

# Une approche de l'isomonodromie non-linéaire.

Journée isomonodromique 22 Février 2013.

- ▷ Définition de feuilletage lisse sur une surface complexe par submersions locales. Cas singulier. Feuilletage induit par une 1-forme différentielle.
- ▷ Pseudo-groupes tangent et transverse. Equivalence de pseudo-groupes et espace des feuilles. Transversale complète et calcul du pseudo-groupe transverse.
- ▷ Réduction des singularités et représentations d'holonomies. Générateurs du pseudo-groupe transverse.
- ▷ Construction de déformations isomonodromiques par chirurgie dans une réduction des singularités. Lien à l'intégrabilité. Exemples explicites.
- ▷ Un exemple d'équation de Schlesinger non-linéaire.

Ces notes d'exposé ont été rédigées à l'occasion d'une session des journées isomonodromiques à l'I.M.T. le 22 février 2013 organisées par Charlotte Hardouin. Ces notes sont volontairement parcellaires car l'objectif est de présenter la position du problème relatif à l'isomonodromie non linéaire. Qu'on se le dise, à l'heure actuelle, *isomonodromie non linéaire* n'est qu'une expression qui peut recouvrir un grand nombre de problèmes et de questions plus ou moins bien posées. Ce qui suit est sans doute l'approche la plus naïve que l'on puisse imaginer mais comme c'est aussi une première modeste tentative...

La référence essentielle est le livre *Pseudo-groupe transverse d'une singularité de feuilletage du plan complexe* de Frank Loray.

## 1. INTRODUCTION.

Un théorème de Sibuya affirme qu'une déformation de système linéaire sur  $\mathbb{P}^1$  est isomonodromique au sens où la classe de conjugaison des représentations de monodromie est constante dès que sont satisfaites deux propriétés de nature bien différentes: l'une assure une certaine constance du type topologique des singularités de la déformation et l'autre est une propriété d'intégrabilité de la déformation. Une approche possible du problème de l'isomonodromie non-linéaire consiste à essayer de définir des notions *ad-hoc* de façon à obtenir un simili théorème de Sibuya pour les équations non-linéaires. Rappelons le résultat de Sibuya.

**Theorem.** (Sibuya, 1990) Considérons un système de la forme

$$\partial_x Y = A(x, t) Y \quad (S)$$

où  $t = (t_1, \dots, t_r) \mapsto A(x, t)$  est une fonction analytique de  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^r$  dans l'espace  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}(x))$ . On suppose que

- (1) le lieu singulier est contenu dans le produit  $\bigcup_{i=1}^n D_i \times \mathcal{U} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathcal{U}$  où chaque  $D_i$  est un disque.
- (2) le système (S) peut-être complété en un système intégrable

$$\left\{ \begin{array}{l} (S) \\ \partial_{t_i} Y = B_i(x, t) Y. \end{array} \right.$$

Alors le système (S) est **isomonodromique**.

## 2. DÉFINITION DE FEUILLETAGES ET DE FEUILLES.

**Definition 1.** Un feuilletage régulier de codimension 1 sur une variété complexe  $M$  est la donnée d'un recouvrement dénombrable  $M = \bigcup U_i$  et d'une famille de submersions locales  $H_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{C}$  telle que

$$H_i = \phi_{ij} \circ H_j.$$

Les fonctions de transitions sont les  $\phi_{ij} : H_j(U_i \cap U_j) \rightarrow H_i(U_i \cap U_j)$ . En somme, l'existence de ces fonctions de transition assure que toute courbe de niveaux de  $H_i$  est localement sur  $U_i \cap U_j$  une courbe de niveau de  $H_j$ , c'est juste la valeur du niveau qui change et qui change par  $\phi_{ij}$ . De cette façon, on peut recoller les niveaux locaux pour obtenir des sous-variétés plongées mais pas forcément proprement plongées car leurs images peuvent être denses.

Un feuilletage singulier est un feuilletage régulier sur  $M$  privé d'une sous-variété qui sera l'ensemble singulier.

**Exemple 2.** Soit  $f$  une fonction holomorphe définie sur un ouvert de  $\mathbb{C}^n$ . Alors  $f$  est une submersion sur l'ouvert privé d'une sous-variété analytique de l'ouvert définie par

$$\nabla f = 0.$$

Ici, il y a donc un unique ouvert de définition et une unique submersion. Les feuilles sont les composantes irréductibles des niveaux de  $f$ .

