UNIVERSITÉ TOULOUSE III PAUL SABATIER — Université de Toulouse

DM2: LA CONSTRUCTION DE L'ENSEMBLE DES RÉELS D'APRÈS DEDEKIND.

ET DE LA RACINE CARRÉE DE 2...

1. $\mathbb{Q}$: UN ENSEMBLE INCOMPLET.

On considère l'ensemble $\mathbb{Q}$ muni de son ordre naturel $\leq$. Soit A la partie de $\mathbb{Q}$ définie par

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Q}^+ \middle| \, x^2 < 2 \right\}.$$

(1) Montrer que A est non vide.
(2) Montrer que A admet un majorant dans $\mathbb{Q}$.
(3) On suppose que α est la borne supérieure de A.
   (a) Soit $\epsilon > 0$. En remarquant que $\alpha - \epsilon$ n'est pas un majorant de A, montrer que $\alpha^2 \leq 2$.
   (b) On suppose que $\alpha^2 > 2$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\alpha - \frac{1}{n}\right)^2 > 2$. En déduire une contradiction puis que $\alpha^2 = 2$.
   (c) Montrer que $\alpha^2 = 2$ est impossible.[1]

On montre ainsi que dans $\mathbb{Q}$, certaines parties non vides majorées n'ont pas de borne supérieure, ce qui est un ÉNORME problème. Pour résoudre ce problème, on va ajouter de nouveaux nombres à $\mathbb{Q}$ et construire $\mathbb{R}$.

2. CONSTRUCTION DE $\mathbb{R}$ PAR COUPURE.

La construction de $\mathbb{R}$ suivante est dûe à Dedekind.[2]

Une *coupure* de $\mathbb{Q}$ est un couple de parties (A, B) de $\mathbb{Q}$ vérifiant les propriétés suivantes:

- A et B sont non vides.
- $A \cup B = \mathbb{Q}$, $A \cap B = \emptyset$
- $\forall x \in A,\ \forall y \in B, \quad x \leq y.$
- A n'admet pas de plus grand élément.

On note $\mathfrak{R}$ l'ensemble de toutes les coupures de $\mathbb{Q}$.

2.1. **Deux exemples.**

(1) Montrer que $(\{x \in \mathbb{Q} |\, x < 1\}, \{x \in \mathbb{Q} |\, x \geq 1\})$ est une coupure.
(2) Montrer que $\left(\mathbb{Q}^- \cup \left\{ x \in \mathbb{Q}^+ |\, x^2 < 2 \right\}, \left\{ x \in \mathbb{Q}^+ |\, x^2 > 2 \right\}\right)$ est une coupure. On la notera $\mathcal{RAC}\,(2)$.

---

[1] On supposera que $\alpha = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux, et on cherchera une contradiction.

[2] Il existe d'autres constructions.

2.2. **Ordre sur les coupures.** Soit $\mathcal{C}_1 = (A_1, B_1)$ et $\mathcal{C}_2 = (A_2, B_2)$ deux coupures. On notera $\mathcal{C}_1 \preceq \mathcal{C}_2$ lorsque $A_1 \subset A_2$.

(1) Montrer que $\preceq$ est un ordre.
(2) Montrer que c'est un ordre total.
(3) Montrer que $(\mathbb{Q}^{-*}, \mathbb{Q}^{+}) \preceq \mathcal{RAC}\,(2)$.

2.3. **Théorème structurant.** Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathfrak{R}$. On suppose A non vide et majorée. On pose

$$\mathbb{A} = \bigcup_{(A,B)\in\mathcal{A}} A$$

et $\mathbb{B} = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{A}$.

(1) Montrer que $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ est une coupure.
(2) Montrer que c'est la borne supérieure de $\mathcal{A}$.

On obtient ainsi le résultat de structure tant espéré: toute partie non-vide majorée de $\mathfrak{R}$ admet une borne supérieure.

2.4. **Plongement de $\mathbb{Q}$ dans $\mathfrak{R}$..** Montrer que l'application définie par

$$I : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathfrak{R} \\ r & \longrightarrow & (\{x \in \mathbb{Q} |\, x < r\}, \{x \in \mathbb{Q} |\, x \geq r\}) \end{array} \right.$$

est une injection croissante.

2.5. **Produit de deux coupures positives.** On dit qu'une coupure $\mathcal{C}$ est positive si $I\,(0) \preceq \mathcal{C}$. Soit $\mathcal{C}_1 = (A_1, B_1)$ et $\mathcal{C}_2 = (A_2, B_2)$ deux coupures positives. Soit B_3 défini par

$$B_3 = \{xy |\, x \in B_1,\ y \in B_2\}$$

et $\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_2$ par

$$\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_2 = (\mathbb{Q} \setminus B_3, B_3)\,.$$

(1) Montrer que $\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_2$ est une coupure. Elle s'appelle le coupure produit de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
(2) Soit r_1 et r_2 deux rationnels positifs. Montrer que
$$I\,(r_1 r_2) = I\,(r_1) \otimes I\,(r_2)\,.$$
(3) Montrer enfin que
$$\mathcal{RAC}\,(2) \otimes \mathcal{RAC}\,(2) = I\,(2)\,.$$
Ho !!!! On vient de construire la racine carrée de 2 !!!