Faire des mathématiques et les rédiger.

Petit glossaire destiné aux étudiants de licence.

Y. Genzmer
M. Wambst

January 1, 2019

Ce glossaire est un document donc l'objectif est l'apprentissage de la construction et de la rédaction d'une démonstration mathématique. Certaines explications vous sembleront probablement inutiles, certains énoncés évidents néanmoins nous pensons que chacun y trouvera au moins une remarque qui améliorera sa capacité à démontrer des résultats mathématiques. Dans chaque article, les mots mis en évidence **de cette façon** renvoient à d'autres articles du glossaire.
Bonne lecture....

Admis (Résultat).

Dans certains cas, des **propositions** ou des **théorèmes** ne sont pas démontrés explicitement. On admet néanmoins qu'ils sont vrais pour pouvoir continuer son discours.
Les contextes où l'on admet un résultat sont variables: dans le cours, un enseignant peut, pour une raison ou une autre, admettre un **théorème**, c'est-à-dire l'énoncer, sans le **démontrer**. Dans un exercice, on peut admettre un résultat intermédiaire que l'on a pas réussi à démontrer pour pouvoir continuer l'exercice. Ce qui est important, c'est de bien distinguer ce qui est démontré de ce qui est admis. C'est l'honnêteté intellectuelle du mathématicien.

Analyse-Synthèse.

Ce procédé de **démonstration** consiste à supposer la **conclusion** vraie et à en tirer le maximum de conséquences logiques: le but est d'aboutir soit à une assertion déjà connue comme vraie soit à un objet bien défini et qui est la seule solution possible du problème. Il faut ensuite **rédiger** la synthèse (en reprenant le raisonnement «dans l'autre sens» ce qui consiste à partir de cette conséquence vraie ou de cet objet solution et d'en déduire la **conclusion**. Un exemple classique:
Montrons qu'une fonction est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Soit f une fonction. Dans l'analyse, on suppose que $f = p + q$ où p est une fonction paire et q une fonction impaire. On suppose donc que la conclusion est vraie et on essaye d'en tirer des conséquences permettant d'identifier les candidats possibles pour p et q. On a alors pour tout x du domaine de définition de f les égalités: $f(x) = p(x)+q(x)$ et $f(-x) = p(-x) + q(-x) = p(x) - q(x)$. Il suffit alors de résoudre un système linéaire de deux équations pour obtenir $p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $q(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Ceci termine l'analyse. On a trouvé des relations qui permettent de trouver p et q en fonction de f.
La synthèse qui est la **démonstration** de la **proposition** suit alors le schéma de démonstration d'un **il existe**:
Posons $p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $q(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ et vérifions qu'il ont les propriétés requises. La première fonction est paire et la seconde est impaire, en effet

$$p(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = p(x) \text{ et } q(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -q(x).$$

On a de plus

$$p(x) + q(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(-x) - f(-x)}{2} = f(x).$$

Assertion, proposition vraie, proposition fausse.

En mathématique, on s'interroge sur le statut des **propositions**, à savoir, si elles sont vraies ou fausses. En général, lorsqu'on écrit une **proposition**, on sous-entend qu'elle est vraie. C'est ce qu'on appelle alors une assertion.
Ainsi quand on écrit «La fonction f est continue», on sous-entend que c'est vrai pour la fonction f dont on parle.
Lorsque la **proposition** n'est pas établie, mais que vous souhaitez la citer pour une autre raison, vous devrez écrire:

> Dans le cas où la fonction f est continue, on peut déduire....
> On a supposé que la fonction f est continue, on en déduit....

On va montrer que la fonction f est continue.
L'assertion «pour tout réel x, on a $x^2 < 0$» est fausse.
La proposition «pour tout réel x, on a $x^2 \geq 0$» est vraie.

Axiome. L'axiome est une **assertion admise** à partir de laquelle on va développer une théorie. Les axiomes ne nécessitent pas de **démonstration.** Généralement, nous n'avons aucune peine à les admettre car ce qu'il affirme correspond à notre intuition. Par exemple un axiome d'Euclide dit

Par un point hors d'une droite d du plan il passe une et une seule droite parallèle à d.

Cette **assertion** ne peut pas être prouvée. On l'admet pour pouvoir faire la géométrie. On appelle aussi parfois «axiome» les différentes conditions d'une **définition**. Par exemple,

pour tout $x, y \in R$, on a $x + y = y + x$

est l'axiome de la commutativité de l'addition qui est l'une des conditions de la **définition** d'un anneau R.

Conclusion. Une conclusion est une **assertion** à laquelle doit aboutir le discours que l'on tient. Si l'on souhaite expliquer pourquoi il est tentant d'affirmer que la Terre est ronde, on évoquera le reflet sur la Lune, on contera les différents voyages des explorateurs ou encore on s'exclamera de façon péremptoire «Mais comment voulez-vous qu'il en soit autrement !» pour appuyer sa conclusion. En mathématiques, la conclusion est l'**assertion** mathématique à laquelle vous voulez parvenir. En général dans un exercice, elle vous est imposée. Par exemple, si je vous demande de

montrer que si $u_n \neq 0$ tend vers $l \neq 0$ alors $\frac{1}{u_n}$ tend vers $\frac{1}{l}$.

Il vous faudra traduire l'**hypothèse** et la **conclusion** qui est ici $\frac{1}{u_n}$ tend vers $\frac{1}{l}$. Puis tenir un discours mathématique convaincant pour relier cette **hypothèse** et cette **conclusion**.

