CALCUL STOCHASTIQUE

Aldéric JOULIN

Polycopié du cours de base C2

Master 2 Recherche de Mathématiques Fondamentales et Appliquées
Parcours C - Probabilités et Statistiques
Institut de Mathématiques de Toulouse
Université Paul Sabatier

Année universitaire 2012-2013

Avant-Propos

Le mouvement brownien est un phénomène aléatoire jouant un rôle fondamental dans la théorie des processus stochastiques. Son évolution au cours du temps est extrêmement désordonnée. Il en résulte que la construction d'une intégrale par rapport à ce processus ne rentre pas dans le cadre de l'intégration classique.
Dans ce cours, nous introduirons la théorie du calcul stochastique, ou calcul d'Itô, du nom d'un célèbre mathématicien japonais du 20ème siècle, nous permettant de donner une définition probabiliste à cette intégrale, mais aussi d'étudier des équations différentielles perturbées aléatoirement par ce type d'intégrales. Les solutions de ces équations, que l'on appelle équations différentielles stochastiques, définissent de nouveaux processus, les processus de diffusion, qui sont à la base du calcul probabiliste moderne.

Cher étudiant, ce cours est fondamental pour vous si vous désirez poursuivre votre cursus universitaire dans le domaine des probabilités. En particulier, le mouvement brownien ainsi que la formule d'Itô sont deux objets essentiels que vous manipulerez fréquemment dans un avenir proche et dont vous serez amené à parler dans les soirées mondaines. Ainsi, vous devrez fournir un travail dense et approfondi tout au long du semestre afin d'avoir le recul nécessaire pour découvrir les immenses perspectives qu'ouvre la théorie du calcul stochastique vers l'infini et au-delà. Pour vous exercer, un devoir maison est mis à votre disposition à la fin du chapitre sur le mouvement brownien, ainsi que les sujets d'examen des deux dernières années (en annexe).

Enfin, ce polycopié ne demandant qu'à être amélioré, n'hésitez pas à me faire part de vos remarques et suggestions. En particulier, la présence presque sûre de coquilles et erreurs diverses et variées est bien évidemment délibérée dans le but pédagogique que vous puissiez exercer votre esprit critique dans les meilleurs conditions possibles.

Aldéric Joulin

Table des matières

Chapitre 0

Rappels sur l'espérance conditionnelle

0.1 Quelques rappels sur les tribus

Avant de rentrer dans le coeur du sujet, faisons quelques rappels sur la notion de tribu engendrée.

Définition 0.1.1. *Soit Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une famille de parties de Ω. On dit que $\mathcal{A}$ est une tribu (sur Ω) si:*

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$.

(ii) pour tout ensemble $A \in \mathcal{A}$, on a $A^c \in \mathcal{A}$, où A^c désigne le complémentaire de A dans Ω (stabilité par passage au complémentaire).

(iii) pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Ω satisfaisant $A_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ (stabilité par union dénombrable).

En particulier, on appelle tribu engendrée par une classe de parties $\mathcal{C}$ de Ω la plus petite tribu sur Ω contenant $\mathcal{C}$, c'est-à-dire l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$. On la note $\sigma(\mathcal{C})$. Un exemple classique est bien sur la tribu borélienne sur $\Omega = \mathbb{R}^d$, où $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^d$.

Dans la suite de ce cours, l'espace de probabilité sur lequel les différents objets aléatoires seront définies est noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Définition 0.1.2. *Étant donnée une variable aléatoire (v.a.) X à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$, on appelle tribu engendrée par X, et on la note $\sigma(X)$, la sous-tribu de $\mathcal{A}$ engendrée par l'ensemble des images réciproques de X. Autrement dit,*

$$\begin{aligned}
\sigma(X) &:= \sigma\left(X^{-1}(B) : B \in \mathcal{E}\right) \\
&= \sigma\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} ; B \in \mathcal{E}\right) \\
&= \sigma\left(\{X \in B\} ; B \in \mathcal{E}\right),
\end{aligned}$$

où la dernière égalité est simplement une notation. Il s'agit donc de la plus petite tribu sur Ω rendant X mesurable. De même, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ est une suite de v.a. à valeurs dans $(E,\mathcal{E})$, alors on définit la tribu engendrée par cette suite comme

$$\sigma\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}_*}\right) := \sigma\left(\{\cap_{i=1}^n\{X_i\in B_i\}\,;n\in\mathbb{N}_*;B_1,\ldots,B_n\in\mathcal{E}\right).$$

À présent, nous allons énoncer un résultat très utile en pratique, le lemme de Doob, dû à un célèbre probabiliste américain du milieu de 20ème siècle. En particulier, ce lemme nous donne un critère simple pour établir la mesurabilité d'une v.a. Y par rapport à la tribu engendrée par une autre v.a. X, sous réserve qu'elles sont toutes 2 à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou éventuellement dans $\mathbb{R}^d$).

Lemme 0.1.3 (Cas réel)**.** *Étant donnée une variable aléatoire réelle (v.a.r.) X, une autre v.a.r. Y est $\sigma(X)$-mesurable si et seulement s'il exite une fonction borélienne $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $Y=h(X)$.*

0.2 Espérance conditionnelle

Maintenant, nous sommes en mesure d'introduire la notion d'espérance conditionnelle. Dans la suite et sauf mention du contraire, tous nos objets aléatoires seront à valeurs réelles. De plus, lorsque l'on aura une égalité entre v.a.r., on sous-entendra qu'elle sera vérifiée presque sûrement.

Définition 0.2.1. *Soit $\mathcal{F}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$, engendrée par une partition $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ de Ω, à savoir*

$$\left\{\begin{array}{rcl}\cup_{n\in\mathbb{N}_*}A_n & = & \Omega\\ A_i\cap A_j & = & \emptyset \quad \text{pour} \quad i\neq j.\end{array}\right.$$

Notons $\mathcal{N}:=\{n\in\mathbb{N}_*:\mathbb{P}(A_n)>0\}$. On appelle probabilité conditionnelle d'un événement $A\in\mathcal{A}$ sachant la tribu $\mathcal{F}$ la quantité:

$$\mathbb{P}(A\mid\mathcal{F})(\omega) := \sum_{n\in\mathcal{N}}\mathbb{P}(A\mid A_n)\,1_{A_n}(\omega),\quad \omega\in\Omega,$$

où $1_{A_n}(\omega)$ est l'indicatrice valant 1 si $\omega\in A_n$ et 0 sinon.

Notez que cette probabilité conditionnelle est une v.a. et non un nombre déterministe, le conditionnement ayant lieu par rapport à une tribu et non un événement. De surcroît, elle est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}$ car c'est une fonction des A_n. Enfin, elle est constante sur les A_n et vaut alors $\mathbb{P}(A\mid A_n)$.

Cette probabilité conditionnelle étant clairement bornée par 1, elle admet une espérance et l'on a par convergence monotone

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{P}(A\mid\mathcal{F})\right] \;=\; \sum_{n\in\mathcal{N}}\mathbb{P}(A\mid A_n)\,\mathbb{E}\left[1_{A_n}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n \in \mathcal{N}} \mathbb{P}(A \mid A_n)\, \mathbb{P}(A_n) \\
&= \mathbb{P}(A),
\end{aligned}
$$

grâce à la FPT, la célèbre Formule des Probabilités Totales. Ainsi, la probabilité conditionnelle par rapport à une tribu vaut, en moyenne, la probabilité initiale.

