Résumé

Donnons-nous un système différentiel

$$(S) \qquad \frac{dY}{dx} = A(x)Y$$

où, selon que l'étude sera globale ou locale, les coefficients de la matrice A seront des fonctions rationnelles de x ou des germes de fonctions méromorphes en zéro. À l'instar de la théorie classique, le groupe de Galois différentiel G de (S) rend compte de la résolubilité du systèmes et des relations algébriques entre ses solutions. La monodromie en particulier fournit des éléments de G. Si le système est à singularité(s) régulière(s), ses solutions sont à croissance modérée au voisinage de chaque singularité : ce sont soit des fonctions analytiques, soit des fonctions multiformes dont l'expression peut contenir $\log(x)$ et des puissances x^{α}, $\alpha \in \mathbb{C}$. Dans ce cas les automorphismes de monodromie engendrent un sous-groupe Zariski dense de G (théorème de Schlesinger) ce qui à son tour, moyennant la version faible du problème de Riemann-Hilbert, permet de résoudre le problème inverse sur $\mathbb{C}(x)$ (théorème de Tretkoff : tout groupe linéaire algébrique sur $\mathbb{C}$ est réalisable comme groupe de de Galois différentiel sur $\mathbb{C}(x)$).

Cassidy et Singer ont développé une théorie de Galois pour les systèmes différentiels linéaires dépendant de paramètres auxiliaires t_i. Le groupe de Galois associé à ces systèmes est appelé *groupe de Picard-Vessiot paramétré* (PVP). C'est un groupe algébrique différentiel, qui rend compte des relations polynomiales tant algébriques que différentielles (par rapport aux paramètres t_i) entre les solutions. Ce point de vue galoisien sur les systèmes à paramètres permet en particulier d'interpréter algébriquement le lien entre l'isomonodromie et les systèmes intégrables : l'intégrabilité d'un système linéaire d'EDP en x et les t_i se lira sur le groupe de PVP, qui dans ce cas est constant par rapport aux paramètres.

Premier exposé : Il sera consacré aux généralités de la théorie de Picard-Vessiot paramétrée de Cassidy et Singer.

Deuxième exposé : Le calcul d'un groupe de Galois, classique ou différentiel sans paramètre, est en général très compliqué (même s'il est théoriquement possible, comme l'a démontré Hrushovski) et on en connaît très peu d'exemples. Néanmoins, pour les équations différentielles non paramétrées du second ordre, l'algorithme de Kovacic permet de décider si une équation est résoluble ou non et, à cet effet, de calculer de manière effective son groupe de Galois différentiel. Nous montrerons comment on peut généraliser cet algorithme aux équations paramétrées. Nous verrons également comment la théorie de PVP permet de simplifier la définition de systèmes intégrables.

Troisième exposé : Nous donnerons un analogue paramétré des théorèmes de Schlesinger et Tretkoff. Puis nous illustrerons le lien entre monodromie paramétrée et intégrabilité par l'exemple de l'équation de Darboux-Halphen, une équation de la physique qui à l'origine résolvait un problème de géométrie de Darboux sur les surfaces orthogonales. L'équation de Darboux-Halphen s'avère être la condition d'intégrabilité d'une "déformation projectivement isomonodromique" que l'on peut décrire en termes purement algébriques à l'aide du groupe de PVP.

Quatrième exposé : Donnons-nous un système différentiel

$$(S) \qquad \frac{dY}{dx} = A(x)Y$$

où les coefficients de la matrice A sont des germes de fonctions méromorphes. Le "théorème de densité" de Ramis dit que le groupe engendré par la monodromie, le tore exponentiel et les automorphismes de Stokes, est Zariski-dense dans le groupe de Galois différentiel. Nous montrerons comment on peut étendre ce théorème à la théorie de Picard-Vessiot paramétrée. En particulier, nous verrons qu'un système différentiel linéaire paramétré est complètement intégrable si et seulement si la monodromie et les automorphismes de Stokes sont constants.