Conjecture. C'est un **énoncé** que l'on estime vrai pour différentes raisons mais qui n'est pas encore **démontré**: c'est vrai sur tous les exemples connus, c'est vrai dans de nombreux cas particuliers ou encore on en a l'intuition. Lorsque la conjecture est **démontrée** elle acquiert le statut de **théorème**. Il y a de nombreuses conjectures célèbres en mathématiques:
La conjecture de Fermat disait

Soit $n > 2$ un entier. L'équation $x^n + y^n = z^n$ n'admet pas de solution non-triviale $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$.

Cette conjecture énoncée au XVII siècle par Pierre de Fermat n'est devenu un théorème qu'en 1994. Le mathématicien Andrew Wiles démontra la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil trop compliquée pour être reproduite ici. La conjecture de Fermat est en effet un **corollaire** de l'**énoncé** de Shimura-Taniyama-Weil.

Définition. En mathématique, définir c'est associer un nom à un objet possédant une liste de propriétés. L'**énoncé** d'une définition est de la forme : *L'objet A qui satisfait à la propriété P est appelé ... .*
Exemples:

> **Définition**
> Soit f une fonction définie en a. Si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[$, on a $|f(a) - f(x)| < \varepsilon$, on dit que f est continue en a.
> **Définition**
> Une fonction monotone sur un intervalle est une fonction qui est, soit croissante, soit décroissante sur cet intervalle.

On ne confondra pas **théorème** et définition. La définition n'a pas besoin d'être démontrée, elle n'est ni juste ni fausse, elle ne fait qu'introduire une convention. A l'extrême, la définition peut ne pas être valide si elle contient une contradiction comme dans l'exemple suivant:

> **Définition**
> On appelle fonction mystérieuse une fonction dérivable strictement croissante sur un intervalle et dont la dérivée est nulle sur cet intervalle.

Les fonctions mystérieuses ainsi définies n'existent pas mais vous êtes tout à fait autorisés à définir un objet qui n'existe pas... bien que cela n'est aucun intérêt. Il faut néanmoins vérifier que l'objet de la définition est bien défini, c'est-à-dire, que la définition ne contient pas d'ambiguïté. Par exemple :

> **Définition** Soit $\hat{A}$ un angle géometrique aigu. On appelle cosinus de $\hat{A}$ le rapport $\sin(\hat{A}) = \frac{AB}{BC}$ où (ABC) est un triangle rectangle en C et tel que $\hat{A} = \widehat{BAC}$.

Cette définition n'est valide que si l'on prouve que la quantité $\frac{AB}{BC}$ ne dépend pas du triangle choisi mais uniquement de l'angle $\hat{A}$. Ici, c'est une conséquence directe du théorème de Thales. Si cela n'était pas le cas, le cosinus ne serait pas bien défini. Un même angle aurait des cosinus différent selon les différents triangles rectangles dans lesquels il s'inscrit !
L'expression «Par définition» est utilisé dans un raisonnement pour rappeler qu'une assertion est vrai car c'est une simple lecture de la définition d'un objet:

> La fonction f étant dérivable en 0, donc par définition, l'expression $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ admet une limite quand x tend vers 0.

Démonstration. C'est un chemin logique partant d'une **assertion** - les **hypothèses** - à une autre **assertion** - la **conclusion** -.

Enoncé. Un énoncé est un texte bien délimité portant sur des objets mathématiques . On parlera ainsi de l'énoncé d'un **théorème**, d'une **définition**, d'un exercice. Par exemple, l'énoncé du **théorème** de Pythagore est

> Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des des deux autres longueurs.

La phrase «La fonction $x \mapsto x^2$ est n'est pas continue» est aussi un énoncé.

Équivalence: comprendre et démontrer. L'équivalence entre deux **assertions** affirme que si l'une est vraie alors l'autre aussi et inversement. Formellement, cela s'écrit

$$A \iff B \text{ signifie que } A \Rightarrow B \text{ et } B \Rightarrow A.$$

Il est *en général délicat* de raisonner directement par équivalence. Aussi pour **démontrer** une équivalence, il faut découper la démonstration en deux: on commencera par **démontrer** une **implication** puis séparément l'autre. Par exemple, si je vous demande de

Montrer qu'en entier est impair si et seulement si son carré est impair.

Le travail de **traduction** sous forme quantifiée aboutit à la proposition, $\forall n \in \mathbb{N}\ n$ impair $\Longleftrightarrow n^2$ impair. La technique de **démonstration** d'un **pour tout** nous amène à rédiger la preuve en commençant par un **soit** . Puis, comme il s'agit de **démontrer** une équivalence nous allons découper celle-ci en deux. La **rédaction** est donc

> Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons la première **implication** et supposons donc n impair. Par définition, il existe k tel que $n = 2k + 1$. Ainsi,
>
> $$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1$$
>
> qui est bien impair. Ce qui prouve la première implication. Montrons maintenant l'implication réciproque et supposons n^2 impair. Cela signifie que 2 divise $n^2 - 1$. Or $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$. Donc 2 divise $n - 1$ ou 2 divise $n + 1$, dans tous les cas n est impair. Ce qui prouve la seconde **implication** et donc l'équivalence.

Ensembles.

Les mathématiques modernes reposent essentiellement sur la notion d'ensemble. Il est pourtant assez difficile de définir rigoureusement ce dont il s'agit et on se contentera ici de la notion intuitive de collection d'objets. Pour une introduction plus complète on peut consulter la vidéo du cours de René Chenon

http://www.ina.fr/archivespourtous/index.php?vue=notice&id_notice=CPF88004772

sur site de l'Institut national de l'audiovisuel.
Les objets qu'il contient sont alors les *éléments* de l'ensemble. Si x est un élément de l'ensemble X, on dit que x *appartient à* X et on note $x \in X$. Les ensembles peuvent être décrits de différentes manière.

