Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 349–352
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations différentielles

Calcul du groupe de Galois du produit de trois opérateurs différentiels complètement réductibles

Charlotte Hardouin

Institut de mathématiques, théorie des nombres, case 247, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France

Reçu le 14 janvier 2005 ; accepté après révision le 18 juillet 2005

Disponible sur Internet le 2 septembre 2005

Présenté par Bernard Malgrange

Résumé

On donne une description complète du radical unipotent du groupe de Galois d'un opérateur différentiel de type $L_X L_A L_Y$, où L_X, L_A, L_Y sont complètement réductibles. On traite d'abord le cas d'un radical unipotent abélien ; on montre ensuite comment y ramener le cas général. ***Pour citer cet article : C. Hardouin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

Computing the Galois group of a product of three completely reducible operators. In this Note, we give a complete description of the unipotent radical of the differential Galois group of an operator of the form $L_X L_A L_Y$ where L_X, L_A, L_Y are completely reducible. We start with the case where this group has an Abelian unipotent radical; we then show how one can reduce the general case to the above case. ***To cite this article: C. Hardouin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

1. Introduction

Soient (K, ∂) un corps différentiel de caractéristique nulle, de corps des constantes C algébriquement clos, $\widetilde{K}$ une extension de Picard–Vessiot universelle de K et $\mathcal{D}_K = K[\partial]$ l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans K.

Si M est l'espace des solutions dans $\widetilde{K}$ d'une équation différentielle linéaire à coefficients dans K, on désigne par L_M le générateur unitaire de son annulateur dans $\mathcal{D}_K$, par $\mathcal{M}$ le $\mathcal{D}_K$-module $\mathrm{Hom}(\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K L_M, K)$, par K_M (ou K_{L_M}) l'extension de Picard–Vessiot de L_M dans $\widetilde{K}$ et par $G_M = \mathrm{Gal}(K_M/K)$ le groupe de Galois différentiel de l'extension K_M/K, aussi appelé le groupe de Galois de $\mathcal{M}$.

Adresse e-mail : hardouin@math.jussieu.fr (C. Hardouin).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.07.013

Dans le cas d'un opérateur différentiel $L_M = L_X L_A L_Y$ avec L_X, L_A, L_Y complètement réductibles, G_M est muni d'une filtration à trois crans : $W_0(M) = \mathrm{Gal}(K_M/K)$, $W_{-1}(M) = \mathrm{Gal}(K_M/K_X.K_A.K_Y)$ (qui coïncide avec le radical unipotent $R_u(M)$ de G_M), $W_{-2}(M) = \mathrm{Gal}(K_M/K_{L_X L_A}.K_{L_A L_Y})$. On note aussi $Gr_0 = W_0/W_{-1}$, $Gr_{-1} = W_{-1}/W_{-2}$ la graduation de G_M correspondante.

L'étude du groupe de Galois d'un produit de deux opérateurs complètement réductibles, menée par Berman et Singer dans [1], permet de calculer le quotient Gr_{-1}. Le calcul de $R_u(M)$ se ramène donc à celui de $W_{-2}(M)$. Dans ce cadre, il est nécessaire d'introduire une nouvelle structure prolongeant celle des extensions de $\mathcal{D}_K$-modules. Plus précisément, on se placera dans l'ensemble $\mathrm{Extpan}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ des extensions panachées $\mathcal{M}_0$ attachées par Grothendieck [4] à deux extensions simples $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$. Par définition, une telle extension panachée s'inscrit dans un diagramme du type suivant.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & \mathcal{M}_1 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "j"] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "\underline{j}"] & 0\,(1) \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r, "\underline{i}"] & \mathcal{M}_0 \arrow[r, "\underline{\pi}"] \arrow[d, "\rho"] & \mathcal{M}_2 \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\rho}"] & 0\,(\mathrm{I}) \\
 & & \mathcal{X} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 & \\
 & & (\mathrm{II}) & (2) &
\end{tikzcd}$$

On fixe désormais $\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{Y}$ trois modules semi-simples et on note $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{Y})$ l'ensemble des extensions panachées construites sur $\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{Y}$. Son sous-ensemble $\mathrm{Extpan}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ est muni d'une structure de torseur sous le groupe $\mathrm{Ext}_K(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ des classes d'isomorphismes d'extensions de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$, dans la catégorie des $\mathcal{D}_K$-modules. Pour $\mathcal{M}_0$ dans $\mathrm{Extpan}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$, et $\mathcal{U}$ dans $\mathrm{Ext}_K(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, on note $\mathcal{M}_0 * \mathcal{U}$ le translaté de $\mathcal{M}_0$ par $\mathcal{U}$.