En utilisant une reformulation avec les indicatrices, la définition de la probabilité conditionnelle devient:

$$
\mathbb{E}\left[1_A \mid \mathcal{F}\right] := \sum_{n \in \mathcal{N}} \mathbb{E}\left[1_A \mid A_n\right] 1_{A_n}.
$$

Bien entendu, la quantité intervenant dans le membre de droite doit être comprise comme

$$
\mathbb{E}\left[1_A \mid A_n\right] := \mathbb{P}(A \mid A_n) = \frac{\mathbb{E}\left[1_A\, 1_{A_n}\right]}{\mathbb{P}(A_n)}.
$$

On en déduit que cette probabilité conditionnelle est obtenue par “moyennisation” de la v.a. 1_A sur les événements engendrant $\mathcal{F}$. L'étape suivante est donc de remplacer cette indicatrice par une v.a. suffisamment intégrable, comme on le fait dans le cours d'intégration (passage des indicatrices aux fonctions étagées puis aux fonctions mesurables positives puis enfin aux fonctions intégrables).

Définition 0.2.2. *Soit X une v.a.r. de carré intégrable et $\mathcal{F}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ engendrée par une partition $(A_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ de Ω. De même que précédemment, notons $\mathcal{N} := \{n \in \mathbb{N}_* : \mathbb{P}(A_n) > 0\}$. On appelle espérance conditionnelle de X sachant la tribu $\mathcal{F}$ la v.a.*

$$
\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right](\omega) := \sum_{n \in \mathcal{N}} \mathbb{E}\left[X \mid A_n\right] 1_{A_n}(\omega), \quad \omega \in \Omega,
$$

où $\mathbb{E}\left[X \mid A_n\right]$ désigne le ratio $\mathbb{E}\left[X\, 1_{A_n}\right] / \mathbb{P}(A_n)$.

Remarquons plusieurs propriétés. Tout d'abord, l'espérance conditionnelle est clairement $\mathcal{F}$-mesurable, linéaire et est positive si X l'est. De plus, un exercice classique est de montrer, via l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qu'elle est de carré intégrable, donc intégrable, et vaut en moyenne l'espérance de X:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right]\right] &= \sum_{n \in \mathcal{N}} \mathbb{E}\left[X \mid A_n\right] \mathbb{E}\left[1_{A_n}\right] \\
&= \sum_{n \in \mathcal{N}} \mathbb{E}\left[X\, 1_{A_n}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X\right],
\end{aligned}
$$

la famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ formant une partition de Ω. Par ailleurs, si X est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}$, i.e. X s'écrit $X = \sum_i \alpha_i\, 1_{A_i}$ et où les α_i sont des constantes, alors

$$
\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right] = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_i \alpha_i\, \mathbb{E}\left[1_{A_i} \mid A_n\right] 1_{A_n}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i \alpha_i \, 1_{A_i} \\
&= X,
\end{aligned}
$$

en ayant utilisé encore une fois le fait que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ est une partition de Ω. Si les tribus $\sigma(X)$ et $\mathcal{F}$ sont indépendantes, c'est-à-dire que tout événement $\sigma(X)$-mesurable est indépendant de tout événement $\mathcal{F}$-mesurable, alors on démontre facilement que $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = \mathbb{E}[X]$. Enfin, terminons par la propriété clé satisfaite par l'espérance conditionnelle, qui est à la base de la prochaine définition et qu'on laissera en exercice au lecteur: pour toute v.a.r. $\mathcal{F}$-mesurable et de carré intégrable Z on a

$$\mathbb{E}[X\,Z] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]\,Z].$$

À présent, on va généraliser l'espérance conditionnelle à une tribu arbitraire, non nécessairement engendrée par une partition. En particulier, on va pouvoir conditionner par une v.a.r. générale. La définition que nous donnons ci-dessous est celle dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, que l'on notera $L^2(\mathcal{A})$ ou L^2 s'il n'y a pas de confusion possible (on utilisera ce même raccourci de notation pour tous les espaces L^p). Cette définition peut être étendue par densité à l'espace $L^1(\mathcal{A})$ (on remplacera alors dans ce qui suit la v.a.r. Z par une indicatrice).

Définition et théorème 0.2.3. *Soit X une v.a.r. dans $L^2(\mathcal{A})$ et soit $\mathcal{F}$ une sous-tribu quelconque de $\mathcal{A}$. Alors il existe une unique v.a.r. Y dans $L^2(\mathcal{F})$, i.e. dans $L^2(\mathcal{A})$ et $\mathcal{F}$-mesurable, telle que pour toute v.a.r. $Z \in L^2(\mathcal{F})$,*

$$\mathbb{E}[X\,Z] = \mathbb{E}[Y\,Z].$$

On note $Y = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$: c'est l'espérance conditionnelle de X sachant la tribu $\mathcal{F}$.

Démonstration. Posons $F = L^2(\mathcal{F})$, qui est un espace de Hilbert donc complet (i.e. toute suite de Cauchy converge pour la norme associée). De plus, F étant inclus dans $L^2(\mathcal{A})$, il est fermé (tout sous-espace complet d'un espace métrique, non nécessairement complet, est fermé). Ainsi, par le théorème du supplémentaire orthogonal d'un fermé dans un espace de Hilbert, l'espace $L^2(\mathcal{A})$ se décompose comme la somme directe de F et de son orthogonal $F^\perp := \{U \in L^2(\mathcal{A}) : \mathbb{E}[U\,Z] = 0 \text{ pour tout } Z \in F\}$: $L^2(\mathcal{A}) = F \oplus F^\perp$. En d'autres termes, toute v.a.r. de $L^2(\mathcal{A})$ se décompose de manière unique comme la somme de 2 v.a.r., l'une dans F et l'autre dans $F^\perp$. Lorsque l'on applique ce résultat à X on obtient l'existence et l'unicité d'une v.a.r. $Y \in F$ telle que $X = Y + (X - Y)$ où $X - Y$ est dans $F^\perp$. Ainsi, on en déduit que pour tout $Z \in F$, $\mathbb{E}[(X - Y)\,Z] = 0$, c'est-à-dire le résultat désiré. ■

Cette définition généralise le cas de l'espérance conditionnelle par rapport à une tribu engendrée par une partition. Comme l'espérance classique, l'espérance conditionnelle satisfait les propriétés de linéarité, de positivité, de convergences monotone et dominée, mais aussi les inégalités de Jensen et de Cauchy-Schwarz, de Hölder, etc...

Proposition 0.2.4. *L'espérance conditionnelle vérifie les propriétés suivantes:*

(*i*) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]] = \mathbb{E}[X]$.

(*ii*) *Si les tribus* $\sigma(X)$ *et* $\mathcal{F}$ *sont indépendantes, alors* $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = \mathbb{E}[X]$.

(*iii*) *Si* X *est* $\mathcal{F}$*-mesurable, alors* $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = X$.

(*iv*) *Si* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ *alors* $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$.

(*v*) $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$ *est le projeté orthogonal de* X *sur le sous-espace fermé* $L^2(\mathcal{F})$.

Démonstration. (*i*): prendre $Z = 1$ qui est bien dans $L^2(\mathcal{F})$.

(*ii*): Supposons les tribus $\sigma(X)$ et $\mathcal{F}$ indépendantes. Alors pour toute v.a.r. $Z \in L^2(\mathcal{F})$,

$$\mathbb{E}[X Z] = \mathbb{E}[X]\, \mathbb{E}[Z].$$

Or $\mathbb{E}[X]$ étant constante, elle est bien $\mathcal{F}$-mesurable et donc on obtient le résultat par unicité de l'espérance conditionnelle.

(*iii*): Même raisonnement que précédemment.

(*iv*): Immédiat en utilisant les propriétés (*i*) et (*iii*).

