arctan(x^2+y)$

Puis déterminer les formules de Taylor à l'ordre 2 en $(0,0)$ de f, en $(1,0)$ de g et en $(0,0)$ de h.

Exercice 2. *Dessin de surface.*
Soit g la fonction définie par

$$g(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 1.$$

(1) Déterminer la position des points critiques de g en calculant le gradient de g.
(2) Calculer la hessienne de g. Préciser la nature des points critiques.
(3) En déduire un dessin approximatif de la surface $S: \ z = g(x,y)$.

Exercice 3. *Dessin de surface.*
Soit S la surface représentative de la fonction $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ par

$$S: \ z = x^4 + y^4 - 4xy.$$

(1) Déterminer la position des points critiques de f. *Indication : il y en a* 3.
(2) Calculer la hessienne de f. Préciser la nature des points critiques.
(3) En déduire un dessin approximatif de la surface.

Exercice 4. *Méthode des moindres carrés : une application du calcul d'extrema.*
On considère 3 points $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ et $M_3(x_3,y_3)$ du plan et une droite d'équation $y = ax+b$.

(1) Dessiner trois points M_1, M_2 et M_3 au hasard dans le plan et une droite dont on notera l'équation $y = ax+b$. Préciser sur ce dessin ce que représente la quantité

$$y_i - (ax_i + b).$$

(2) On note $S(a,b)$ la quantité suivante

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{3} (y_i - (ax_i + b))^2.$$

En déterminant le gradient et la hessienne de $S(a,b)$, déterminer le minimum de S. En quoi trouver ce minimum (a_{min}, b_{min}) est intéressant ? La droite correspondante $y = a_{min}x + b_{min}$ est appelée *droite de regression.*

(3) Vérifier que la droite de regression passe par le centre de gravité des 3 points.
(4) *Application.* Trouver la droite de regression correspondante aux points donnés dans le tableau et faire une représentation graphique.

x_i	0	1	2
y_i	2	4	1

TD3-S3 : Fonctions de plusieurs variables.

Incertitudes. Intégrales.

Exercice 1. *Incertitudes.*

On sait que la Terre est approximativement une sphère de rayon $R_T = 6371$ km. On suppose que la mesure du rayon est donnée avec une erreur absolue $\Delta R = 20$ km.

(1) Quelle est l'erreur relative effectuée sur la mesure de R_T ?
(2) Quelle est l'erreur absolue induite sur la mesure du volume V_T? Et l'erreur relative ?
(3) Quelle devrait être l'erreur absolue maximale sur R_T pour que l'erreur absolue sur V_T soit inférieure à 1km^3 ? Est-ce raisonnable ?

Exercice 2. *Incertitudes.*

La flèche f d'une poutre de longueur l, de largeur a et de largeur b fixée dans un mur est donnée par l'expression

$$f = 4\frac{l^3}{ab^3}\frac{P}{E}$$

où P est le poids et E le module d'élasticité. On effectue le mesure suivante sur une poutre en laiton avec les caractéristiques

$$l = 14,9\text{cm}, \ a = 0,6\text{cm}, \ b = 1\text{cm}, \ m = 1000\text{g}$$

L'imprécision relative sur la masse est estimée à 5%. L'imprécision absolue sur f est estimée à 0.05mm. On mesure alors la flèche

$$f = 0,475\text{mm}.$$

En négligeant les erreurs sur les longueurs et en considérant que $g = 9,81\text{m.s}^{-2}$, donner une estimation de E, ΔE et $\frac{\Delta E}{E}$.

Exercice 3. *Intégrales doubles et triples sur des pavés.*

Calculer les intégrales suivantes :

$$\iint_D \left(x^2 + xy\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{ avec } D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| -1 \le x \le 2, \ 2 \le y \le 3 \right\}$$

$$\iint_D \frac{\sin(y)}{x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{ avec } D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 1 \le x \le 4, \ 0 \le y \le \frac{3\pi}{4} \right\}$$

$$\iiint_D xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \text{ avec } D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| 0 \le x \le 2, \ 0 \le y \le 4, \ -2 \le z \le 1 \right\}$$

$$\iiint_D (x+y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \text{ avec } D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| -1 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1, \ -1 \le z \le 1 \right\}$$

On dessinera rapidement le domaine D d'intégrations dans chacun des cas.