Théorème 1.1. *Soit $\mathcal{M}_0$ une extension panachée sur les $\mathcal{D}_K$-modules semi-simples $\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{Y}$.*

(i) *Si le radical unipotent du groupe de Galois G_{M_0} est abélien, il existe une extension $\mathcal{Z}_0$ de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$ telle que le groupe de Galois de $\mathcal{M}_0 * \mathcal{Z}_0$ ait un W_{-2} trivial ; de plus $R_u(Z_0)$ s'identifie, pour une telle extension, à $W_{-2}(M_0)$.*

(ii) *Dans le cas général, soit U le groupe dérivé de $W_{-1}(M_0)$. Il existe une extension panachée $\overline{\mathcal{M}_0}$ dans $\mathcal{E}(\mathcal{X} \times \mathcal{A}, \mathcal{Y}, \mathcal{A})$ et un sous-groupe vectoriel V de $Gr_{-1}(M_0)$ entièrement calculables, tels que $G_{\overline{M_0}}$ ait un radical unipotent abélien, $Gr_{-1}(\overline{M_0}) = Gr_{-1}(M_0)/V$, $Gr_0(\overline{M_0}) = Gr_0(M_0)$ et $W_{-2}(\overline{M_0}) \simeq (W_{-2}(M_0)/U) \times V$.*

La combinaison de ces deux assertions (dont la preuve fait l'objet des Sections 2 et 3 respectivement) fournit une description complète $W_{-2}(M_0)$. Elle généralise les résultats de [3], où $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ étaient supposés triviaux, et permet d'exprimer en terme du $\mathcal{D}_K$-module $\mathcal{M}_0$ lui-même le calcul de $R_u(G_M)$ que fournit l'algorithme général de Hrushovski [5].

2. Calcul de W_{-2} dans le cas d'un radical unipotent abélien

On considère ici une extension panachée $\mathcal{M}_0$ dans $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{Y})$ de *radical unipotent abélien*. On renvoie à [2] pour la description de l'isomorphisme entre $\mathrm{Ext}_K(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ et le groupe de cohomologie $H^1(\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K), \mathrm{Hom}(X, Y))$, qui paramètre les classes d'isomorphismes d'extensions de $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$-modules de X par Y. Ainsi, étant donnée une extension $\mathcal{E}$ de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$, on notera ζ_E un cocycle représentant l'extension dans $H^1(\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K), \mathrm{Hom}(X, Y)))$. On a alors :

Lemme 2.1. *Il existe un morphisme de groupes injectif* $\zeta = \zeta(M_0) : W_{-2}(M_0) \to \mathrm{Hom}(X, Y)$ *et des représentants* $\zeta_{\mathrm{I}}, \zeta_{\mathrm{II}}$ *des éléments de* $\mathrm{Ext}_K(\mathcal{M}_2, \mathcal{Y})$, $\mathrm{Ext}_K(\mathcal{X}, \mathcal{M}_1)$ *que définit* $\mathcal{M}_0$ *tels que*

(i) *L'action de* Gr_0 *est donnée, pour tout* (σ, σ_0) *dans* $W_{-2} \times Gr_0$, *par :* $\zeta_{\mathrm{I}}(\sigma) = \zeta(\sigma) \circ \underline{\rho}$, $\zeta_{\mathrm{II}}(\sigma) = i \circ \zeta(\sigma)$ *et* $\zeta(\sigma_0 \sigma {\sigma_0}^{-1}) = \sigma_0 \zeta(\sigma) {\sigma_0}^{-1}$;
(ii) *pour toute extension* $\mathcal{Z}$ *de* $\mathcal{X}$ *par* $\mathcal{Y}$ *telle que* K_Z *soit contenue dans* K_{M_0}, *il existe un représentant* ζ_Z *de* $\mathcal{Z}$ *dont la restriction à* W_{-2} *vérifie :* $\zeta(M_0 * Z) = \zeta(M_0) + \zeta_Z$.