- *En extension:* on liste tous ses éléments. Par exemple:

  $\{2, 3, 5, 7\}$ est l'ensemble des cinq premiers entiers premiers,
  $\{1, 2, \ldots, 7, 8, 9\}$ est l'ensemble des entiers compris entre 1 et 9.

- *En compréhension:* on décrit l'ensemble par une propriété qui est satisfaite par tous ses éléments. Par exemple:

  $\{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 9\}$ est l'ensemble des entiers compris entre 1 et 9,
  $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0\right\}$ est l'ensemble des solutions réelles de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$,
  $\left\{x^2 + x + 1 \mid x \in \mathbb{N}\right\}$ est l'ensemble des nombres qui sont de la forme $x^2 + x + 1$ où x parcourt l'ensemble des entiers naturels.

Certains ensembles ont des notations particulières; par exemple, les intervalles de $\mathbb{R}$ noté $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} =]a, b[$, $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} =]a, +\infty[$ et $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} =]a, b]$. L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé *ensemble vide* il se note $\emptyset$ et non $\{\emptyset\}$. Lorsque tous les éléments d'un ensemble A sont aussi des éléments d'un ensemble B, on dit que A est *inclus* dans B et on note $A \subset B$. On dit aussi que A est un *sous-ensemble* de B. Par exemple:

$\{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 9\} \subset \mathbb{N}$
$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 4\} \subset \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 8\}$
$[-1, 2] \subset]-\infty, 3]$

Pour montrer que deux ensembles A et B sont égaux, on montre successivement $A \subset B$ et $B \subset A$ et pour démontrer une inclusion du type

$\{x \mid P_1\} \subset \{x \mid P_2\}$

où P_1 et P_2 sont deux propriétés, on considère x qui vérifie P_1 et on montre qu'alors x vérifie aussi P_2. En fait cela revient aussi à montrer l'**implication** $P_1 \Rightarrow P_2$.
On peut enfin considérer des opérations sur les ensembles.

- *L'intersection.* Soient A et B des ensembles. On note $A \cap B$ (A *inter* B) l'ensemble des éléments communs à A et à B. Par exemple:

  $\{1,3,4,7\} \cap \{1,2,3,8\} = \{1,3\}$
  $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 4\right\} \cap [0,+\infty[= [0,+2[$
  $\{1,3,4,7\} \cap \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 50\right\}\} = \emptyset$
  $A \cap \emptyset = \emptyset.$

- *La réunion.* Soient A et B des ensembles. On note $A \cup B$ (A *union* B) l'ensemble dont les éléments sont tous les éléments de A et de B. Par exemple:

  $\{1,3,4,7\} \cup \{1,2,3,8\} = \{1,2,3,4,7,8\}$
  $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 4\right\} \cup [0,+\infty[=]-2,+\infty[$
  $\{1,3,4,7\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 50\right\}$ ne peut pas s'écrire de manière plus simple que cela.
  $A \cup \emptyset = A.$

Et.

La liaison «et» entre deux **assertions** A et B construit une nouvelle **assertion** qui est vraie si et seulement si les deux **assertions** A et B sont vraies. Par exemple, pour qu'une suite soit positive *et* convergente, il faut qu'elle vérifie ces deux propriétés en même temps. L'assertion

> (La fonction f est continue et change de signe) *et* (f ne s'annule pas sur son intervalle de définition)

est forcément une assertion fausse, car les deux propriétés ne peuvent pas être vraies en même temps. C'est une application du théorème des valeurs intermédiaires.

Démontrer un Et.

Pour **démontrer** une **assertion** articulée autour d'un «et» comme la **proposition**

> A et B

il faut démontrer chaque **assertion** A et B. Par exemple, si je vous demande de montrer le résultat suivant.

> Soit le polynôme $P(x) = x^2 - x - 1$. Montrer que P tend vers $+\infty$ en $+\infty$ *et* et qu'il a deux racines réelles.

Il s'agit donc d'une part de montrer que le polynôme tend vers $+\infty$ en $+\infty$ en évoquant des équivalents par exemple, et d'autre part, en utilisant le discriminant, d'identifier les deux racines réelles de P, ici $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Existe: $\exists$.

Le *il existe* en mathématique signifie que l'on énonce l'existence d'un objet vérifiant un certain nombre de propriétés. En français on dirait par exemple,

> **Il existe un fleuve du monde sans affluent.**

Ce qui se **traduit** mathématiquement en

$$\exists x \in A \ \text{ tel que } x \in B,$$

où l'on aura défini A comme l'**ensemble** des fleuves du monde et B comme l'**ensemble** des cours d'eau sans affluent. Pour démontrer une telle **assertion**, il faudrait chercher sur un planisphère un fleuve sans affluent[1]. Un exemple un peu plus mathématique: il existe une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ non dérivable en 0, ce qui se traduit par

[1] Il n'en existe probablement pas si l'on accepte *les tous petits* affluents.

$\exists f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel que $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ n'a pas de limite en 0[2]

$\exists$: rédiger et démontrer.

En français, la meilleure manière de montrer à son interlocuteur qu'un objet vérifiant une certaine propriété existe, c'est de le lui désigner. Ici, l'interlocuteur, c'est le correcteur qui lit votre travail. Si dans un problème, je vous demande de

> Montrer qu'il existe x tel que *blabla*

c'est-à-dire

> Montrer que $\exists x$ tel que *blabla*,

la première chose que vous devez faire, c'est de me le désigner en **rédigeant** votre **démonstration** de la façon suivante

> Posons $x = \ldots$ et vérifions qu'il satisfait les propriétés *blabla*.