**Exemple 3.** Soit une équation linéaire  $y' = A(x)y$  où  $A$  est une fraction rationnelle. Alors les graphes des solutions de cette équation définissent un feuilletage de dimension 1 sur  $\Sigma \times \mathbb{P}_1 \setminus \{A(x) = \infty\}$  où  $\Sigma$  est un revêtement au dessus de  $\mathbb{P}_1 \setminus \{A(x) = \infty\}$ .

**Exemple 4.** Plus généralement, une forme différentielle  $\Omega$  sur  $M$  vérifiant la condition d'intégrabilité

$$\Omega \wedge d\Omega = 0$$

détermine un feuilletage de codimension 1. Les feuilles sont les courbes intégrales de cette forme. Précisément, elle définit un feuilletage de la façon suivante: on considère  $C = \{\Omega = 0\}$ . C'est le lieu singulier. En dehors de  $C$  et en coordonnées locales  $(x, y)$   $p = (0, 0)$ , la forme différentielle  $\Omega$  peut s'écrire

$$\Omega = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i$$

avec  $a_1(0) \neq 0$ . On considère les champs de vecteur pour  $i \geq 2$

$$X_i = \partial_{x_i} - \frac{a_i(x)}{a_1(x)} \partial_{x_1}$$

qui sont tangents à  $\Omega(X) = 0$ . L'hypothèse d'intégrabilité de la forme  $\Omega$  est équivalente aux relations de commutation

$$[X_i, X_j] = 0.$$

On pose alors

$$\phi(x, y) = \exp([x_n] X_n) \circ \cdots \circ \exp([x_2] X_2)(x_1, 0)$$

où  $\exp([t] X)$  désigne le flot de  $X$  au temps  $t$ . Si l'on considère une courbe intégrale du champ  $\partial_{x_i}$  c'est une courbe qui s'écrit

$$\{x_1 = cst, \dots, x_{i-1} = cst, x_{i+1} = cst, \dots, x_n = cst\}$$

donc son image par  $\phi$  est la courbe intégrale de  $X_i$ . Ainsi il existe une unité  $u_i$  telle que

$$\Phi^* X_i = u_i(x) \partial_{x_i}.$$

et donc

$$\Phi^* \Omega = u_1(x) dx_1.$$

On considère alors la submersion définie par  $((x) \mapsto x_1) \circ \Phi$ . Si on le fait localement pour un recouvrement, on obtient bien des fonctions de transitions car  $(\Phi_i \circ \Phi_j^{-1})^* dx_1 = u(x) dx_1$ . Donc

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}(x) = (\phi_{ij}(x_1), \dots)$$

Les  $\phi_{ij}$  constituent les fonctions de transition.

**Exemple 5.** Sur  $\mathbb{P}^2$ , l'espace projectif complexe de dimension 2, un feuilletage est donnée par une forme différentielle complexe polynomiale de trois variable homogène qui vérifie l'identité de Euler assurant que le champ radial est tangent aux feuilles,

$$\omega = a(x, y, z)dx + b(x, y, z)dy + c(x, y, z)dz \text{ avec } a(x, y, z)x + b(x, y, z)y + c(x, y, z)z = 0$$

Sous cette hypothèse la forme est automatiquement intégrable et le feuilletage qu'elle définit sur  $\mathbb{C}^3$  descend sur  $\mathbb{P}^2$  car les droites issues de l'origine sont invariantes dans la mesure où le champ radial est tangent.

### 3. PSEUDO GROUPES TANGENTS ET TRANSVERSES.

On va associer à un feuilletage deux pseudo-groupes. On rappelle la définition.

**Définition.** Soit  $M$  une variété complexe. Un *pseudo-groupe*  $G$  sur  $M$  est une collection

$$G = \{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i\}$$

telle que  $\varphi_i$  est un difféomorphisme holomorphe entre les ouverts  $U_i$  et  $V_i$  de  $M$ . On demande par ailleurs que

- (1)  $G$  soit stable par inverse.
- (2)  $G$  soit stable par composition lorsque cette composition est possible.
- (3)  $G$  soit stable par restriction.
- (4)  $G$  soit stable par recollement.

