Connexions plates logarithmiques de rang deux sur le plan projectif complexe

Gaël Cousin

4 octobre 2012

Connexions

Soit B une variété complexe lisse. Soit V un fibré vectoriel de rang 2 sur B et $\mathbf{V}$ le faisceau de ses sections.

Définition

Une *connexion méromorphe* sur V est un morphisme $\mathbb{C}$-linéaire

$$\nabla : \quad \mathbf{V} \quad \to \quad \mathcal{M}^1_B \otimes_{\mathcal{O}} \mathbf{V}$$

qui vérifie l'identité de Leibniz suivante :

Soit B une variété complexe lisse. Soit V un fibré vectoriel de rang 2 sur B et $\mathbf{V}$ le faisceau de ses sections.

Définition

Une *connexion méromorphe* sur V est un morphisme $\mathbb{C}$-linéaire

$$\nabla : \quad \mathbf{V} \quad \to \quad \mathcal{M}^1_B \otimes_{\mathcal{O}} \mathbf{V}$$

qui vérifie l'identité de Leibniz suivante : pour toute section locale (f, s) de $\mathcal{O} \times \mathbf{V}$, on a

$$\nabla(f \cdot s) = df \cdot s + f \cdot \nabla s.$$

Riemann-Hilbert

Théorème (Deligne)

Soit B une variété complexe lisse, D une hypersurface de B à croisements normaux et

$$\rho : \pi_1(B \setminus D) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

un morphisme de groupes.
Alors il existe une connexion plate ∇ à pôles logarithmiques, de lieu polaire contenu dans D, telle que $\rho_\nabla = \rho$.

Théorème (Deligne)

Soit B une variété complexe lisse, D une hypersurface de B à croisements normaux et

$$\rho : \pi_1(B \setminus D) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

un morphisme de groupes.
Alors il existe une connexion plate ∇ à pôles logarithmiques, de lieu polaire contenu dans D, telle que $\rho_\nabla = \rho$.

Corollaire (Loray-Pereira)

Si $B = \mathbb{P}^2$ on peut enlever l'hypothèse de croisement normaux.

Corlette-Simpson

Théorème (Corlette-Simpson)

Soient X *une variété complexe lisse quasi-projective et* $\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *une représentation Zariski-dense et quasiunipotente à l'infini.*

Corlette-Simpson

Théorème (Corlette-Simpson)

Soient X une variété complexe lisse quasi-projective et $\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ une représentation Zariski-dense et quasiunipotente à l'infini.
Alors

- *ρ factorise projectivement par une courbe ou ...*

Corlette-Simpson

Théorème (Corlette-Simpson)

Soient X une variété complexe lisse quasi-projective et $\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ une représentation Zariski-dense et quasiunipotente à l'infini.
Alors

- *ρ factorise projectivement par une courbe ou*
- *ρ est tiré en arrière par une application $f : X \to H$ d'une des représentations tautologiques d'un polydisk Shimura D-M stack H.*

Proposition-clé

Proposition

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage réduit sur une surface projective lisse.
Si

- $\nu(\mathcal{F}) = 1$.
- $\mathcal{F}$ *est transversalement projectif :* $\mathcal{F} = \sigma^*\mathcal{R}$.

Proposition-clé

Proposition

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage réduit sur une surface projective lisse.
Si

- $\nu(\mathcal{F}) = 1$.
- $\mathcal{F}$ *est transversalement projectif :* $\mathcal{F} = \sigma^* \mathcal{R}$.
- $\mathcal{R}$ *non pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe.*

Proposition-clé

Proposition

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage réduit sur une surface projective lisse.
Si

- $\nu(\mathcal{F}) = 1$.
- $\mathcal{F}$ *est transversalement projectif :* $\mathcal{F} = \sigma^* \mathcal{R}$.
- $\mathcal{R}$ *non pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe.*
- *La monodromie de* $\mathcal{R}$ *n'est pas virtuellement abélienne.*