Exercice 4. *Intégrales doubles sur des domaines à bords.*

Dans chacun des cas suivant, on commencera par dessiner D puis par l'écrire sous la forme

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| a \le x \le b, \ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x) \right\}$$

puis on appliquera le théorème Fubini.

$$\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{ avec } D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, 0 \leq y \leq 1, \ 0 \leq x \leq y \right\}$$

$$\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{ avec } D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, 0 \leq x, 0 \leq y, \ \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1 \right\}$$

Exercice 5. *Intégrales triples sur des domaines à bords.*

Dans chacun des cas suivant, on commencera par dessiner D puis par l'écrire sous la forme

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, a \leq x \leq b, \ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), \ \psi_1(x,y) \leq z \leq \psi_2(x,y) \right\}$$

puis on appliquera le théorème Fubini.

$$\iiint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \text{ avec } D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, 0 \leq x \leq 2 \ , \ y \geq 0 \ , \ z \geq 0 \ , \ y + z \leq 1 \right\}$$

$$\iiint_D z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \text{ avec } D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, 0 \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq y \leq 1 \ , \ z \geq 0 \ , \ x + y + z \leq 2 \right\}$$

TD4-S3 : Fonctions de plusieurs variables. Changement de variables.

Exercice 1. *Centre de gravité dans le plan.*
On considère le domaine D délimité par les droites $x=-1$, $x=3$, $y=\frac{x-2}{3}$, $y=\frac{x+7}{3}$.

(1) Représenter le domaine D. Quel est le nom de cette figure ? Trouver *géométriquement* la position du centre de gravité.
(2) En utilisant une intégrale double calculer l'aire de de D. *On vérifiera avec une formule classique en géométrie.*
(3) On suppose que la densité surfacique est constante égale à 1. Par un calcul d'intégrales, retrouver les coordonnées du centre de gravité déterminer à la question 1.

Exercice 2. *Centre de gravité et changement de coordonnées.*
Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ x^2+y^2\leq 1,\ x\geq 0\}$. On assimile ce domaine à une surface S de densité surfacique $\mu(x,y)=x$.

(1) Dessiner D et déterminer une paramétrisation de D.
(2) Calculer les coordonnées du centre de gravité de D. *On effectuera un changement de coordonnées polaires.*

Exercice 3. *Changement de coordonnées cylindriques.*
On considère de la domaine défini par

$$D=\left\{\left((x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right|0\leq z\leq 2-\sqrt{x^2+y^2},\ \sqrt{x^2+y^2}\leq 1\right\}.$$

(1) Dessiner le domaine D et déterminer son volume avec des formules de géométries classiques. *Pour dessiner D, on fera immédiatement un changement de coordonnées cylindriques.*
(2) Déterminer le centre de gravité de D en supposant que sa masse volumique est constante égale à 1.

Exercice 4. *Matrice d'inertie d'une sphère pleine.*
Soit S une sphère pleine de centre $(0,0,0)$ et de rayon R. On suppose que sa masse volumique est égale à 1.

(1) Déterminer la masse m de S.
(2) On rappelle que la matrice d'inertie I de S par rapport à la base canonique s'écrit

$$\begin{pmatrix} \iiint_S (y^2+z^2) & -\iiint_S yx & -\iiint_S zx \\ -\iiint_S xy & \iiint_S (x^2+z^2) & -\iiint_S zy \\ -\iiint_S xz & -\iiint_S zy & \iiint_S (y^2+x^2) \end{pmatrix}.$$

En utilisant un changement de coordonnées sphériques, montrer que I s'écrit

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2 \end{pmatrix}$$

2019-2020