On considère une collection maximale de submersion locale qui définissent le feuilletage. On considère pour chaque ouvert de cette collection, la collection des germes de difféomorphismes qui laissent invariant chaque feuille locale. On appelle le pseudo-groupe tangent le pseudo-groupe engendré par cette collection. Ce pseudo-groupe est très riche et contient *toute la dynamique* du feuilletage, même la dynamique tangentielle donc peu intéressante. Pour en extraire un pseudo-groupe moins riche mais qui contient la seule information qui nous intéresse on fait la construction suivante: on considère une transversale complète, c'est-à-dire, une famille dénombrable de disques disjoints qui sont transverses au feuilletage

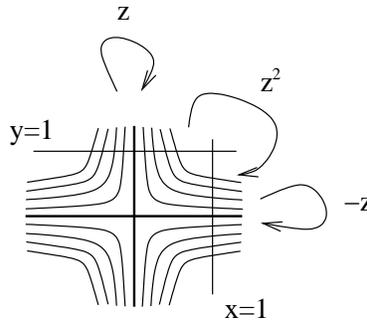
$$T = \bigcup_{i \in I} D_i$$

et l'on regarde sur  $T$  la restriction du pseudo-groupe tangent à  $T$ , c'est-à-dire, le pseudo-groupe sur  $T$  engendré par les éléments du pseudo-groupe tangent  $\phi$  tel qu'il existe  $i$  et un ouvert de  $U$  de  $D_i$  tel que

$$\phi(U) \subset T.$$

La variété  $T$  munie du pseudo-groupe ainsi défini s'appelle *la structure transverse*. C'est elle qui va jouer le rôle de la monodromie. La différence avec le cas linéaire est que cette structure transverse n'est pas pour ainsi dire un objet aussi riche qu'une représentation de groupes. En théorie linéaire classique, on a une représentation de monodromie qui est plus riche que la simple image de cette représentation: ici, la structure transverse est obtenue directement comme l'image d'une représentation d'un hypothétique groupe. Ce groupe devrait être quelque chose comme un *super*  $\Pi^1$  de l'espace ambiant. Pour le cas d'une singularité ou d'un feuilletage sur une surface au voisinage d'un diviseur compact, cette question a été résolue par Jean-François Mattei et David Marin: la réponse est hautement non triviale.

**Exemple 6.** Soit  $f$  définie par  $f(x, y) = x^2 y$  sur  $\mathbb{C}^2$ . Alors le pseudo-groupe engendré par le difféomorphisme  $\sigma : (x, y) \rightarrow (-x, y)$  est contenu dans le pseudo-groupe tangent mais il ne laisse pas invariant la feuille locale. Il est obtenu par recollement de proche en proche de difféomorphismes qui laissent invariant la feuille locale en faisant le tour de l'axe  $x = 0$ .



C'est le prototype d'une application d'holonomie. La structure transverse est donnée par le diagramme suivant: c'est la réunion de deux copies disjointes de  $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \{x = 1\} \coprod \mathbb{C} = \{y = 1\}$$

avec le pseudo groupe engendré par les transformations  $\text{Id}, z \rightarrow -z$  et  $z \rightarrow z^2$  qui recolle les deux copies de  $\mathbb{C}$ . L'espace des orbites de ce pseudo-groupe est la réunion de  $\mathbb{C}$  et d'un point. La présence de ce point isolé vient de ce que le pseudo-groupe distingue les deux composantes irréductibles du niveau 0 de la fonction  $f$ ; ce que ne fait pas la fonction  $f$  elle-même. Ici, les deux origines des  $\mathbb{C}$  ne sont pas identifiés dans le quotient car l'application  $z \rightarrow z^2$  n'est pas un difféomorphisme local en  $z = 0$ .