2.1. Démonstration du Théorème 1.1(i)

2.1.1. Isolement du W_{-2} *de l'extension panachée*

Soit s une section de (2) en tant que suite exacte de $K_{M_1}.K_{M_2}[\partial]$-modules. Considérant le pullback de (I) par s, on obtient une extension $\widetilde{\mathcal{Z}}$ de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$, en tant que $K_{M_1}.K_{M_2}[\partial]$-modules, entièrement soluble dans K_{M_0} et qui vérifie :

Lemme 2.2. *Le groupe* $\mathrm{Gal}(K_{\widetilde{Z}} K_{M_1}.K_{M_2}/K_{M_1}.K_{M_2})$ *coïncide avec* $W_{-2}(M_0)$.

2.1.2. Descente de l'extension $\widetilde{\mathcal{Z}}$ *à* $K_X.K_A.K_Y$

Puisque le radical unipotent de l'extension panachée $\mathcal{M}_0$ est abélien, il est muni d'une structure naturelle de Gr_0-module. On peut donc voir

$$0 \longrightarrow W_{-2} \xrightarrow{\iota} W_{-1} \xrightarrow{\kappa} W_{-1}/W_{-2} \longrightarrow 0$$

comme une suite exacte de Gr_0-modules. Le groupe Gr_0 étant par hypothèse réductif, cette suite exacte se scinde et l'on note r une rétraction de W_{-1} vers W_{-2}, morphisme de Gr_0-modules. Pour tout σ dans W_{-1}, posons $\bar{\zeta}(\sigma) := \zeta_{\widetilde{Z}}(r(\sigma))$. Le cocycle $\bar{\zeta}$ définit un élément de $H^1(W_{-1}, \mathrm{Hom}(X, Y))$, auquel il correspond par équivalence de catégorie un module différentiel $\overline{\mathcal{Z}}$, extension de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$, défini sur $K_X.K_A.K_Y$. De plus, l'image de W_{-1} par le cocycle $\bar{\zeta}$ dans $\mathrm{Hom}(X, Y)$ est l'image de W_{-2} (puisque r est une rétraction), de sorte que $R_u(\overline{Z}) = W_{-2}(M_0)$.

2.1.3. Descente de l'extension $\overline{\mathcal{Z}}$ *au corps de base* K

Considérons la suite exacte de groupes suivante :

$$0 \longrightarrow W_{-1} \xrightarrow{\iota_0} W_0 \xrightarrow{\kappa_0} Gr_0 \longrightarrow 0$$

Elle induit une suite exacte longue d'inflation-restriction en cohomologie (cf. [6]). L'action de W_{-1} étant triviale sur $\mathrm{Hom}(X, Y)$ et la réductivité de Gr_0 entraînant la nullité des groupes de cohomologie $H^1(Gr_0, \mathrm{Hom}(X, Y))$ et $H^2(Gr_0, \mathrm{Hom}(X, Y))$, cette suite d'inflation-restriction fournit un isomorphisme ϕ entre $H^1(W_0, \mathrm{Hom}(X, Y))$ et $H^1(W_{-1}, \mathrm{Hom}(X, Y))^{Gr_0}$. Or, d'après le Lemme 2.1, le cocycle $\bar{\zeta}$ est stable sous l'action de Gr_0. Il lui correspond donc par l'isomorphisme ϕ un élément de $H^1(W_0, \mathrm{Hom}(X, Y))$. L'équivalence de catégories entre représentations de W_0 et équations différentielles à coefficients dans K attache à ce dernier une extension $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$ définie sur K, telle que $\overline{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z} \otimes_K K_X.K_Y.K_A$. En considérant l'opposée $\mathcal{Z}_0$ de $\mathcal{Z}$ dans $\mathrm{Ext}_K(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, on déduit du Lemme 2.2 que le groupe de Galois de $\mathcal{M}_0 * \mathcal{Z}_0$ a un W_{-2} trivial. De plus $R_u(Z_0) \simeq R_u(Z) = W_{-2}(M_0)$, ce qui termine la démonstration du Théorème 1.1(i).