Proposition-clé

Proposition

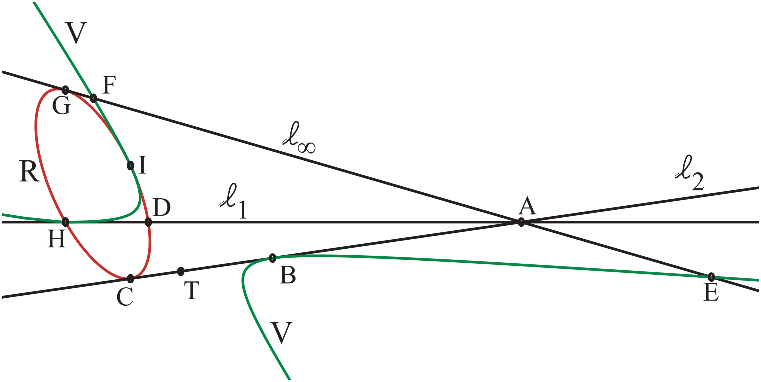
Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage réduit sur une surface projective lisse.
Si

- $\nu(\mathcal{F}) = 1$.
- $\mathcal{F}$ *est transversalement projectif :* $\mathcal{F} = \sigma^*\mathcal{R}$.
- $\mathcal{R}$ *non pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe.*
- *La monodromie de* $\mathcal{R}$ *n'est pas virtuellement abélienne.*

Alors $\mathcal{F}$ *est un feuilletage modulaire.*

Lieu polaire de $\tilde{\mathcal{R}}$

Figure: Lieu polaire



$\pi_1(\tilde{\mathbb{P}^2} \setminus \tilde{D})$ est le groupe donné par les générateurs $\{\alpha, \gamma, t, u, v, w\}$ et les relations :

$$\begin{cases} tuvw = 1 \\ \alpha^{-1} t \alpha = t \\ \alpha^{-1} v \alpha = u \\ \alpha^{-1} w \alpha = w \\ v = (vw)^3 v (vw)^{-3} \\ \gamma^{-1} t \gamma = (vw)^{-2} w (vw)^2 \\ \gamma^{-1} u \gamma = tut^{-1} \\ \gamma^{-1} w \gamma = \left(t(wvw)^{-1}(vw)^2\right) t \left(t(wvw)^{-1}(vw)^2\right)^{-1} \end{cases}$$

Groupe fondamental

$\pi_1(\tilde{\mathbb{P}^2} \setminus \tilde{D})$ est le groupe donné par les générateurs $\{\alpha, \gamma, t, u, v, w\}$ et les relations :

$$\begin{cases} tuvw = 1 \\ \alpha^{-1}t\alpha = t \\ \alpha^{-1}v\alpha = u \\ \alpha^{-1}w\alpha = w \\ v = (vw)^3 v (vw)^{-3} \\ \gamma^{-1}t\gamma = (vw)^{-2} w (vw)^2 \\ \gamma^{-1}u\gamma = tut^{-1} \\ \gamma^{-1}w\gamma = \left(t(wvw)^{-1}(vw)^2\right) t \left(t(wvw)^{-1}(vw)^2\right)^{-1} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ monodromie de $\tilde{\mathcal{R}}$.

Proposition-clé

Proposition

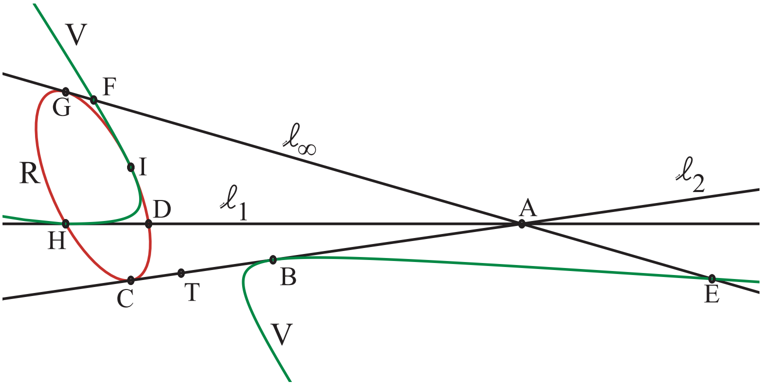
Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage réduit sur une surface projective lisse.
Si