#### 4. EQUIVALENCE DE PSEUDO-GROUPE.

Comme on va vouloir comparer les structures transverses, on va vouloir comparer les pseudo-groupes. On pourrait demander que deux pseudo-groupes soient équivalents s'il existe un difféomorphisme entre les deux variétés supports qui conjuguent en outre les pseudo-groupes. Mais cette notion est trop restrictive car elle ne permet pas des déformations qui en certain sens préserveraient le pseudo-groupe en modifiant la variété support. On choisit donc la définition suivante introduite par Haefliger: soit  $M$  et  $M'$  muni de deux pseudo-groupes  $G$  et  $G'$ , on considère une décomposition de  $M$  et  $M'$

$$M = \bigcup_{i \in I} M_i \quad M' = \bigcup_{i \in I} M'_i$$

et l'on suppose qu'il existe une famille de conjugaisons  $\phi_i : M_i \rightarrow M'_i$  qui conjuguent les restrictions des pseudo-groupes à  $M_i$  et  $M'_i$ . Autrement dit, on demande que quitte à opérer une chirurgie dénombrable des variétés supports avec des éléments du pseudo-groupes, on obtient deux variétés abstraites biholomorphes. En particulier, si deux pseudo-groupes

sont équivalents, ils ont leurs espaces des orbites isomorphes. Et dans une certaine mesure, c'est équivalent lorsque l'espace des orbites est une variété analytique séparée.

**Exemple 7.** Les pseudo-groupes des translations sur  $\mathbb{C}$  et des homothéties sur  $\mathbb{C}^*$  sont équivalents. Mais à l'évidence les variétés support ne sont pas biholomorphes. Néanmoins, l'espace des orbites s'identifie dans les deux cas à un point. Enfin, tout pseudo-groupe dont l'espace des orbites est un point n'est pas pour autant équivalent à l'un de ces pseudo-groupes. L'équivalence de pseudo-groupes impliquent une équivalence de l'espace des orbites qui vient avec une certaine conjugaison des structures complexes.

**Definition 8.** Soit  $\mathcal{F}_t$  une famille analytique de feuilletages sur une variété  $M$ . Pour se donner une telle famille, on peut demander que pour tout paramètre  $t_0$  et tout  $x \in M$ , il existe un voisinage de  $(t_0, x)$  et une famille de forme différentielle  $\omega_t$  dépendant analytiquement de  $t$  telle que le feuilletage soit localement donné autour de  $x$  par  $\omega_t$ . On dira que la déformation est *isomonodromique* lorsque pour tout  $t, t'$ , la structure transverse de  $\mathcal{F}_t$  est équivalente à celle de  $\mathcal{F}_{t'}$ .

Il est très difficile de construire des exemples explicites. On n'en connaît très peu. En fait, on ne connaît que les exemples explicites suivants: les déformations topologiquement triviales de fonctions holomorphes, méromorphes et multivaluées et quelques exemples explicites pour des familles très particulières. En général étant donné un feuilletage, on ne sait pas donner une façon de déformer ce feuilletage de façon isomonodromique.

**Exemple 9.** Soit une famille de feuilletages donnés par une famille de fonctions  $f_t = f(t, x, y)$ . Si elle est topologiquement triviale alors elle est isomonodromique. Cela vient de ce que, dans le cas d'une fonction, la structure transverse est discrète et donc ne change pas le long d'une déformation topologiquement triviale.

**Exemple 10.** Considérons la famille donnée au voisinage de 0 par  $\omega_t = xdy + \lambda(t)ydx$  avec  $\lambda(0) \in \mathbb{H}$ . Elle correspond à la famille d'équations différentielles

$$xy' = \lambda(t)y$$

dont on sait que l'isomonodromie implique la constance de la fonction  $\lambda(t)$ . On va le vérifier en calculant la structure transverse et l'espace des orbites. La structure transverse est entièrement décrite sur deux transversales

$$\mathbb{C} \amalg \mathbb{C}$$

avec de part et d'autres l'action de l'holonomie  $z \mapsto e^{2i\pi\lambda(t)}z$  et  $z \mapsto e^{2i\pi\lambda(t)^{-1}}z$  et le recollement  $z \mapsto z^{\lambda(t)}$ . Donc pour l'espace des orbites, on obtient un tore et deux points qui sont dans l'adhérence de tout point du tore. S'il y a équivalence des structures transverses alors il y a isomorphie des espaces d'orbites, donc en particulier les tores sont biholomorphes. Ce qui implique que  $\lambda(t)$  et  $\lambda(t')$  se déduisent l'un de l'autre par une transformation de  $SL(2, \mathbb{Z})$  dont l'action est discrète. Donc  $\lambda(t)$  est constante.