Un exemple :

> Soit u_n une suite non nulle qui pour n assez grand est toujours nulle. Montrer qu'il existe N tel que $u_{N-1} \neq 0$ et pour tout $n \geq N$ $u_n = 0$.

On commence par **traduire** les **hypothèses**: $\exists n_0$ tel que $u_{n_0} \neq 0$ et $\exists M$ tel que $u_n = 0$ $\forall n \geq M$. L'entier M a presque la bonne propriété mais on est pas sûr que $u_{M-1} \neq 0$. On comprend bien que le M qui aurait la bonne propriété est le plus petit qui a la propriété précédente. Comment *construire* un plus petit ? Un prenant le minimum d'un ensemble non vide. On va donc utiliser l'**ensemble** suivant $\{P \in \mathbb{N} \,|\forall n \geq P,\ u_n = 0\}$. On peut maintenant commencer la **rédaction**.

> Posons $N = \min\{P \in \mathbb{N} \,|\forall n \geq P,\ u_n = 0\}$. L'entier N existe bien car l'**hypothèse** assure que l'**ensemble** considéré est non vide contenu dans $\mathbb{N}$. Vérifions que N a les propriétés souhaité. Comme N appartient à l'**ensemble**, il est clair que $\forall n \geq N$ $u_n = 0$. De plus, comme la suite n'est pas nulle, $N \neq 0$.

Ensuite on fait un petit **raisonnement par l'absurde**.

> Par ailleurs, si $u_{N-1} = 0$ alors on aurait $N-1$ qui appartient aussi à l'**ensemble**, ce qui est une contradiction avec le choix de N comme minimum de l'ensemble. Donc $u_{N-1} \neq 0$. L'entier N a donc toutes les propriétés requises.

Hypothèse.

Une hypothèse est une **assertion** sur laquelle on se fonde pour faire avancer son discours. *A priori,* la question n'est pas de savoir si l'hypothèse est intéressante, pertinente, valide, à rejeter ou quoi que ce soit, son rôle est uniquement d'être un point de départ supposé. Un exemple de la vie courante: il arrive souvent que dans les derniers matchs de poules d'un championnat de football - pensez à l'Euro ou au Mondial - , les commentateurs, vous et moi émettent des hypothèse farfelues pour savoir si la France a ou non une chance de passer en 1/8. Rappelez-vous:

> - Bien... si les Pays Bas et la Roumanie font match nul trois partout, et que pendant ce temps l'Italie bat la Russie avec au moins deux but d'écart mais pas plus que six et qu'enfin la France fait au moins match nul contre l'Italie en marquant au moins sept buts, alors la France sera en 1/8 contre la Suède ou l'Estonie selon que l'Argentine passe ou ne passe pas en 1/8!
> Pendant un moment, un court moment, il n'est pas question de savoir si ces hypothèses sont raisonnables mais seulement d'en déterminer les conséquences.

Un exemple un peu plus mathématique:

> si f est une fonction continue qui change de signe sur son intervalle de définition, alors elle s'y annule.

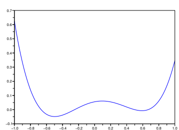
Comprenez bien qu'ici on ne dit pas que f est continue ni qu'elle change de signe, mais on observe seulement *ce qui se passerait* si tel était le cas.

---

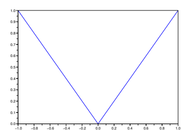
[2] Donner un exemple !

Image des objets mathématiques.

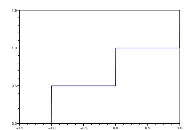
Une manière de *faire de mathématiques* consiste à disposer d'un certain nombre d'images mentales des objets mathématiques. Il est important que ces objets que vous manipulez ne restent pas trop abstraits pour vous mais, au contraire, que lorsque j'évoque une fonction, une suite, une fonction continue, discontinue, dérivable ... une image de cet objet vous vienne immédiatement à l'esprit. Lors de l'apprentissage de votre cours, pensez à imaginer un exemple de l'objet dont vous apprenez la **définition**. Pour vous donner une idée, voila ce qui me vient à l'esprit quand je pense à



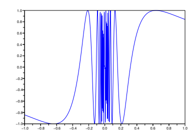
Une fonction continue



Une fonction non dérivable



Une fonction discontinue



Une fonction sans limite

Implication: comprendre et démontrer.

Une implication est une **assertion** constituée de deux membres: l'**hypothèse** A et la **conclusion** B. L'implication $A \Rightarrow B$ porte sur le lien qu'il existe entre ces deux **propositions** et signifie que si A est vraie alors automatiquement B est vraie. Dans une implication, on ne cherche pas à savoir si A ou B est vraie, fausse, pertinente, absurde mais on observe seulement le lien de *cause à effet* entre A et B. Par exemple dans

> Si l'on plonge un corps dans l'eau alors le téléphone sonne.[3]

on demande pas d'établir que l'on plonge un corps dans l'eau ni même que le téléphone sonne mais on demande d'établir la relation de *causalité*. Un exemple un peu plus mathématique

> Si le discrimant d'un polynôme du second degré est strictement positif alors il a deux racines réelles distinctes.

Notez que cette **assertion** ne signifie pas que le discriminant d'un polynôme est *toujours* strictement positif.

Négation.