- $\nu(\mathcal{F}) = 1$.
- $\mathcal{F}$ *est transversalement projectif :* $\mathcal{F} = \sigma^*\mathcal{R}$.
- $\mathcal{R}$ *non pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe.*
- *La monodromie de* $\mathcal{R}$ *n'est pas virtuellement abélienne.*

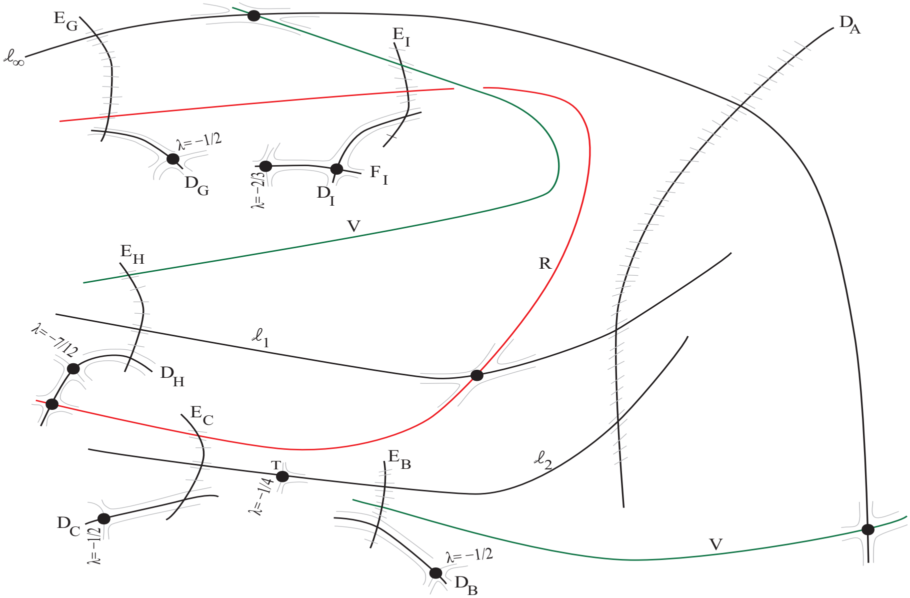
Alors $\mathcal{F}$ *est un feuilletage modulaire.*

Avant désingularisation

Figure: Lieu polaire avant désingularisation



Après désingularisation



Théorème

La surface bifeuilletée $(\mathbb{P}^2, \{\mathcal{F}_\omega, \mathcal{G}_\tau\})$ *est un modèle birationnel d'une surface modulaire de Hilbert munie de ses feuilletages modulaires, où*

- $\omega = -12y(1+3y)(3x-y)dx + \left[(10-18x)y^2 - 9x(18x-5)y - 9x^2(9x-2)\right]dy$

Théorème

La surface bifeuilletée $(\mathbb{P}^2, \{\mathcal{F}_\omega, \mathcal{G}_\tau\})$ *est un modèle birationnel d'une surface modulaire de Hilbert munie de ses feuilletages modulaires, où*

- $\omega = -12y(1+3y)(3x-y)dx + \left[(10-18x)y^2 - 9x(18x-5)y - 9x^2(9x-2)\right] dy$
- $\tau = \Psi^*\omega$.

Théorème

Théorème

La surface bifeuilletée $(\mathbb{P}^2, \{\mathcal{F}_\omega, \mathcal{G}_\tau\})$ *est un modèle birationnel d'une surface modulaire de Hilbert munie de ses feuilletages modulaires, où*

- $\omega = -12y(1+3y)(3x-y)dx$
  $+ \left[(10-18x)y^2 - 9x(18x-5)y - 9x^2(9x-2)\right] dy$
- $\tau = \Psi^*\omega.$
- $\Psi : (x,y) \mapsto \left(\frac{3\,y(3\,y+13)x - y(7\,y+9)}{(135\,y+9)x - 3\,y(3\,y+13)}, y\right)$ *est une involution birationnelle de* $\mathbb{P}^2$.