(*v*): La v.a.r. $Y := \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$ est le projeté orthogonal de X sur $F := L^2(\mathcal{F})$ si et seulement si

$$Y \in F \quad \text{and} \quad \|X - Y\|_{L^2(\mathcal{A})} = \inf_{U \in F} \|X - U\|_{L^2(\mathcal{A})}.$$

On sait déjà que $Y \in F$. Ainsi, soit $Z \in F$ et posons $U := X - Y \in F^{\perp}$ (comme on l'a vu ci-dessus) et $V := Y - Z \in F$ comme différence de 2 éléments de F. Alors $\mathbb{E}[UV] = 0$ et l'on obtient:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(X - Z)^2\right] &= \mathbb{E}\left[(U + V)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[U^2\right] + \mathbb{E}\left[V^2\right] + 2\,\mathbb{E}[UV] \\ &= \mathbb{E}\left[U^2\right] + \mathbb{E}\left[V^2\right], \end{aligned}$$

quantité qui est minimale pour le choix de $V = 0$, i.e. $Z = Y$. ■

Pour terminer ce chapitre, mentionnons que l'espérance conditionnelle par rapport à la tribu $\sigma(X)$ se note classiquement $\mathbb{E}[\cdot \mid X]$. Si l'on considère une v.a.r. Y intégrable, alors vu que $\mathbb{E}[Y \mid X]$ est $\sigma(X)$-mesurable, le lemme de Doob indique qu'il existe une fonction borélienne $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}[Y \mid X] = h(X)$. Dans ce cas, on note $\mathbb{E}[Y \mid X = x]$ la quantité $h(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, notation quelque peu abusive dès que X est continue (interdit de conditionner par un événement de probabilité nulle).

Chapitre 1

Le mouvement brownien

1.1 Vecteurs et processus gaussiens

Avant de définir l'objet central de ce chapitre, le mouvement brownien, commençons par introduire la notion de vecteurs gaussiens généralisant les variables aléatoires gaussiennes unidimensionnelles.

1.1.1 Définition et premières propriétés des vecteurs gaussiens

Si X est un vecteur aléatoire en dimension d (i.e. une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ vue comme un vecteur colonne) tel que chacune de ses coordonnées X_i, $i \in \{1, \ldots, d\}$, soit dans L^2, alors on définit dans la suite son vecteur espérance et sa matrice de covariance par

$$\mathbb{E}[X] = m := \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X_1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbb{E}[X_d] \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(X) = \Gamma := \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,d} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \cdots & \sigma_{2,d} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \sigma_{d,1} & \sigma_{d,2} & \cdots & \sigma_{d,d} \end{pmatrix},$$

où $\sigma_{i,j}$ désigne la covariance entre les variables X_i et X_j:

$$\sigma_{i,j} \;=\; \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \;:=\; \mathbb{E}[(X_i - m_i)\,(X_j - m_j)] \;=\; \mathbb{E}[X_i\, X_j] - m_i\, m_j,$$

où $m_i := \mathbb{E}[X_i]$ pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$. En particulier, cette covariance est bien définie par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. De plus, on remarque que la matrice Γ est symétrique et qu'elle peut s'écrire comme

$$\Gamma \;=\; \mathbb{E}\left[(X - m)\,(X - m)^T\right] \;=\; \mathbb{E}\left[X\, X^T\right] - m\, m^T,$$

où le symbole T désigne la transposition et l'espérance d'une matrice est définie comme la matrice des espérances de chacun de ses éléments. On en déduit qu'elle est semi-définie positive au sens où pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$x^T \Gamma x \;=\; \mathbb{E}\left[|x^T\,(X - m)|^2\right] \;\geq\; 0.$$

Dans la suite de ce chapitre, on supposera que les vecteurs gaussiens considérés sont non dégénérés, c'est-à-dire que $\det \Gamma \neq 0$ (elle donc définie positive, i.e. $x^T \Gamma x > 0$ pour tout $x \neq 0$ dans $\mathbb{R}^d$).

Définition 1.1.1. *Soit X un vecteur aléatoire en dimension d et de matrice de covariance Γ. Il est dit gaussien si la densité jointe est donnée par*

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{\det \Gamma}} \exp\left(-\frac{1}{2} (x-m)^T \Gamma^{-1} (x-m) \right), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

On note alors $X \sim \mathcal{N}_d(m, \Gamma)$ (et $\mathcal{N}(m, \Gamma)$ si $d = 1$).

Ainsi, comme dans le cas unidimensionnel, la donnée du vecteur espérance et de la matrice de covariance caractérise la loi d'un vecteur gaussien. La fonction caractéristique étant vue comme la transformée de Fourier de la densité, que l'on sait injective dans L^1, on a la caractérisation suivante de la loi d'un vecteur gaussien. Dans la suite on notera indifféremment $< x, y >$ ou $x^T y$ le produit scalaire entre deux éléments de $\mathbb{R}^d$.

Proposition 1.1.2. *Un vecteur aléatoire X est gaussien d'espérance m et de matrice de covariance Γ si et seulement si sa fonction caractéristique est donnée par*

$$\phi_X(\theta) := \mathbb{E}[e^{i<\theta, X>}] = \exp\left(i\theta^T m - \frac{1}{2} \theta^T \Gamma \theta \right), \quad \theta \in \mathbb{R}^d.$$

À présent, posons-nous la question suivante: un vecteur gaussien a-t-il toutes ses composantes unidimensionnelles gaussiennes ? Et réciproquement, suffit-il d'avoir toutes les coordonnées gaussiennes pour que le vecteur associé soit gaussien ? La proposition suivante permet de répondre à la question.

Proposition 1.1.3. *Un vecteur aléatoire X est gaussien si et seulement si $\theta^T X$ est une v.a. gaussienne unidimensionnelle pour tout $\theta \in \mathbb{R}^d$ différent du vecteur nul, i.e. toute combinaison linéaire non nulle de ses coordonnées est gaussienne.*

Démonstration. Notons respectivement m et Γ le vecteur espérance et la matrice de covariance du vecteur X. Supposons le gaussien. Alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}^d$ différent du vecteur nul, la fonction caractéristique de la v.a.r. $\theta^T X$ s'écrit pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \phi_{\theta^T X}(u) &= \mathbb{E}\left[e^{iu\,\theta^T X} \right] \\ &= \phi_X(u\theta) \\ &= \exp\left(iu\theta^T m - \frac{u^2}{2} \theta^T \Gamma \theta \right). \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que pour tout $\theta \in \mathbb{R}^d$ non nul, la v.a.r. $\theta^T X$ suit une loi gaussienne d'espérance $\theta^T m$ et de variance $\theta^T \Gamma \theta$, qui est strictement positive car Γ est définie positive. Réciproquement, si $\theta^T X$ suit une loi gaussienne pour tout $\theta \in \mathbb{R}^d$ non nul, alors

$$\left\{ \begin{array}{lclclcl} \mathbb{E}\left[\theta^T X\right] & = & \sum_{i=1}^d \theta_i \, \mathbb{E}[X_i] & = & \theta^T m; & & \\ \mathrm{Var}\left(\theta^T X\right) & = & \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^d \theta_i \, X_i \right) & = & \sum_{i,j=1}^d \theta_i \theta_j \, \mathrm{Cov}(X_i, X_j) & = & \theta^T \Gamma \theta. \end{array} \right.$$

Alors on a pour tout $u \in \mathbb{R}$

$$\phi_{\theta^T X}(u) \;=\; \exp\left(iu\theta^T m - \frac{u^2}{2}\,\theta^T \Gamma \theta\right),$$

et en choisissant $u = 1$ on obtient que pour tout $\theta \in \mathbb{R}^d$ non nul,

$$\phi_X(\theta) \;=\; \exp\left(i\theta^T m - \frac{1}{2}\,\theta^T \Gamma \theta\right),$$

c'est-à-dire que $X \sim \mathcal{N}_d(m, \Gamma)$. ∎

Ainsi, chacune des coordonnées d'un vecteur gaussien suit forcément une loi gaussienne. En revanche, la réciproque est fausse: il se peut que 2 variables aléatoires réelles Y et Z soient gaussiennes sans que le vecteur (Y, Z) soit un vecteur gaussien. En effet, considérons une v.a.r. $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$, indépendante d'une variable ε dite de Rademacher, de loi donnée par

$$\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \frac{1}{2}.$$

On montrera que $Z = \varepsilon Y$ est une v.a.r. gaussienne alors que le vecteur (Y, Z) ne l'est pas. Ainsi, demander à ce qu'un vecteur aléatoire soit gaussien requiert plus que le caractère gaussien des coordonnées.