Nier une phrase ou encore écrire la négation d'une phrase, c'est écrire une nouvelle phrase qui est vraie si et seulement si la phrase d'origine est fausse. Par exemple, la négation de

> Il existe un océan.

est la phrase

> Il n'existe pas d'océan.

Ici, on ne se demande pas laquelle de ces deux phrases est vraie mais on s'assure seulement que si la première est vraie alors la seconde est fausse et inversement.

■ Négation de ET et OU

Pour nier une phrase contenant un «et» ou un «ou», on commence par écrire la négation des assertions qui sont de part et d'autre du connecteur «et» ou «ou». Puis on remplace le «et» par un «ou» et le «ou» par un «et». Par exemple la négation de

[3] Le fameux principe d'Archimède-Desproges

Il existe un océan *et* une mer

est

Il n'existe pas d'océan *ou* il n'existe pas de mer.

En effet, pour que la première phrase soit fausse, il faut et il suffit que soit il n'y ait pas d'océan soit il n'y ait pas de mer, ce que signifie la seconde phrase. La négation de

Il existe un océan *ou* une mer

est

Il n'existe pas d'océan *et* il n'existe pas de mer.

Mathématiquement, les négation de

A et B et A ou B

sont respectivement

(négation de A) ou (négation de$B$) et (négation de A) et (négation de$B$).

Négation de $\forall$ et de $\exists$

Pour nier une phrase contenant un **pour tout**, il suffit de le remplacer par un **il existe** puis d'écrire la négation de la suite de la phrase. De même, pour nier une phrase contenant un **il existe**, il suffit de le remplacer par un **pour tout** puis d'écrire la négation de la suite de la phrase. Par exemple, pour nier la phrase

Pour tout fleuve, il existe un affluent

on dira

Il existe un fleuve qui n'a pas d'affluent.

Mathématiquement, la négation des phrases

$\forall x \in A,\ x \in B \qquad \exists x \in A,\ x \in B$

sont respectivement

$\exists x \in A$ tel que $x \notin B \qquad \forall x \in A,\ x \notin B$

Négation de $\Rightarrow$

Pour nier une **implication** $A \Rightarrow B$, il suffit d'affirmer que sont vrai en même temps l'**hypothèse** A et la négation de **conclusion** B. Par exemple la négation de la phrase

Si j'ai mon année, je me rase la tête.

qui s'écrit aussi

$A \Rightarrow B$

avec A l'assertion «j'ai mon année» et B l'assertion «je me rase la tête», est

J'ai mon année *et*, pourtant, je garde mes cheveux.

Formellement, la négation d'une implication

$A \Rightarrow B$

est

A et (négation de B).

Ou. La liaison «ou» entre deux **assertions** A et B construit une nouvelle **assertion** qui est vraie si et seulement si l'une ou l'autre des deux **assertions** A et B est vraie. Par exemple, pour qu'une suite soit positive *ou* convergente, il faut qu'elle vérifie seulement l'une de deux propriétés. L'assertion

> (La fonction f est continue et change de signe) *ou* (f ne s'annule pas sur son intervalle de définition)

est une **assertion** vraie.

Démontrer un OU.

Pour **démontrer** une **assertion** articulée autour d'un «ou» comme la **proposition**

> A ou B

il faut **démontrer** que au moins l'une des deux **assertions** est vraie quelle que soit la situation. Dans la pratique, on procédera souvent de la façon suivante:

> Si A est vrai la **proposition** est démontrée. Si A n'est pas vraie, nous allons montrer B. Si bien que dans tous les cas l'une ou l'autre des **propositions** sera vérifiée.

Par exemple, si je vous demande de montrer le résultat suivant:

> Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$. Montre que f ne change pas de signe *ou* s'annule sur $[0,1]$.

On rédigera alors de la façon suivante.

> Si la fonction de ne change pas de signe alors la proposition est démontrée. Si elle change de signe, alors il existe a et b tel que $f(a) \geq 0$ et $f(b) \leq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires que l'on peut appliquer car f est supposée continue, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$. Donc la fonction f s'annule sur $[0,1]$. Donc la proposition est démontrée.

Poser En mathématiques, «on pose» permet d'introduire une notation intermédiaire sous la forme d'une égalité. C'est une sorte de **définition**. Par exemple,

> Soit (ABC) un triangle, on pose $h = AB \times BC$.

Dans ce cas, évidemment, h ne désigne rien d'autre et ne doit en aucun cas changer de **définition** dans un même **énoncé** ou dans une même **démonstration**. Par exemple, on ne peut pas écrire:

> Soit (ABC) un triangle de hauteur h, on pose $h = AB \times BC$.

Pour tout. Le *pour tout* en mathématiques signifie que l'on va énoncé une propriété valable pour tous les objets d'un certain ensemble. Il se note $\forall$. En français, on dirait par exemple

> **Tout étudiant de L1 qui réussit son année présente au moins une note au dessus de la moyenne.**

Ce qui se traduit mathématiquement en

> $\forall x \in A,\, x \in B$

où l'on a défini les ensembles A et B par: A est l'ensemble des étudiants de L1 qui ont réussi leur année et B est l'ensemble des étudiants qui ont eu au moins une note au-dessus de la moyenne. Pour démontrer l'assertion, il faudrait pendre un listing des étudiants qui ont obtenu leur L1 et vérifier si chacun d'entre eux admet une note supérieure à 10. L'exemple suivant est un peu plus mathématique:

> Tout intervalle compact de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point contient au moins un rationnel.

Cela se traduit en

$$\forall (a,b) \in \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|x < y\right\}, [a,b] \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset.$$

$\forall$: Rédiger et démontrer un.

