

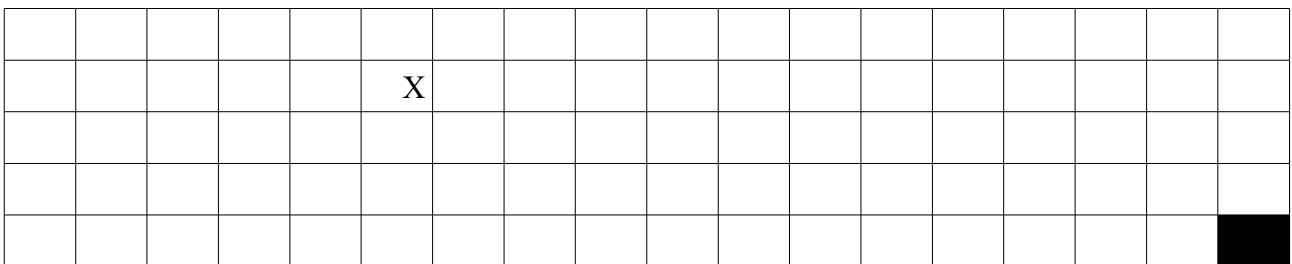
STAGE HIPPOCAMPE DES 7, 8 ET 9 JANVIER 2013

Quelques thèmes pour modéliser les jeux

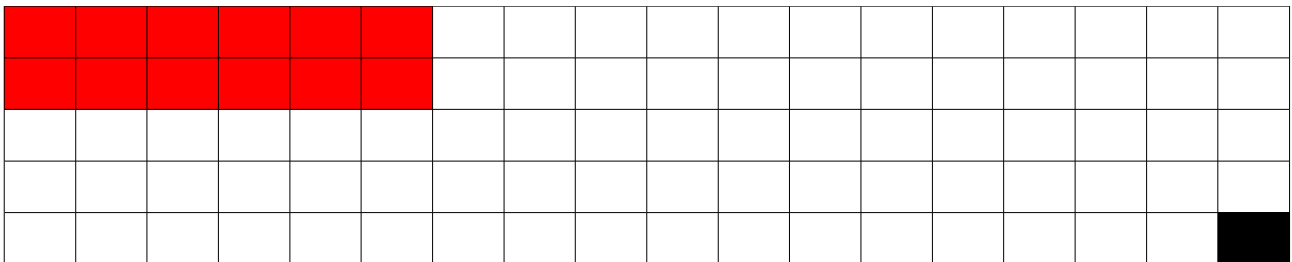
Les thèmes qui vous sont proposés et que vous allez explorer ont tous en commun d'être des jeux. Une question centrale est bien sûr de « comment jouer pour gagner ». Qu'est-ce qu'un gain ? Qu'est-ce qu'une stratégie pour « gagner »? Est-on sûr qu'il existe une stratégie pour gagner ? Les thèmes ci-dessous invitent à ces questions sous différents angles.

THEME 1 : LA TABLETTE DE CHOCOLAT

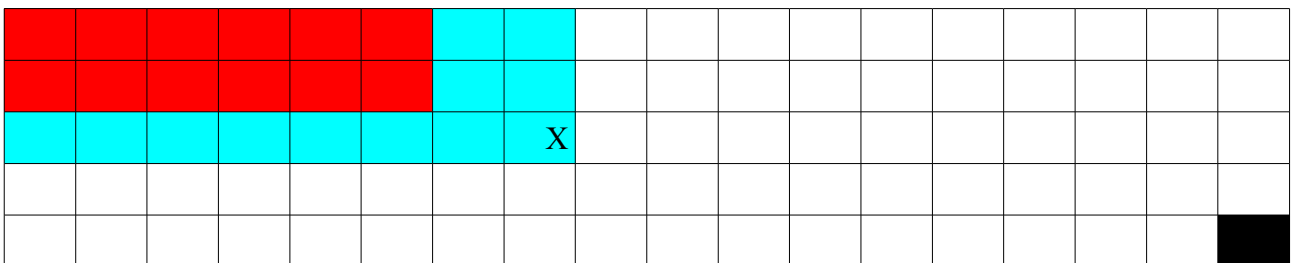
Voici un jeu qui se joue à deux joueurs. On prend une tablette de chocolat rectangulaire. Le premier joueur choisit un carreau excepté celui en bas à droite, par exemple



Il découpe toute la partie supérieure gauche de la tablette (partie coloriée ci-dessous) :



Puis c'est au tour du second joueur de choisir un carreau parmi ceux qui restent et de découper les morceaux correspondants :



On continue ainsi à tour de rôle jusqu'à ce que la tablette ait été enlevée en totalité. Le joueur qui perd est celui qui enlève le carreau en bas à droite de la tablette. L'autre joueur est le gagnant.

Quelques idées à suggérer et à explorer avec les élèves :

- jouer quelques parties entre vous;
- pouvez-vous trouver une stratégie gagnante pour le premier joueur ? (note : cette question

THEME 2 : LE PROBLEME DE L'ANGE

Voici un jeu qui se joue à deux joueurs (un « ange » et un « démon »). On considère un échiquier infini. L'ange choisit une case, par exemple la case (0,0). Le démon choisit trois autres cases contiguës de la case choisie par l'ange. L'ange choisit alors une nouvelle case avec les règles suivantes :

- la nouvelle case doit être différente des cases déjà choisies par le démon (elles sont « détruites ») ;
- la nouvelle case doit être contiguë de la case précédente de l'ange ;
- l'ange ne peut revenir en arrière : la nouvelle case doit être distincte des cases précédemment choisies par l'ange.