Le résultat qui suit est en quelque sorte un “miracle” du cadre gaussien, au sens où il suffit de démontrer la nullité des différentes covariances afin d'obtenir l'indépendance.

Proposition 1.1.4 (Miracle gaussien)**.** *Soit X un vecteur gaussien. Alors ses coordonnées sont indépendantes si et seulement si sa matrice de covariance est diagonale.*

Démonstration. Les coordonnées du vecteur gaussien X sont indépendantes si et seulement si sa densité f_X est le produit des densités des coordonnées. Ceci équivaut à dire que la forme quadratique $(x - m)^T \Gamma^{-1} (x - m)$ apparaissant dans f_X s'écrit de la forme $\sum_{i=1}^d \alpha_i \,(x_i - m_i)^2$. En d'autres termes, il n'y a aucun terme croisé du type $(x_i - m_i)(x_j - m_j)$ pour $i \neq j$, c'est-à-dire que la matrice Γ^{-1} (donc Γ) est diagonale. ∎

1.1.2 Quelques autres propriétés en vrac

Donnons dans ce bref paragraphe quelques propriétés que l'on rencontre usuellement lorsque l'on s'attaque à un problème faisant intervenir des vecteurs gaussiens.

Proposition 1.1.5 (Transformation linéaire)**.** *Soit A une matrice inversible $d \times d$ et b un vecteur dans $\mathbb{R}^d$. Considérons le vecteur gaussien $X \sim \mathcal{N}_d(m, \Gamma)$. Alors le vecteur $AX + b$ est gaussien d'espérance $Am + b$ et de matrice de covariance $A\Gamma A^T$.*
En particulier, si $X \sim \mathcal{N}_d(0, \sigma^2 I_d)$ et que la matrice A est orthogonale, i.e. $AA^T = I_d$, alors les vecteurs X et AX ont même loi.

Démonstration. Il suffit de faire les calculs. On remarquera au passage que la matrice $A\Gamma A^T$ est bien semi-définie positive, et même définie positive car A est supposée inversible. ∎

Proposition 1.1.6. *Un vecteur aléatoire d-dimensionnel X est gaussien d'espérance m et de matrice de covariance Γ si et seulement si X peut s'écrire $X = AU + m$, où $U \sim \mathcal{N}_d(0, I_d)$ et A est une matrice carrée $d \times d$ inversible et vérifiant $AA^T = \Gamma$.*

Démonstration. La matrice Γ est symétrique donc diagonalisable dans une base orthonormale. De plus, étant définie positive, toutes ses valeurs propres λ_i sont strictement positives. Notons P la matrice de passage qui est orthogonale, i.e. $PP^T = I_d$. Alors la matrice carrée $d \times d$ donnée par $A := PD$, où D est la matrice diagonale formée par les $\sqrt{\lambda_i}$, est inversible et satisfait $AA^T = \Gamma$. Enfin, la proposition précédente entraîne que $U := A^{-1}(X - m)$ est un vecteur gaussien centré et de matrice de covariance l'identité. ∎

Proposition 1.1.7 (Projection gaussienne)**.** *Notons $X = (X_1, \ldots, X_d)$ et $Y = (Y_1, \cdots, Y_{d'})$ et supposons que le vecteur aléatoire (X, Y) soit gaussien dans $\mathbb{R}^{d+d'}$. Alors la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est elle-aussi gaussienne et il existe des constantes $a, b_1, \ldots, b_d \in \mathbb{R}^{d'}$ telles que*

$$\mathbb{E}[Y|X] = a + \sum_{i=1}^{d} b_i X_i.$$

De plus, le vecteur aléatoire $Y - \mathbb{E}[Y|X]$ est gaussien centré et indépendant de X.

Démonstration. Le cas général est une adaptation immédiate du cas $d = d' = 1$. Ainsi, soit (X, Y) un vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^2$. On montre tout d'abord que le vecteur $(X, Y - a - bX)$ est gausien dans $\mathbb{R}^2$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$. Soit a_0 et b_0 les valeurs pour lesquelles la quantité $\mathbb{E}\left[(Y - a - bX)^2\right]$ est minimale. En d'autres termes, $a_0 + b_0 X$ est le projeté orthogonal de Y sur l'espace $\mathrm{Vect}\{1, X\} \subset L^2$. La v.a.r. gaussienne $\varepsilon_0 = Y - a_0 - b_0 X$ étant dans l'espace $\mathrm{Vect}\{1, X\}^\perp$, on a alors que $\mathbb{E}[\varepsilon_0] = \mathbb{E}[\varepsilon_0\, X] = 0$, c'est-à-dire que ε_0 est centrée et indépendante de X, le vecteur (ε_0, X) étant gaussien. Il en résulte enfin que $\mathbb{E}[Y \mid X] = \mathbb{E}\left[\varepsilon_0 + a_0 + b_0 X \mid X\right] = a_0 + b_0 X$. ∎

Terminons ce paragraphe par le Théorème Central Limite multidimensionnel, dont la preuve est quelque peu similaire au cas de la dimension 1.

Proposition 1.1.8 (Théorème Central Limite multidimensionnel)**.** *Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, et dont les coordonnées sont de carré intégrable. Notons $m := \mathbb{E}[X_1]$ et $\Gamma := \mathrm{Var}(X_1)$. Alors on a la convergence en loi suivante:*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}_d(m, \Gamma).$$

1.1.3 Processus gaussien et mouvement brownien

À présent, introduisons la notion de processus gaussien, qui est une généralisation non-dénombrable des vecteurs gaussiens.

Définition 1.1.9. *Un processus (stochastique) est une famille de variables aléatoires réelles X_t indexées par le temps $t \in [0, T)$, avec $T \in (0, \infty]$. Il est dit gaussien si* *chacun des vecteurs extraits est un vecteur gaussien, i.e. pour tout* $d \in \mathbb{N}_*$ *et tout d-uplet* $(t_1, \ldots, t_d)$*, le vecteur d-dimensionnel* $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_d})$ *est gaussien.*

Un processus gaussien $(X_t)_{t\in[0,T)}$ est donc caractérisé en loi par sa “gaussianité” ainsi que par ses fonctions espérance et covariance:

$$m(t) := \mathbb{E}[X_t] \quad \text{et} \quad K(s,t) := \mathrm{Cov}(X_s, X_t), \quad s,t \in [0,T).$$

La question est maintenant la suivante : si l’on se donne ces 2 fonctions, existe-il un processus gaussien associé ? Il s’avère que la réponse est positive lorsque K vérifie quelques bonnes propriétés (fonction symétrique de type positif sur $[0,T) \times [0,T)$). La démonstration utilise principalement le fameux théorème d’existence de Kolmogorov. En particulier, l’exemple fondamental de ce cours, le célèbre mouvement brownien, peut être construit de cette manière-là. Cependant, étant donné que nous allons privilégier dans la suite de ce chapitre une autre approche, disons plus constructive, nous ne nous attarderons pas sur ce théorème dont l’étudiant curieux trouvera sans peine une référence dans un bon ouvrage de Probabilités avancées, ou encore sur le Web.

Définition 1.1.10. *Soit* $(B_t)_{t\in[0,T)}$ *un processus à valeurs dans* $\mathbb{R}$*. Il est appelé mouvement brownien (sur l’intervalle* $[0,T)$*) si c’est un processus gaussien centré, p.s. à trajectoires continues et de fonction de covariance donnée par*

$$K(s,t) = \mathrm{Cov}(B_s, B_t) = \min\{s,t\}, \quad s,t \in [0,T).$$

Cette dénomination est essentiellement dûe à un botaniste anglais, Robert Brown, qui l’a décrit pour la première fois en 1827 en observant le mouvement de grains de pollen en suspension dans un liquide. Un siècle plus tard, en 1923, l’américain Norbert Wiener le construit rigoureusement, et c’est pour cela que l’on parle aussi de processus de Wiener. Précisons que nous avons défini ce processus sans en avoir encore démontré l’existence. Pour l’heure, on supposera qu’il existe afin d’en donner les propriétés fondamentales.