En français, la meilleure manière de montrer à son interlocuteur que tous les éléments d'un **ensemble** vérifient certaines propriétés, consiste à un choisir un, puis à vérifier qu'il a les propriétés souhaitées; à en choisir un autre et faire la même opération; et ainsi de suite jusqu'à parcourir tous les éléments de l'**ensemble**. Concrètement, si je vous demande de montrer que tous les étudiants de cet amphithéatre sont majeurs, vous parcourerez la liste devant moi en me désignant à chaque fois sa date de naissance et en faisant le petit calcul mental associé. Le mot magique pour *choisir* un élément dans un **ensemble** est **soit**. Ainsi si je vous demande de

> Montrer que pour tout x élément de A, *blabla*

ou encore

> Montre que $\forall x \in A$, *blabla*

la première chose que vous devez écrire pour **rédiger** votre **démonstration** est

> Soit $x \in A$. Vérifions qu'il satisfait les propriétés *blabla*.

Par exemple, si je vous demande de

> Montrer que la différence des carrés de deux entiers successifs est impair.

On commence le travail de **traduction**. Deux entier successifs s'écrivent n et $n+1$ pour n un entier. Il s'agit donc de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)^2 - n^2$ est impair. Comme il s'agit de montrer un **pour tout**, on commence la **rédaction** par

> Soit $n \in \mathbb{N}$. La différence à considérer s'écrit $(n+1)^2 - n^2$, c'est-à-dire
>
> $$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$
>
> qui est bien impair. Donc la propriété est vraie.

Proposition. Le mot proposition désigne une ou plusieurs phrases portant sur des objets mathémaiques. Attention, le mot peut aussi être employé comme variante de **théorème**. Par exemple «la fonction $x \mapsto x^2$ est n'est pas continue» est une proposition tout comme «L'entier $2n+1$ est impair pour tout $n \in \mathbb{N}$». Dans l'exemple suivant on utilise le mot dans deux sens différents:

> **Proposition**
> Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes:
>
> 1. $|x|^2 \leq \alpha$.
> 2. $x \in [-\alpha, \alpha]$.

Quantification: rédiger et démontrer une phrase quantifiée.

Phrase quantifiée et dépendance.

Une phrase quantifiée est une **assertion** mathématique qui a la forme suivante

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall x \in A\ \exists y \in B \text{ tel que } \forall \eta > 0 \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } blabla$$

où les symboles, $\forall$, $\exists$ ou $\in$ apparaissent. Elles constituent toujours l'abrévation d'une phrase française qu'il est toujours possible d'énoncer. Il est important de savoir passer facilement de l'expression quantifiée à l'expression française et inversement car elles ont toutes les deux des intérêts différents. L'exemple ci-dessus s'énonce ainsi

> Pour tout ϵ stricement positif et pour tout élément de l'ensemble A, il existe un élément de l'ensemble B tel que pour tout η strictement positif, il existe un entier naturel ayant la propriété $blabla$.

L'ordre dans lequel apparaissent les quantificateurs dans l'**assertion** quantifiée n'est pas du tout anodin et une permutation de ces quantificateurs modifie considérablement le sens de l'**assertion**. Par exemple, supposons que j'affirme

> Toutes les personnes de ce groupe ont une date de naissance.

Sous forme quantifiée, cette **assertion** s'écrit

$$\forall x \in A,\ \exists y \in B\ \ x \text{ est né le jour } y$$

où A est l'**ensemble** des personnes du groupe et B l'**ensemble** des dates de naissance. Dans cette expression, la date y *dépend* de la personne x. Maintenant permutons les quantificateurs:

$$\exists y \in B,\ \forall x \in A\ \ x \text{ est né le jour } y.$$

En français, cette phrase affirme qu'il existe une date telle que toute personne du groupe soit née à cette date. En somme, cette **assertion** signifie que tous les gens du groupe sont nés le même jours ! Dans cette dernière **assertion**, il faut que la date de naissance y *ne dépende pas* de la personne x. Notez donc que l'ordre des quantificateurs modifie le sens de l'**assertion** mais aussi la dépendance des variables les unes par rapport aux autres. Un exemple un peu plus mathématique: la suite u_n tend vers 0. Quantifiée, cette phrase s'écrit

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N},\ k \geq N \Longrightarrow |u_k| \leq \epsilon.$$

Ce qui se dit aussi, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un rang N tel que pour tout rang k supérieur à N le terme de la suite u_k est en valeur absolue plus petit que ϵ. Notez que dans cette expression, N dépend de ϵ: quitte à aller assez loin dans la suite, celle-ci devient plus petit que ϵ mais que ϵ diminuant il faudra aller de plus en plus loin, c'est-à-dire, choisir un entier N de plus en plus grand.

Démontrer une phrase quantifiée.

Supposons maintenant qu'il sagisse de **démontrer** une phrase quantifiée plus compliquée qu'un simple $\exists$ ou $\forall$. Alors l'armature de la **rédaction** de la **démonstration** ainsi que l'armature de la façon à laquelle vous devez y penser doit suivre l'armature de l'**assertion** quantifiée en suivant les règles élémentaires du $\forall$ et $\exists$. Exemple: imaginons que je vous demande de montrer que

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall x \in A\ \exists y \in B \text{ tel que } \forall \eta > 0\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } blabla.$$

L'armature de la **rédaction** doit être

> Soit $\epsilon > 0$ et soit $x \in A$.
>
> > Posons $y = \ldots$ et vérifions qu'il vérifie la propriété souhaitée.
> >
> > > Soit $\eta > 0$.
> > >
> > > > Posons alors $n = \ldots$ et vérifions qu'il vérifie la propriété blabla.