Théorème

Théorème

En relevant les feuilletages précédents par le revêtement double

$$(u,v) \mapsto (u, \frac{-v^2}{3v^2+1}),$$

on obtient le couple de feuilletages modulaire associés à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{3}])$.

Choix de la section : éléments de réponse

Théorème

La structure transverse minimale $(\mathcal{R}, \sigma)$ *de tout feuilletage modulaire de Hilbert* $\mathcal{F}$ *est donnée par un feuilletage de Riccati à pôles logarithmiques.*

Choix de la section : éléments de réponse

Théorème

La structure transverse minimale $(\mathcal{R}, \sigma)$ *de tout feuilletage modulaire de Hilbert* $\mathcal{F}$ *est donnée par un feuilletage de Riccati à pôles logarithmiques.*

- *Le lieu polaire de* $\mathcal{R}$ *coïncide avec les courbes invariantes de* $\mathcal{F}$.

Choix de la section : éléments de réponse

Théorème

La structure transverse minimale $(\mathcal{R}, \sigma)$ *de tout feuilletage modulaire de Hilbert* $\mathcal{F}$ *est donnée par un feuilletage de Riccati à pôles logarithmiques.*

- *Le lieu polaire de* $\mathcal{R}$ *coïncide avec les courbes invariantes de* $\mathcal{F}$.
- *les exposants* θ *sont des rationnels contenus dans* $]-1,1[$.

Choix de la section : éléments de réponse

Théorème

La structure transverse minimale $(\mathcal{R}, \sigma)$ *de tout feuilletage modulaire de Hilbert* $\mathcal{F}$ *est donnée par un feuilletage de Riccati à pôles logarithmiques.*

- *Le lieu polaire de* $\mathcal{R}$ *coïncide avec les courbes invariantes de* $\mathcal{F}$.
- *les exposants* θ *sont des rationnels contenus dans* $]-1, 1[$.
- *La section* σ *est holomorphe et elle rencontre les singularités de* $\mathcal{R}$ *exactement au dessus des singularités de* $\mathcal{F}$ *qui ne sont pas à l'intersection de deux de ses courbes rationnelles invariantes.*

Choix de la solution : corps de définition de la monodromie

Proposition

1. *Parmi les solutions sporadiques irréductibles non pull-back de (PVI) qui sont paramétrées par* $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1$ *seules les suivantes (et leurs Galois conjuguées) ont un groupe de monodromie* G *dont le corps des traces* $F = \mathbb{Q}(trace(G))$ *est une extension au plus quadratique de* $\mathbb{Q}$*.*
   - $[2, 3], F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$;
   - $[3, 3], F = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$;
   - $[9, 3], F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$;
   - $[16, 1], F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Choix de la solution : corps de définition de la monodromie

Proposition

1. *Parmi les solutions sporadiques irréductibles non pull-back de (PVI) qui sont paramétrées par* $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1$ *seules les suivantes (et leurs Galois conjuguées) ont un groupe de monodromie* G *dont le corps des traces* $F = \mathbb{Q}(trace(G))$ *est une extension au plus quadratique de* $\mathbb{Q}$.
   - $[2, 3], F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$;
   - $[3, 3], F = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$;
   - $[9, 3], F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$;
   - $[16, 1], F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.
2. *De plus,* G *est alors défini sur une extension totalement imaginaire de* F.

Choix de la solution : corps de définition de la monodromie

Proposition

1. *Parmi les solutions sporadiques irréductibles non pull-back de (PVI) qui sont paramétrées par* $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1$ *seules les suivantes (et leurs Galois conjuguées) ont un groupe de monodromie* G *dont le corps des traces* $F = \mathbb{Q}(trace(G))$ *est une extension au plus quadratique de* $\mathbb{Q}$.
   - $[2,3], F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$;
   - $[3,3], F = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$;
   - $[9,3], F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$;
   - $[16,1], F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.
2. *De plus,* G *est alors défini sur une extension totalement imaginaire de* F.
3. *En outre, si une solution sporadique irréductible non pull-back de (PVI) qui n'est pas paramétrée par* $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1$ *a un corps de trace* F *de degré* ≤ 2 *sur* $\mathbb{Q}$ *alors* $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.