Proposition 1.1.11. *Soit* $(B_t)_{t\in[0,T)}$ *un mouvement brownien. Alors il vérifie les assertions suivantes:*

(i) $B_0 = 0$ *p.s.*

(ii) *pour tout* $0 \le s \le t < T$*, l’accroissement* $B_t - B_s$ *suit la loi normale centrée* $\mathcal{N}(0, t-s)$.

(iii) *pour tout* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_d < T$*, les accroissements* $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$*,* $i \in \{1, \ldots, d\}$*, sont indépendants.*

Démonstration. Les propriétés (i) et (ii) sont triviales. Pour démontrer (iii), il suffit de démontrer que la matrice de covariance du vecteur gaussien $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_d} - B_{t_{d-1}})$ est diagonale, ce qui est immédiat. ∎

Remarque 1.1.12. Il résulte de la proposition précédente que si l’on se donne $0 = t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_d < T$, alors la densité jointe du vecteur $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_d})$ est donnée par

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{t_1(t_2-t_1)\cdots(t_d-t_{d-1})}} \exp\left(-\sum_{k=1}^{d} \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2(t_k - t_{k-1})} \right), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

où par convention $x_0 = 0$.

La proposition suivante nous permet d'exhiber de nouveaux mouvements browniens à partir d'un mouvement brownien originel. Les démonstrations sont laissées en exercice.

Proposition 1.1.13. *Soit* $(B_t)_{t\in[0,T)}$ *un mouvement brownien (*$T = +\infty$ *dans les deux derniers cas). Alors*

(i) $(-B_t)_{t\in[0,T)}$ *est aussi un mouvement brownien.*

(ii) *autosimilarité (ou invariance par changement d'échelle): pour tout* $\lambda > 0$, *le processus donné par* $B_t^{(\lambda)} := \frac{1}{\sqrt{\lambda}} B_{\lambda t}$ *est un mouvement brownien sur* $[0, T/\lambda)$.

(iii) *invariance par translation: pour tout* $s \geq 0$ *fixé, le processus donné par* $B_t^{(s)} := B_{t+s} - B_s$ *est un mouvement brownien sur* $\mathbb{R}_+$ *(on admettra qu'il est indépendant de toute la trajectoire brownienne jusqu'à l'instant s).*

(iv) *invariance par retournement temporel: le processus donné par* $\tilde{B}_t := t\, B_{1/t}$ *est un mouvement brownien sur* $\mathbb{R}_+$. *Pour la continuité en 0, on remarquera que les processus* B *et* $\tilde{B}$ *ayant même loi et étant continus sur* $(0, \infty)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\lim_{t\to 0} \tilde{B}_t = 0\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}_*} \bigcup_{p\in\mathbb{N}_*} \bigcap_{t\in(0,p^{-1}]\cap\mathbb{Q}} \left\{|\tilde{B}_t| \leq \frac{1}{n}\right\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}_*} \bigcup_{p\in\mathbb{N}_*} \bigcap_{t\in(0,p^{-1}]\cap\mathbb{Q}} \left\{|B_t| \leq \frac{1}{n}\right\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\lim_{t\to 0} B_t = 0\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

On en déduit que le mouvement brownien a le même comportement trajectoriel partout sur la demi-droite réelle.

1.2 Construction du mouvement brownien

1.2.1 Principe de la méthode

Démontrons de manière constructive que ce fameux mouvement brownien existe bel et bien. Pour ce faire, on va expliciter son développement en série en utilisant une base d'ondelettes. Cette construction est celle de Paul Lévy, célèbre probabiliste français du milieu du 20ème siècle et accessoirement beau-père de Laurent Schwartz, père de la théorie des distributions ayant obtenu la médaille Fieds en 1950 et dont l'amphithéatre principal du bâtiment 1R3 à l'UPS porte le nom.
L'espace de Hilbert considéré dans cette partie est $L^2(0, 1)$ muni de la mesure de Lebesgue.

On note pour toute fonction f de carré intégrable la norme $\|f\|_2 := \sqrt{< f, f >}$, où $< \cdot, \cdot >$ désigne le produit scalaire

$$< f, g >:= \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx, \quad f, g \in L^2(0,1).$$

On se donne à présent une base hilbertienne $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2(0,1)$, i.e. une famille dense satisfaisant $< \phi_n, \phi_m >= 1_{\{n=m\}}$. Dans ce cas, toute fonction $f \in L^2(0,1)$ s'écrit comme

$$f \; = \sum_{n\geq 0} < f, \phi_n > \; \phi_n,$$

la convergence de la série ayant lieu dans $L^2(0,1)$. De plus, on a l'identité de Parseval:

$$< f, g > = \sum_{n\geq 0} < f, \phi_n >< g, \phi_n >, \quad f, g \in L^2(0,1).$$

En particulier, si les fonctions f et g sont définies par $f = 1_{[0,s]}$ et $g = 1_{[0,t]}$, où les paramètres $s, t \in [0,1]$ sont fixés, alors l'identité de Parseval entraîne la formule suivante:

$$\min\{s,t\} \; = \sum_{n\geq 0} \int_0^s \phi_n(x)\, dx \int_0^t \phi_n(x)\, dx,$$

qui n'est autre que la fonction de covariance d'un mouvement brownien. Ceci est très intéressant. Ainsi, si l'on définit formellement le processus $(B_t)_{t\in[0,1]}$ par la série suivante

$$B_t \; := \sum_{n\geq 0} Z_n \int_0^t \phi_n(x)\, dx,$$

où $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors il s'agit d'un processus centré dont la covariance se calcule comme suit:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(B_s, B_t) &= \mathbb{E}[B_s B_t] \\
&= \sum_{n,m\geq 0} \mathbb{E}[Z_n Z_m] \int_0^s \phi_n(x)\, dx \int_0^t \phi_n(x)\, dx \\
&= \sum_{n\geq 0} \int_0^s \phi_n(x)\, dx \int_0^t \phi_n(x)\, dx \\
&= \min\{s,t\},
\end{aligned}$$

d'après ce qui précède. Ainsi, une fois que l'on aura démontré la convergence de la série pour une base hilbertienne bien choisie, il nous restera à vérifier que le processus obtenu est gaussien et à trajectoires continues. C'est ce à quoi nous allons nous atteler dans la partie suivante.

1.2.2 Décomposition en ondelettes

Introduisons les ondelettes de Haar. Il s'agit de considérer une "ondelette mère" donnée par

$$H(t) := 1_{[0,1/2)}(t) - 1_{[1/2,1]}(t), \quad t \in [0,1],$$

et de prendre la famille de ses dilatées translatées dyadiques comme suit: notons $H_0 := 1_{[0,1]}$ et

$$H_n(t) := 2^{j/2}\, H(2^j t - k) = 2^{j/2}\, 1_{[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1/2}{2^j})}(t) - 2^{j/2}\, 1_{[\frac{k+1/2}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}]}(t),$$

où l'entier strictement positif n se décompose de manière unique comme $n := 2^j + k$ avec $j \in \mathbb{N}$ et $k\{0, 1, \ldots, 2^j - 1\}$. Il n'est pas difficile de montrer que cette famille est orthonormée dans $L^2(0,1)$, le $2^{j/2}$ n'étant présent que pour assurer une norme égale à 1. Par ailleurs, comme la fonction indicatrice de tout intervalle dyadique $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$ appartient à l'espace vectoriel engendré par la famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et que toute fonction continue sur $[0,1]$ peut être approchée uniformément par des combinaisons linéaires de ces indicatrices d'intervalles dyadiques, on en déduit que l'espace vectoriel engendré par la famille de fonctions H_n est dense dans l'espace des fonctions continues, et par suite dans $L^2(0,1)$. Autrement dit, la famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une base hilbertienne de l'espace $L^2(0,1)$.