## 5. ECLATEMENTS, RÉDUCTION DES SINGULARITÉS ET GÉNÉRATEURS DE LA STRUCTURE TRANSVERSE.

On considère la variété obtenue de la façon suivante: on prend deux copies de  $\mathbb{C}^2$  avec des coordonnées  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  que l'on recolle de la façon suivante

$$x_1 = x_2 y_2 \quad y_1 = \frac{1}{y_2}.$$

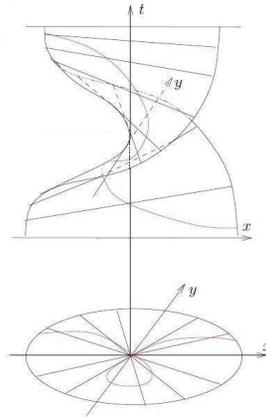
On note cette variété  $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ . On peut construire une application holomorphe

$$E : \widetilde{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathbb{C}^2$$

définie dans les cartes par

$$(x_1, y_1) \rightarrow (x_1, x_1 y_1) \quad (x_2, y_2) \rightarrow (x_2 y_2, x_2)$$

et qui se recollent bien. On observe qu'en dehors de  $E^{-1}(0)$  et 0 cette application est un biholomorphisme. Enfin, le diviseur  $E^{-1}(0)$  est un diviseur compact qui se trouve être une courbe rationnelle lisse d'auto-intersection  $-1$ .



Pour comprendre cette application, on peut faire la remarque suivante: l'image d'un voisinage du diviseur compact est un voisinage de l'origine mais l'image du voisinage d'un point donné sur le diviseur exceptionnel est un voisinage pincé de l'origine qui pince la direction déterminé par le point. Pour tout germe de feuilletage au voisinage de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  donné par exemple par une forme  $\omega$ , on considère la forme pull-back  $E^*\omega$  et le feuilletage induit par cette forme au voisinage de  $E^{-1}(0)$ . Par exemple, si

$$\omega = x^2 dx + y^2 dy$$

Le calcul dans les cartes donnent

$$\begin{aligned} E^*\omega &= x_1^2 dx_1 + y_1^2 x_1^3 dy_1 + y_1^3 x_1^2 dx_1 \\ &= x_1^2 ((1 + y_1^3) dx_1 + y_1^2 x_1 dy_1) \end{aligned}$$

donc le long diviseur  $x_1 = 0$  si  $y_1^3 \neq -1$  la forme est localement redressable en  $dx_1$ . Par ailleurs, aux points où  $y_1^3 = -1$ , on peut regarder l'écriture locale. Par exemple, en  $y_1 = -1$  on a

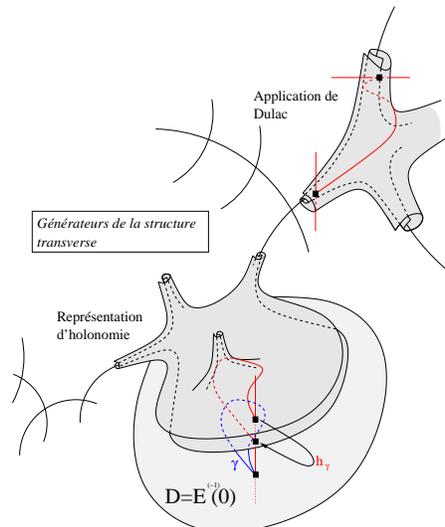
$$(1 + (y_1 - 1)^3) dx_1 + (y_1 - 1)^2 x_1 dy_1 = 3y_1 dx_1 + x_1 dy_1 + \dots$$

Puis on peut recommencer la même chose pour rigoler et en travaillant un peu on obtient un théorème de désingularisation par éclatements, dû à Seidenberg.

**Theorem.** (Seidenberg) Soit  $\omega$  un germe de 1- forme différentielle holomorphe avec une singularité isolée. Il existe une suite d'éclatements de points  $E : (\mathcal{M}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  telles que pour tout point  $p$  du diviseur exceptionnel le germe de forme différentielle holomorphe  $\widetilde{E}^*\omega$  est analytiquement équivalente à

- (1)  $dx$
- (2)  $\lambda x dy + y dx + \dots$  avec  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}^{*-}$

On peut engendrer la structure transverse en regardant d'une part les représentations d'holonomie projective et les passages des coins. Après réduction complète des singularités on obtient le dessin suivant.