Il vous faut aussi prendre garde aux dépendances entres les variables $\epsilon,\ x,\ \eta,\ \ldots$ induite par l'armature de la phrase quantifiée.

Raisonnement par contraposée. Le raisonnement par contraposée est un type de raisonnement généralement peu employé ou employé sans que l'on s'en rende compte. Il permet de démontrer une **implication**. Par exemple, supposons que l'on veuille vérifier que

Si la tartine tombe, alors c'est du coté de la confiture.

que l'on écrit

$A \Rightarrow B$

où A est l'**assertion** «la tartine tombe» et B «la tartine est du coté confiture». On pourrait alors se contenter de vérifier que si la tartine est du côté pain c'est-à-dire *n'est pas* du coté confiture, alors c'est qu'elle n'est pas tombée: en effet, si elle était tombée, elle serait du côté confiture. Formellement, on vérifie donc que

(négation B)$\Rightarrow$(négation A).

Le raisonnement par contraposée utilise ainsi l'équivalence

$A \Rightarrow B$ est équivalent à (négation B)$\Rightarrow$(négation A).

Il faut bien faire la différence entre la contraposée et la **négation** d'une implication. Un exemple un peu plus mathématique:

Si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.

La **traduction quantifiée** de la contraposée de cette **implication** s'écrit, $\forall n \in \mathbb{N}$ n impair $\Rightarrow n^2 - 1$ divisible par 8. Comme il s'agit de prouver un **pour tout**, la rédaction donne

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons n impair. Alors il existe k tel que $n = 2k + 1$. Ainsi

$$n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1).$$

Or parmi, k et $k+1$ il y en a un des deux qui est pair. Donc $k(k+1)$ est toujours divisible par 2. Si bien que d'après la relation ci-dessus $n^2 - 1$ est divisible par $4 \times 2 = 8$. Ce qui prouve la contraposée de la **proposition** et donc la **proposition**.

Raisonnement par l'absurde. Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer vraie la **négation** de l'**assertion** à prouver et sous cette hypothèse essayer d'aboutir à une contradiction. Voici un exemple inspiré d'un exemple célèbre.

Montrons que $1 \neq 2$.
La démonstration par l'absurde consiste maintenant à supposer la **négation** de cette **proposition**. On écrit donc
Supposons que $1 = 2$. Le père noël et moi-même sommes deux. Or comme $1 = 2$, nous ne faisons en fait qu'un. Ce qui est absurde puisque je ne suis pas le père noël. Donc, l'hypothèse $1 = 2$ aboutit à une contradiction et ainsi $1 \neq 2$.

Un exemple un peu plus mathématique et très célèbre aussi[4].

Montrons que $\sqrt{2}$ est un irrationnel. Supposons que ce n'est pas le cas et donc que $\sqrt{2}$ est rationnel. Dans ce cas, il existe deux entiers premiers entre eux tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, c'est-à-dire, $p^2 = 2q^2$. Dans ce cas, 2 divise p^2et donc divise p. En écrivant $p = 2p'$, il vient $4p'^2 = 2q^2$c'est-à-dire $2p'^2 = q^2$. Cette égalité implique que 2 divise q. Ainsi 2 divise p et q. Ce qui est absurde puisque p et q sont premiers entre eux. Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

[4]Des gens sont morts à cause de cette démonstration !

Rédiger. Les mathématiques sont un discours. Rédiger des mathématiques consiste à mettre ce discours par écrit pour qu'il puisse être lu et compris par une autre personne. Une bonne rédaction ne doit être ni trop longue, ni trop courte. Il s'agit de décrire le plus précisément possible le raisonnement suivi en justifiant aux maximum les **implications**.
Par ailleurs, la rédaction est purement un exercice d'écrit. Il diffère notamment de ce que l'on peut écrire quand on prend des notes de cours ou quand on fait un cours au tableau où l'oral et l'écrit se mélangent. Même si l'on utilise des notations mathématiques dans le texte, on évitera d'utiliser trop d'abréviations et on essaiera de faire des phrases. Enfin on n'est pas autorisé, sous prétexte de mathématiques, à malmener la grammaire et l'orthographe de la langue dans laquelle on s'exprime. Par exemple supposons que l'on veuille résoudre l'exercice:

> Montrez qu'une fonction dérivable strictement croissante sur un intervalle a une dérivée positive sur cet intervalle.

Si au brouillon on peut écrire:

$$f \nearrow \qquad \frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0 \Longrightarrow f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0$$

Le raisonnement se rédigera de la manière suivante:

> Soit f une fonction dérivable strictement croissante sur l'intervalle I. Comme f est strictement croissante, son taux d'accroissement est strictement positif :
>
> $$\forall x, y \in I \quad \frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0$$
>
> En passant à la limite, on obtient
>
> $$\lim_{x\to y} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0.$$
>
> Et donc, par définition de la dérivée, on a bien $f'(y) \geq 0$ pour tout $y \in I$.

Même des questions plus simples nécessite un peu de rédaction. Par exemple s'il s'agit de résoudre l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$ on ne se contentera pas de:

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \qquad \Delta = 3^2 - 4 = 5 \qquad x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Mais on écrira:

> On calcule le discriminant du trinôme et on trouve $\Delta = 3^2 - 4 = 5$. On en déduit que l'équation a deux solutions $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

ou encore:

> L'équation a pour solutions $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ obtenues en calculant le discriminant du trinôme.

Quelques conseils supplémentaires quant à la rédaction d'exercices ou de problèmes en particulier d'examens.