L'intérêt de cette base réside dans le fait que les intégrales des fonctions H_n, que l'on va utiliser dans la décomposition en série du mouvement brownien vue ci-dessus, forment aussi une base d'ondelettes. Plus précisément, posons $\lambda_0 = 1$ et $\lambda_n := 2^{-1-j/2}$ pour tout entier strictement positif $n := 2^j + k$, et construisons la base d'ondelettes triangulaires suivante: l'ondelette mère est définie par

$$\Delta(t) := 2t\, 1_{[0,1/2)} + 2(1-t)\, 1_{[1/2,1]},$$

et la famille de ses dilatées translatées par $\Delta_0(t) := t$ et

$$\Delta_n(t) := \Delta(2^j t - k) = 2^{j+1} \left(t - \frac{k}{2^j}\right) 1_{[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1/2}{2^j})}(t) + 2^{j+1} \left(\frac{k+1}{2^j} - t\right) 1_{[\frac{k+1/2}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}]}(t).$$

Alors on obtient l'identité

$$\int_0^t H_n(u)\, du = \lambda_n\, \Delta_n(t), \quad t \in [0,1].$$

On notera que pour tout $n \in \mathbb{N}$, Δ_n est à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$. À présent, nous sommes enfin en mesure d'établir l'existence du mouvement brownien.

Théorème 1.2.1. *Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et définissons*

$$B_t = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n Z_n \Delta_n(t), \quad t \in [0,1].$$

Alors les assertions suivantes sont vérifiées.

(i) *p.s. la série converge uniformément sur* $[0,1]$.

(ii) *le processus* $(B_t)_{t\in[0,1]}$ *est un mouvement brownien.*

Avant de démontrer le théorème, il nous faut démontrer le résultat suivant, qui sera utilisé à plusieurs reprises dans la suite de ce chapitre.

Lemme 1.2.2. *Soit* $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles suivant la loi* $\mathcal{N}(0,1)$. *Alors p.s.,*

$$C := \sup_{n\geq 2} \frac{|Z_n|}{\sqrt{\log(n)}} < \infty.$$

Démonstration. Soit $\alpha > 1$ et $n \geq 2$, de sorte que $\sqrt{2\alpha\log(n)} > 1$. On a facilement que

$$\mathbb{P}\left(|Z_n| \geq \sqrt{2\alpha\log(n)}\right) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\sqrt{2\alpha\log(n)}}^{\infty} ue^{-u^2/2}du = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{n^\alpha},$$

qui est sommable. Ainsi, par le lemme de Borel-Cantelli, pour tout ω en dehors d'un ensemble négligeable, il existe $n_0 = n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait

$$|Z_n| < \sqrt{2\alpha\log(n)},$$

et donc que p.s., $C < \infty$. ■

Démonstration. [Théorème 1.2.1] Démontrons tout d'abord le point (i). Si l'on note

$$B_t^p := \sum_{l=0}^{p} \lambda_l Z_l \Delta_l(t), \quad t \in [0,1],$$

le point (i) revient à montrer que p.s., $\sup_{t\in[0,1]} |B_t - B_t^p| \to 0$ lorsque $p \to \infty$. Tout entier n strictement positif se décomposant de manière unique comme $n = 2^j + k$, où $k \in \{0,\ldots,2^j-1\}$, on a que $\log(n) < (j+1)\log(2)$, mais aussi que pour $t \in [0,1]$ et $j \in \mathbb{N}$ fixés, $\Delta_{2^j+k}(t) = 0$ sauf pour exactement une valeur de $k \in \{0,\ldots,2^j-1\}$, notée $k_{j,t}$. Ainsi, pour tout $J \in \mathbb{N}$ et tout $M \geq 2^J$, on a en utilisant le lemme 1.2.2,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq M} \lambda_n |Z_n| \Delta_n(t) &\leq C \sum_{n\geq M} \lambda_n \sqrt{\log(n)}\Delta_n(t) \\
&\leq C\sqrt{\log(2)} \sum_{j\geq J}\sum_{k=0}^{2^j-1} 2^{-1-j/2}\sqrt{j+1}\Delta_{2^j+k}(t) \\
&= \tilde{C} \sum_{j\geq J} 2^{-j/2}\sqrt{j+1}\Delta_{2^j+k_{j,t}}(t).
\end{aligned}$$

Ainsi, comme $\Delta_{2^j+k_{j,t}} \in (0,1]$, on obtient au final que

$$\tilde{C} \sum_{j\geq J} 2^{-j/2}\sqrt{j+1}\Delta_{2^j+k_{j,t}}(t) \leq \tilde{C} \sum_{j\geq J} 2^{-j/2}\sqrt{j+1},$$

qui tend vers 0 lorsque $J \to \infty$. La démonstration de (i) est établie. En particulier, on obtient que p.s. le processus limite $(B_t)_{t\in[0,1]}$ est à trajectoires continues.

Pour le point (ii), le processus limite étant centré et ayant pour fonction de covariance $K(s,t) = \min\{s,t\}$, $s,t \in [0,1]$, comme on l'a vu précédemment via l'identité de Parseval, il ne reste qu'à démontrer qu'il s'agit d'un processus gaussien. Soit $0 < t_1 < \cdots < t_d \leq 1$ et considérons le vecteur $X := (B_{t_1}, \ldots, B_{t_d})$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}^d$, on a en utilisant le caractère i.i.d. des variables Z_n,

$$\begin{aligned}
\phi_X(\theta) &:= \mathbb{E}\left[\exp\left(i < \theta, X >\right)\right] \\
&= \prod_{n\geq 0} \mathbb{E}\left[\exp\left(iZ_n \sum_{l=1}^{d} \theta_l \lambda_n \Delta_n(t_l)\right)\right] \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{l=1}^{d} \theta_l \lambda_n \Delta_n(t_l)\right)^2\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{l,m=1}^{d} \theta_l \theta_m \sum_{n\geq 0}\int_0^{t_l} H_n(u)du \int_0^{t_m} H_n(u)du\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{l,m=1}^{d} \theta_l \theta_m \min\{t_l, t_m\}\right),
\end{aligned}$$

d'après ce qui précède. Ainsi, X est bien un vecteur gaussien, ce qui achève la démonstration du point (ii), et donc du théorème 1.2.1. ∎

Enfin, notons pour conclure cette partie que l'on peut étendre aisément la définition du mouvement brownien à tout $\mathbb{R}_+$ de la façon suivante. Si l'on considère une famille indexée par $n \in \mathbb{N}$ de mouvements browniens indépendants $(B_t^{(n)})_{t\in[0,1]}$ sur $[0,1]$, alors on définit le processus $(B_t)_{t\geq 0}$ par

$$B_t := \sum_{k=1}^{n} B_1^{(k)} + B_{t-n}^{(n+1)}, \quad t \in [n, n+1),$$

qui vérifie les axiomes d'un mouvement brownien sur $\mathbb{R}_+$.

1.3 Comportement des trajectoires browniennes

Dans le dernier paragraphe de ce chapitre, nous étudions quelques propriétés particulières des trajectoires browniennes $t \to B_t$. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}_+$, notons qu'il n'est pas clair que $\sup_{t\in I} B_t$ (resp. $\inf_{t\in I} B_t$) soit mesurable car il s'agit d'un supremum (resp. infimum) non dénombrable de fonctions mesurables. Cependant, les trajectoires du mouvement brownien étant continues, on peut se restreindre aux valeurs rationnelles de l'intervalle I et l'on obtient alors un supremum (resp. infimum) dénombrable. Nous utiliserons fréquemment et quelquefois implicitement ce type de remarque dans la suite.