On a donc d'une part les représentations d'holonomie et les applications de Dulac appelées aussi passage des coins: ceux-ci fournissent un système de générateurs de la structure transverse.

## 6. CHIRURGIE TANGENTE AU VOISINAGE D'UNE FEUILLE ET INTEGRABILITÉ.

Dans la mesure où deux pseudo-groupes sont équivalents lorsqu'ils le sont à chirurgie près, on va faire des chirurgies du feuilletage qui préservent la structure transverse et donc ne touche que tangentiellement au feuilletage. Malheureusement, cette technique de chirurgie a ces limites et à ma connaissance, elle ne peut pas s'appliquer de façon indistincte à un feuilletage défini sur une surface quelconque. La situation que l'on va pouvoir gérer elle la situation suivante:

Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage sur une surface  $S$  et  $L$  une surface de Riemann compacte plongée proprement dans  $S$ .  $L$  peut ou ne pas être invariant par le feuilletage. Nous allons réaliser des chirurgies du feuilletage de  $\mathcal{F}$  mais seulement sur un voisinage arbitrairement petit de  $L$  dans  $S$ . Autrement-dit, nous allons réaliser des chirurgies du germe de feuilletage  $\mathcal{F}$  au voisinage de  $L$  dans  $S$ .

On considère  $U$  un voisinage de  $L$  dans  $S$  et un recouvrement  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ . Soit  $\phi_{ij}(t)$  un germe de famille paramétré par  $t = (t_1, \dots, t_n)$  d'éléments du pseudo-groupe tangent tel que

$$\phi_{ij}(t) : U_i \cap U_j \rightarrow U_i \cap U_j$$

et  $\phi_{ij}(t)|_L = \text{Id}$  vérifiant la condition de cocycle

$$\forall t, \quad \phi_{ij}(t) \circ \phi_{jk}(t) \circ \phi_{ki}(t) = \text{Id}.$$

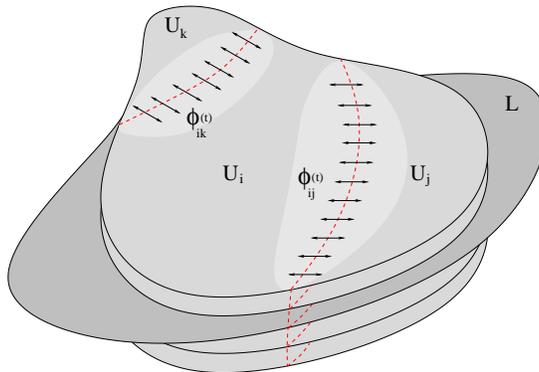
Ici on remarque que l'on ne demande pas que  $\phi_{ij}$  soit surjectif. Mais on sait au minimum que  $\phi_{ij}(U_i \cap U_j)$  contient un voisinage de  $U_i \cap U_j \cap L$ . Alors on pose

$$\mathcal{F}_t := \prod_{i \in I} \mathcal{F}|_{U_i}$$

que l'on quotient en identifiant les points

$$\mathcal{F}|_{U_i} \rightsquigarrow_{\phi_{ij}(t)} \mathcal{F}|_{U_j}.$$

Comme les collages respectent les feuilles locales du feuilletage, on obtient une famille de feuilletages définis sur des surfaces abstraites qui sont le voisinage d'une courbe biholomorphe à  $L$ . Cette famille est isomonodromique, au sens où le germe de structure transverse de  $\mathcal{F}_t$  au voisinage de  $L$  ne dépend pas de  $t$  à équivalence près. On se convainc ici que la notion de structure transverse est plus maléable que celle de pseudo-groupe tangent, car ici, la structure analytique du voisinage de  $L$  peut varier avec  $t$ .



Pour construire des déformations isomonodromiques de singularités du plan, on va donc appliquer ce principe à la singularité dans une réduction des singularités.