- Il est inutile de recopier l'énoncé. Le correcteur le connaît en général.
- Il est inutile de recopier et d'encadrer encore une fois le résultat obtenu ou la conclusion à la fin de la question. C'est une répétition sans intérêt.
- Evitez les abréviations comme *bcp, dc, f*: vous ne parlez pas au tableau.
- Lorsque vous traitez un cas avec un long calcul ou avec un raisonnement et qu'un autre cas se résout de manière très analogue, vous pouvez simplement écrire: *Le cas suivant est résolu par des calculs analogues et on trouve...* ou *Le cas suivant se traite de la même manière à ceci près que...* (Evidemment il ne s'agit pas de tricher assurez-vous que c'est bien le cas!)

- En général lorsque des calculs sont longs, essayez de ne donner que les étapes importantes.
- Ecrivez de manière lisible et propre.
- De manière général expliquez ce que vous faîtes lorsque vous utilisez une méthode de calcul ou de raisonnement particulière. Par exemple: *On va échelonner la matrice à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss: (suivent les calculs)* ou *On détermine les coefficients de Bezout à l'aide de l'algorithme d'Euclide: (suivent les calculs)* ou *On va raisonner par l'absurde* ou *On va faire un raisonnement par récurrence sur k.*

Soit

«Soit» (le verbe être conjugué au subjonctif présent) introduit un nouvel objet mathématique et généralement sa notation. Par exemple:

> Soit A un point du plan. Soit x un réel. Soient d et d' deux droites paralléles du plan.

On peut remplacer «Soit» par « Étant donné». Il ne faut pas le confondre avec la conjonction qui permet de distinguer des cas, comme dans: une fonction monotone est, soit croissante, soit décroissante.

Théorème

Un théorème est une **assertion** mathématique qui possède un caractère général important que l'on souhaite distinguer. Le théorème est presque obligatoirement accompagné de sa **démonstration** ou dans certains cas **admis**.
Les théorèmes jouent le rôle central dans les mathématiques. On pourrait presque réduire les mathématiques à la production de théorèmes. Suivant leur importance dans la théorie, on peut aussi les appeler **Propositions** (théorèmes moins importants qui sont néanmoins encore généraux), lemmes (théorèmes généralement moins importants et isolés, qui ne servent qu'à un résultat permettant de démontrer un ou plusieurs théorèmes), **corollaires** (théorèmes conséquences immédiates, par exemple un cas particulier d'un autre théorème).
Les théorèmes portent souvent des noms: théorème du point fixe, théorème des valeurs intermédiaires, théorème de Thales, lemme de Gauss.... L'énoncé d'un théorème peut être schématisé comme suit :

$$P1 \textit{ alors } P2$$

où $P1$ et $P2$ sont une ou plusieurs **assertions** mathématiques. $P1$ est appelé l'**hypothèse** et $P2$ la **conclusion**. Par exemple:

> Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ telle que $f'(c) = 0$.

Traduire.

La *traduction* est une technique fondamentale de la **démonstration**. Lorsque que l'on a reperé les **hypothèses** et la **conclusion** d'un problème, on doit dans un premier effectuer une *traduction* de ces **hypothèses** et de la **conclusion**: la traduction proprement dite consiste à écrire en termes mathématiques le sens des **hypothèses** et de la **conclusion**. Le meilleur moyen de comprendre est un exemple:

> Montrons que la limite d'une somme de deux suites convergentes est la somme des limites.

Une première traduction consiste à écrire:

> Montrons que si $u_n \to l$ et $v_n \to l'$ alors $u_n + v_n \to l'$

On repère ainsi les **hypothèses** et la **conclusion**. On effectue une traduction plus fine des **hypothèses**

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists A \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq A \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon \text{ et } \forall \epsilon > 0 \ \exists A \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq A \Rightarrow |v_n - l'| \leq \epsilon$$

et de la **conclusion**

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists A \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq A \Rightarrow |u_n + v_n - (l + l')| \leq \epsilon.$$

On peut développer encore un peu en se débarrassant des valeurs absolues en écrivant par exemple pour la **conclusion**

$\forall\epsilon > 0\ \exists A \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq A \Rightarrow l + l' - \epsilon \leq u_n + v_n \leq l + l' + \epsilon$.

Une fois que l'on traduit aussi loin que possible les **hypothèses** et la **conclusion**, il est temps de repérer comment relier les **assertions** auxquelles on est parvenu: seule cette étape consiste *à faire des mathématiques*. Un autre exemple:

montrer que le degré de P' où P est un polynome de degré n est $n-1$.

La **quantification** du problème donne: $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ deg(P) = n \Rightarrow deg\left(P^{'}\right) = n-1$. Il s'agit donc de **démontrer** un **pour tout**. La **rédaction** débutera donc par «Soit $P \in \mathbb{R}[X]$». On suppose ensuite «le polynôme de degré n». Comment traduire cette information ? En écrivant que P s'écrit $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$. Voilà pour les **hypothèses**. La **conclusion** affirme que $P^{'}$est de degré $n-1$. Il faut donc parvenir à montrer que $P^{'}$s'écrit $\sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k$ avec $b_{n-1} \neq 0$. On réfléchit un peu, «on fait des maths»... et on se lance dans la **rédaction**.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Supposons P degré n. Il s'écrit alors $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec a_n non nul. Le polynôme dérivé s'écrit alors $P^{'} = \sum_{k=0}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, a_{(k+1)} X^k$. Comme $n a_n \neq 0$ car $a_n \neq 0$, cette écriture assure que $P^{'}$ est de degré $n-1$. Ce qui prouve l'**assertion**.