3. Abélianisation du radical unipotent

Partant d'une extension panachée quelconque $\mathcal{M}_0$ dans $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{Y})$, on va lui associer une extension panachée sur les trois objets semi-simples $\mathcal{A} \times \mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{Y}$, dont le radical unipotent est abélien et contient $W_{-2}(M_0)$. Sans perte de généralité (cf. [1]) on peut supposer que le module $\mathcal{X}$ est de rang 1 et trivial. Comme W_{-2} est abélien, le groupe dérivé $U = [W_{-1}, W_{-1}]$ ne dépend que de W_{-1}/W_{-2}, et est donc effectivement calculable. Son image dans $\mathrm{Hom}(X, Y) \simeq Y$ est un sous W_0-module et correspond ainsi à un sous-$\mathcal{D}_K$-module $\mathcal{Y}_2$ de $\mathcal{Y}$. La complète réductibilité du module $\mathcal{Y}$, assure l'existence d'une rétraction de $\mathcal{D}_K$-modules p_2 de $\mathcal{Y}$ sur $\mathcal{Y}_2$. On note p_1 la projection naturelle de $\mathcal{Y}$ sur $\mathcal{Y}/\mathcal{Y}_2 := \mathcal{Y}_1$.

Soit donc $\mathcal{M}_0$ une extension panachée sur $\mathcal{X} = (K, \partial), \mathcal{Y}, \mathcal{A}$, pour laquelle on reprend les notations du diagramme de la Section 1. En poussant la suite exacte (I) par p_1, on obtient un module $\mathcal{M}_{0,1}$ dans $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{M}_2, \mathcal{Y}_1)$ De même, l'image directe de la suite exacte (1) par p_1 (resp. p_2), fournit une extension de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{Y}_1$(resp. $\mathcal{Y}_2$) notée $\mathcal{M}_{1,1}$ (resp. $\mathcal{M}_{1,2}$).

Lemme 3.1. *Le groupe de Galois de K_{M_0} sur $K_{M_{0,1}}.K_{M_{1,2}}$ est le groupe derivé U de W_{-1}.*

En d'autres termes, l'extension $K_{M_{0,1}}.K_{M_{1,2}}$ est l'extension abélienne maximale de $K_X.K_Y.K_A$ contenue dans K_{M_0}. Considérons le module $\overline{\mathcal{M}}_0 := \mathcal{M}_{0,1} \times \mathcal{M}_{1,2}$. Il est naturellement muni d'une structure d'extension panachée sur les objets $\mathcal{X} \times \mathcal{A}, \mathcal{A}, \mathcal{Y}$ et $W_{-1}(\overline{\mathcal{M}}_0)$ est l'abélianisé $W_{-1}(M_0)/U$ de $W_{-1}(M_0)$. Soit de plus $V = \mathrm{Gal}(K_{M_1}.K_{M_2}/K_{M_2}.K_{M_{1,1}}.K_{Y_2})$: il est isomorphe à un sous-groupe, effectivement calculable (au sens de [1], Lemme 2.8) du groupe W_{-1}/W_{-2}. Dans ces conditions, on a : $Gr_{-1}(\overline{M_0}) = Gr_{-1}(M_0)/V$, $Gr_0(\overline{M}_0) = Gr_0(M_0)$ et $W_{-2}(\overline{M}_0) \simeq (W_{-2}(M_0)/U) \times V$. La connaissance de $W_{-2}(\overline{M}_0)$ déduite de l'étude du Paragraphe 2 fournit alors une description complète de $W_{-2}(M_0)$, de la forme $W_{-2}(M_0) \simeq U \times (W_{-2}(\overline{M_0})/V)$.

Références

[1] P.H. Berman, M.F. Singer, Calculating the Galois group of $L_1(L_2(y)) = 0$, L_1, L_2 completely reducible operators, J. Pure Appl. Algebra 139 (1999) 3–23.

[2] D. Bertrand, Extensions de D-modules et groupes de Galois différentiels, in: Lecture Notes in Math., vol. 1454, Springer, 1990, pp. 125–141.

[3] D. Bertrand, Unipotent radicals of differential Galois group and integrals of solutions of inhomogeneous equations, Math. Ann. 321 (2001) 645–666.

[4] A. Grothendieck, Modéles de Néron et monodromie, Lecture Notes in Math., vol. 288, Springer, SGA VII.1, Exposé n°9.

[5] E. Hrushovski, Computing the Galois group of a linear differential equation, Banach Center Publ. 58 (2002) 97–138.

[6] J.-P. Serre, Cohomologie galoisienne, 5ème édition, Lecture Notes in Math., vol. 5, Springer, 1994.