Dans tous les cas, on obtient en fait un objet un peu plus riche qu'une simple déformation: on peut faire la construction suivante

$$\mathbb{F} := \prod_{i \in I} \mathcal{F}|_{U_i} \times \mathbb{D}^n$$

avec l'identification

$$(x, t) \sim (\phi_{ij}(t)(x), t)$$

on obtient alors une variété abstraite de dimension  $n + 2$  voisinage d'une sous-variété de codimension 1 biholomorphe à  $L \times \mathbb{D}^n$  muni d'un feuilletage de codimension 1 qui est par ailleurs transverse à la fibration  $\Pi : (x, t) \rightarrow t$  qui passe au quotient dans l'identification. En particulier

$$\mathbb{F}_{\pi^{-1}(t)} = \mathcal{F}_t.$$

Autrement dit, les feuilletages  $\mathcal{F}_t$  sont naturellement les fibres d'un feuilletages de codimension 1 mais en dimension plus grande: on réalise alors une chose difficile à faire qui consiste à construire un objet qui vérifie la condition d'intégrabilité

$$\Omega \wedge d\Omega.$$

On pose alors la question suivante, non précise: a-t-on équivalence entre avoir même structure transverse à équivalence près et être fibre d'un feuilletage commun de même codimension? Une réponse positive à cette question permettrait de

définir l'isomonodromie de façon raisonnable en demandant que la structure transverse soit constante à équivalence près. Je ne sais pas répondre à cette question en toute généralité.

## 7. LA CONDITION D'INTÉGRABILITÉ ET LE PROBLÈME DE SCHLESINGER.

De façon tout à fait naïve on peut attaquer le problème de cette façon: considérons deux formes différentielles  $\omega_0$  et  $\omega_1$  définissant deux feuilletages sur une surface et ayant même structure transverse. On considère la déformation

$$\omega_t = t\omega_0 + (1-t)\omega_1$$

On voudrait savoir si la déformation est induite par un déploiement, autrement dit, si la déformation est isomonodromique. Pour cela, il faut résoudre le problème suivant: peut-on compléter la déformation en une forme intégrable, c'est-à-dire, est-ce qu'il existe  $c_1, \dots, c_n$   $n$  fonctions de telles que

$$\omega_t + \sum c_i dt_i$$

soit intégrable. C'est un problème impossible à résoudre, mais montrons, au moins sur un exemple qu'il redonne une réponse connue:

**Exemple 11.** Considérons le cas suivant

$$\omega_t = xdy + \lambda(t) ydx$$

avec  $\lambda$  une fonction holomorphe. Alors supposons qu'il existe une fonction  $c$  qui rende la forme

$$\omega_t + c(x, y, t) dt$$

intégrable. Alors  $c$  doit vérifier la relation

$$x \frac{\partial c}{\partial x} - \lambda(t) y \frac{\partial c}{\partial y} + (\lambda(t) - 1) c = \lambda'(t) xy$$

ce qui impose que  $\lambda$  soit une fonction constante. On obtient alors que les solutions sont de la forme  $c(x, y, t) = c(t) xy$  qui sont des facteurs intégrant de la forme.

Je vais pour finir présenter une situation dans laquelle on souhaiterait obtenir un énoncé de type Schlesinger. Le principe général est le suivant: on construit une famille de formes normales pour une certaine classe de feuilletages. Cette famille dépend en général - si la famille considérée n'est pas trop petite - d'un nombre infini de paramètres. Puis on se demande comment écrire des conditions sur les paramètres pour que la déformation obtenus en faisant varier les paramètres le long de ces solutions définissent une famille isomonodromique. Par exemple, considérons la famille des feuilletages qui sont lisses après un éclatement, transverse au diviseur exceptionnel et qui admettent deux points de tangences.

On obtient des formes normales de la forme suivante

$$\omega = (y^2 - x^2 + x^3 a(x, c) + x^2 y b(x, c)) (xdy - ydx) + x^2 y (y + (c + c_0) x) dx$$

On montre alors que si la déformation est isomonodromique alors les fonctions  $a(0, c)$  et  $b(0, c)$  satisfont un système différentiel linéaire d'ordre 1.

On obtient ce résultat par un calcul direct de la structure transverse de ces feuilletages et en demandant que cette structure ne varie pas. On trouve

$$\begin{aligned} a(0, c) &= a_0 + \frac{a_0 c_0 - b_0 - 1}{c_0^2 - 1} c \\ b(0, c) &= b_0 - \frac{a_0 - c_0 - b_0 c_0}{c_0^2 - 1} c \end{aligned}$$

avec  $a(0, 0) = a_0$  et  $b(0, 0) = b_0$ .