1.3.1 Propriétés principales

Avant de donner quelques propriétés classiques sur les trajectoires du mouvement brownien, établissons un résultat intéressant en pratique, connu sous le nom de loi du tout ou rien, ou encore loi du 0/1 de Blumenthal.

Lemme 1.3.1. *Définissons pour tout $t \geq 0$ la tribu $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s : s \in [0,t])$ et soit $\mathcal{F}_{0+} = \bigcap_{s>0} \mathcal{F}_s$. Alors la tribu $\mathcal{F}_{0+}$ est triviale au sens où $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$ pour tout $A \in \mathcal{F}_{0+}$.*

Démonstration. Montrons que la tribu $\mathcal{F}_{0+}$ est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_\infty = \sigma(B_t : t \geq 0)$. Si c'est le cas, elle est indépendante d'elle-même car $\mathcal{F}_{0+} \subset \mathcal{F}_\infty$, donc triviale. Pour ce faire, nous allons utiliser l'indépendance et la stationnarité des accroissements browniens. Soient $h > 0, A \in \mathcal{F}_{0+}, 0 < t_1 < \cdots < t_d$ et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Les tribus $\mathcal{F}_h$ et $\sigma(B_{t+h} - B_h : t \geq 0)$ étant indépendantes, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[1_A\, f(B_{t_1+h} - B_h, \ldots, B_{t_d+h} - B_h)\right] &= \mathbb{P}(A)\, \mathbb{E}\left[f(B_{t_1+h} - B_h, \ldots, B_{t_d+h} - B_h)\right] \\
&= \mathbb{P}(A)\, \mathbb{E}\left[f(B_{t_1}, \ldots, B_{t_d})\right],
\end{aligned}$$

par stationnarité des accroissements. En faisant tendre $h \to 0$, on obtient par convergence dominée (en utilisant la continuité des trajectoires browniennes) l'identité suivante :

$$\mathbb{E}\left[1_A\, f(B_{t_1}, \ldots, B_{t_d})\right] = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{E}\left[f(B_{t_1}, \ldots, B_{t_d})\right],$$

d'où le résultat. ∎

La loi du 0/1 de Blumenthal est aussi une application immédiate de la continuité à droite de la filtration naturelle (complétée) du mouvement brownien; voir à ce sujet le chapitre 2.

Proposition 1.3.2. *Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien sur $\mathbb{R}_+$. Les propriétés suivantes sont vérifiées:*

(i) p.s. pour tout $\varepsilon > 0$, $\sup_{t\in[0,\varepsilon]} B_t > 0$ et $\inf_{t\in[0,\varepsilon]} B_t < 0$.

(ii) p.s. pour tout $\varepsilon > 0$, le mouvement brownien a un zéro sur l'intervalle $]0,\varepsilon[$.

(iii) étant donné $x \in \mathbb{R}_*$, notons T_x le premier temps de passage en x, i.e. $T_x := \inf\{t \geq 0 : B_t = x\}$ (avec $\inf \emptyset = \infty$ par convention). Alors on a pour tout $x \in \mathbb{R}_*$, $\mathbb{P}(T_x < +\infty) = 1$.

(iv) on a p.s. $\limsup_{t\to\infty} B_t = +\infty$ et $\liminf_{t\to\infty} B_t = -\infty$.

(v) on a p.s. $\lim_{t\to+\infty} B_t/t = 0$.

Démonstration. On va démontrer certains points de cette proposition en utilisant les invariances du mouvement brownien vues dans la proposition 1.1.13. Établissons tout d'abord les points (i) et (ii). Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs décroissant vers 0 et soit A l'événement défini par l'intersection décroissante (pour l'inclusion)

$$A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{ \sup_{t\in[0,\varepsilon_n]} B_t > 0\}.$$

Par convergence monotone, on a que

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\sup_{t\in[0,\varepsilon_n]} B_t > 0) \geq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_{\varepsilon_n} > 0) = \frac{1}{2}.$$

Or, l'événement $\{\sup_{t\in[0,\varepsilon_n]} B_t > 0\}$ étant $\mathcal{F}_{\varepsilon_n}$-mesurable, on en déduit que A est $\mathcal{F}_{0+}$-mesurable et par la loi du $0/1$, on a que $\mathbb{P}(A) = 1$, c'est-à-dire que

$$\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,\varepsilon]} B_t > 0 \ \ \forall \varepsilon > 0) = 1.$$

Pour établir l'assertion avec l'infimum, il suffit de remarquer que $(-B_t)_{t\geq 0}$ est aussi un mouvement brownien. Le point (i) est donc démontré. Quant au point (ii), il ne s'agit que d'une conséquence immédiate de (i) en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, le mouvement brownien étant un processus à trajectoires continues.

À présent, démontrons les points (iii) et (iv). Par la propriété d'autosimilarité, on a pour tout $x > 0$ et tout $t > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_x \leq t) &= \mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t]} B_s \geq x) \\
&= \mathbb{P}(\sup_{s\in[0,1]} B_{st} \geq x) \\
&= \mathbb{P}(\sup_{s\in[0,1]} B_s^{(t)} \geq \frac{x}{\sqrt{t}}) \\
&= \mathbb{P}(\sup_{s\in[0,1]} B_s \geq \frac{x}{\sqrt{t}}),
\end{aligned}$$

et par convergence monotone lorsque $t \to \infty$, on obtient d'après ce qui précède que $\mathbb{P}(T_x < \infty) = 1$. Par symétrie du mouvement brownien, on en déduit que $\mathbb{P}(T_x < +\infty) = 1$ pour tout $x < 0$. Enfin, étant donné que le mouvement brownien est une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, il ne peut visiter tous les réels que si, p.s., $\limsup_{t\to\infty} B_t = +\infty$ et $\liminf_{t\to\infty} B_t = -\infty$.

Finissons par le point (v). Par la propriété de retournement du temps, le processus $\tilde{B}_t := tB_{1/t}$ est un mouvement brownien sur $\mathbb{R}_+$ donc le comportement de $\tilde{B}_t/t$ est le même que celui de $B_{1/t}$, qui tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$ par continuité. ∎

Terminons ce paragraphe en démontrant un résultat très important à propos de la non-dérivabilité des trajectoires browniennes.

Théorème 1.3.3. *On a p.s.: les trajectoires browniennes ne sont pas dérivables.*

Démonstration. Le mouvement brownien étant invariant par translation, il suffit de démontrer la non-dérivabilité en 0, c'est-à-dire montrer que la quantité

$$\frac{B_t - B_0}{t - 0} = \frac{B_t}{t}$$

n'admet pas de limite lorsque $t \to 0$. Or, par la propriété de retournement du temps, $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ est aussi un mouvement brownien sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, $\tilde{B}_t/t$ a le même comportement que $B_{1/t}$, qui n'admet pas de limite lorsque $t \to 0$ d'après le point (iv) de la proposition 1.3.2. ∎

1.3.2 Hölder continuité

Comme nous l'avons vu précédemment, le mouvement brownien admet le dévelopement en ondelettes

$$B_t = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n Z_n \Delta_n(t), \quad t \in [0,1].$$

Ceci va nous permettre de démontrer une propriété de Hölder continuité des trajectoires browniennes, dont on rappelle la définition.

Définition 1.3.4. *Une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est dite Hölder continue d'exposant $\alpha \in (0,1)$ (ou encore α-höldérienne) s'il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$|f(s) - f(t)| \le c\,|s-t|^\alpha, \quad 0 < s < t < 1.$$

Remarque 1.3.5. Notons que cette propriété entraîne l'uniforme continuité. Pour $\alpha = 1$, il s'agit des fonctions lipschitziennes tandis que pour $\alpha = 0$, seules les fonction bornées telles que $\sup f - \inf f \le 1$ sont concernées. Enfin si $\alpha > 1$ alors f est forcément constante.