Le démon joue à nouveau : il choisit trois nouvelles cases inoccupées, jouxtant la dernière case choisie par l'ange.

L'ange et le démon jouent ainsi à tour de rôle, tant que l'ange a toujours une nouvelle case qu'il peut choisir.

Question : le démon peut-il encercler l'ange, c'est-à-dire le bloquer (de sorte qu'il ne puisse plus jouer), en un nombre fini de coups ? A l'inverse, l'ange peut-il toujours s'échapper ?

Si oui, pourquoi ? Si non, pourquoi ?

Quelques idées à suggérer et à explorer avec les élèves :

- faire quelques parties entre vous ;
- Supposons que le démon gagne : à quoi ressemble la configuration au dernier coup du démon ?
- En cas de difficulté : augmenter, le cas échéant, le nombre de cases que le démon joue (3 dans l'énoncé original).
- Variantes : parmi les très nombreuses variantes du jeu, quelques-unes sont plus accessibles à explorer :
 - soit n un nombre compris entre 1 et 8. Pour chaque n , nous avons une variante du jeu, à savoir le démon joue n cases à chaque coup (au lieu de 3). Quel est le plus petit n pour lequel il existe une stratégie gagnante pour le démon ?
 - on peut aussi modifier la proximité imposée entre les cases choisies par le démon et la dernière case choisie par l'ange.

THEME 3 : LE PROBLEME DU PRISONNIER

Voici un jeu à deux joueurs qui peut s'énoncer sous la forme suivante. Deux prisonniers disons Bob et Alice, complices d'un crime sont retenus dans des cellules distinctes sans possibilité de communication. L'autorité pénitentiaire n'a pas de preuve formelle que les prisonniers sont criminels. Aussi elle propose à chaque prisonnier de dénoncer l'autre. Les règles sont les suivantes :

- si l'un des prisonniers dénonce l'autre (et l'autre se tait), alors le dénonciateur est remis en liberté tandis que l'autre écope d'une peine de prison maximale de 20 ans.
- Si les deux prisonniers se dénoncent entre eux, alors ils écotent chacun d'une peine de 10 ans de prison.
- Si les deux prisonniers gardent le silence, alors ils écotent d'une peine minimale d'un an de prison (faute de preuve).

Le même principe se retrouve dans d'autres situations (deux sociétés concurrentes, deux pays voisins, etc). L'objectif de ce thème est d'étudier l'itération de ce jeu.

Pour ce thème, une des difficultés est la modélisation. Voici un ordre possible de progression :

1. Pour commencer, il sera intéressant de se poser quelques questions simples. Que signifie « gagner » (ou « perdre ») dans ce jeu ? Si l'un des joueurs « gagne », est-ce que l'autre « perd » automatiquement ?
2. Ensuite, avant de modéliser à proprement parler, on peut se demander ce qui se passe (rationnellement...) dans la tête de chaque prisonnier. Chaque prisonnier peut décider de son comportement : en fonction des (deux) comportements possibles de l'autre, quel est le comportement le plus avantageux pour moi ? Essayez de décrire le raisonnement. Naturellement, le second prisonnier fait le même raisonnement. Quel est le résultat attendu dans ce cas si les deux prisonniers suivent leur raisonnement ? Est-ce un résultat optimal ? Pourquoi ?
3. Comprenez vous pourquoi ce problème est appelé « le dilemme du prisonnier » ?

On passe ensuite à l'itération. Au lieu de deux prisonniers, on peut imaginer deux concurrents qui ont chacun les mêmes options (par exemple, baisser ou augmenter le prix de l'article qu'ils vendent). Ils décident séparément au même moment, mais chacun apprend du comportement de l'autre (par le résultat de la décision précédente).

1. Commençons par jouer le jeu deux fois disons pour $t = 1$ et $t = 2$. Dans ce cas, Bob connaît le comportement d'Alice au premier tour ($t = 1$) avant de jouer au second tour ($t = 2$). Et vice-versa. Le gain d'un joueur est la somme des gains au premier et au second tour.
2. Commencer par jouer des parties entre vous.
3. A partir de là, modéliser le comportement de chaque joueur. Pour $t = 1$, Bob fait son choix (sans information sur Alice). Pour $t = 2$, Bob connaît le choix d'Alice à $t = 1$, et également évidemment son propre choix à $t = 1$. Pouvez-vous dessiner un « arbre du jeu » ? Combien de résultats différents sont possibles ? Quels sont les gains ?
4. Combien de **stratégies** Bob a-t-il ? (à ce point, il doit y avoir consensus sur la définition) Trouver une notation pour les stratégies. Pouvez-vous parmi les stratégies de Bob identifier (par des phrases) une stratégie particulière, par exemple 'un prêt pour un rendu ' (ou la stratégie du « donnant donnant »).
5. Présenter le résultat des stratégies de Bob et d'Alice sous forme de tableau.

En fonction de l'avancement du groupe, proposer une itération plus longue du jeu (par exemple sur 5 ou 10 tours). Elaborez vos propres stratégies. Testez une stratégie contre une autre, par exemple contre la stratégie du « donnant donnant », critiquez les.