Théorème 1.3.6. *Pour tout $\alpha \in (0,1/2)$, p.s. les trajectoires browniennes sont α-höldériennes.*

La démonstration de ce résultat sera immédiate une fois le lemme suivant établi (se servir du fait que lorsque $\alpha \in (0,1/2)$, on a $\sqrt{j+1} \times 2^{-j/2} \le 2^{-\alpha j}$ pour j assez grand). Il s'agit d'un résultat d'analyse dont on donne la démonstration par soucis de complétude.

Lemme 1.3.7. *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant le développement en ondelettes suivant:*

$$f(t) = f(0) + \sum_{n\ge 0} c_n \Delta_n(t),$$

où la convergence de la série est supposée uniforme sur $[0,1]$. S'il existe $\alpha \in (0,1)$ tel que pour j entier assez grand, on ait $|c_{2^j+k}| \le 2^{-\alpha j}$, où $k \in \{0,\dots,2^j-1\}$, alors f est $\alpha-$höldérienne.

Démonstration. Supposons sans perte de généralité et pour simplifier que $c_0 = 0$ et que $|c_{2^j+k}| \le 2^{-\alpha j}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0,\dots,2^j-1\}$ (le cas général est immédiat, bien qu'un peu pénible à écrire). Alors pour tous $s,t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} f(t) - f(s) &= \sum_{j\ge 0} \sum_{k=0}^{2^j-1} c_{2^j+k} \left(\Delta_{2^j+k}(t) - \Delta_{2^j+k}(s)\right) \\ &=: \sum_{j\ge 0} D_j(s,t). \end{aligned}$$

Rappelons que pour $u \in [0,1]$ et $j \in \mathbb{N}$ fixés, on a que $\Delta_{2^j+k}(u) \in (0,1]$ pour exactement une valeur de $k \in \{0,\dots,2^j-1\}$, notée $k_{j,u}$. Ainsi, on a

$$D_j(s,t) \;=\; c_{2^j+k_{j,t}}\, \Delta_{2^j+k_{j,t}}(t) - c_{2^j+k_{j,s}}\, \Delta_{2^j+k_{j,s}}(s).$$

De cette équation on en déduit que

$$|D_j(s,t)| \le |c_{2^j+k_{j,t}}| + |c_{2^j+k_{j,s}}| \le 2 \times 2^{-\alpha j}.$$

De plus, toutes les fonctions Δ_{2^j+k} étant triangulaires de pente $\pm 2^{j+1}$, on obtient que pour tout $k \in \{k_{j,t}, k_{j,s}\}$,

$$|\Delta_{2^j+k}(t) - \Delta_{2^j+k}(s)| \le 2^{j+1}\,|t-s|.$$

Ainsi, après avoir différencié les cas $k_{j,t} = k_{j,s}$ et $k_{j,t} \neq k_{j,s}$, il en résulte alors les bornes supérieures suivantes:

$$|D_j(s,t)| \le \begin{cases} 2 \times 2^{-\alpha j}; \\ 2 \times 2^{-\alpha j} \times 2^{j+1}\,|t-s|. \end{cases}$$

Enfin, pour tout $J \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| &\le \sum_{j=0}^{J} 2^{1-\alpha j + j + 1}\,|t-s| + \sum_{j \ge J+1} 2^{1-\alpha j} \\ &\le 4\,|t-s|\,\frac{2^{(1-\alpha)(J+1)} - 1}{2^{1-\alpha} - 1} + \frac{2^{1-\alpha(J+1)}}{1 - 2^{-\alpha}} \end{aligned}$$

et en choisissant l'entier J tel que $2^{-(J+1)} \le |t-s| \le 2^{-J}$, on obtient alors le résultat désiré avec une constante $c > 0$ dépendant seulement de α. ■

À présent, démontrons que p.s. les trajectoires browniennes ne sont pas $\alpha-$höldériennes pour $\alpha > 1/2$.

Théorème 1.3.8. *Notons $\mathcal{C}(\alpha, c, \varepsilon)$ l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels qu'il existe $s \in [0,1]$ tel que*

$$|B_t(\omega) - B_s(\omega)| \le c\,|t-s|^\alpha, \quad \textit{pour tout } t \textit{ tel que} \quad |t-s| \le \varepsilon.$$

Si $\alpha > 1/2$ alors $\mathbb{P}(\mathcal{C}(\alpha, c, \varepsilon)) = 0$ pour tout $c > 0$ et tout $\varepsilon > 0$.

Démonstration. Nous allons démontrer ce résultat en utilisant l'indépendance et la stationnarité des accroissements browniens. Soit $m \in \mathbb{N}_*$ fixé, que l'on choisira plus tard de manière adéquate. Pour tout entier $n \ge m$ (qui aura vocation à tendre vers l'infini), on définit la variable aléatoire

$$X_{n,k} := \max\left\{|B_{\frac{j+1}{n}} - B_{\frac{j}{n}}| : j \in \{k, \ldots, k+m-1\}\right\}, \quad k \in \{0, \ldots, n-m\},$$

représentant le maximum des m accroissements browniens pris entre les instants k/n et $(k+m)/n$. Soit $\omega \in \mathcal{C}(\alpha, c, \varepsilon)$: il existe $s \in [0,1]$ tel que $|B_t(\omega) - B_s(\omega)| \le c|t-s|^\alpha$ pour tout $t \in [0,1]$ satisfaisant $|t-s| \le \varepsilon$. Prenons n assez grand de sorte que $m/n \le \varepsilon$. Comme $s \in [0,1]$, il existe $k \in \{0, \ldots, n-m\}$ tel que $s \in [k/n, (k+m)/n]$. Ainsi, pour tout $j \in \{k, \ldots, k+m-1\}$, la distance entre s et j/n ou $(j+1)/n$ est inférieure à m/n, qui est inférieure à ε. D'où l'on obtient

$$\begin{aligned}
|B_{\frac{j+1}{n}}(\omega) - B_{\frac{j}{n}}(\omega)| &\leq |B_{\frac{j+1}{n}}(\omega) - B_s(\omega)| + |B_s(\omega) - B_{\frac{j}{n}}(\omega)| \\
&\leq c|\frac{j+1}{n} - s|^\alpha + c|s - \frac{j}{n}|^\alpha \\
&\leq 2c\left(\frac{m}{n}\right)^\alpha .
\end{aligned}$$

Autrement dit, on a l'inclusion suivante: pour n assez grand,

$$\mathcal{C}(\alpha, c, \varepsilon) \subset \bigcup_{k=0}^{n-m} \left\{ X_{n,k} \leq 2c\left(\frac{m}{n}\right)^\alpha \right\}.$$

D'où, en utilisant l'indépendance (respectivement la stationnarité) des accroissements browniens à la deuxième (resp. troisième) ligne ci-dessous,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{C}(\alpha, c, \varepsilon)) &\leq \sum_{k=0}^{n-m} \mathbb{P}\left(X_{n,k} \leq 2c\left(\frac{m}{n}\right)^\alpha \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-m} \prod_{j=k}^{k+m-1} \mathbb{P}\left(|B_{\frac{j+1}{n}} - B_{\frac{j}{n}}| \leq 2c\left(\frac{m}{n}\right)^\alpha \right) \\
&= (n-m+1)\, \mathbb{P}\left(|B_{\frac{1}{n}}| \leq 2c\left(\frac{m}{n}\right)^\alpha \right)^m \\
&= (n-m+1)\, \mathbb{P}\left(|B_1| \leq 2cm^\alpha n^{1/2-\alpha} \right)^m .
\end{aligned}$$

Or, B_1 suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$, on a pour tout x assez petit que

$$\mathbb{P}\left(|B_1| \leq x\right) \leq \frac{2x}{\sqrt{2\pi}},$$

et l'on obtient alors en réinjectant dans l'inégalité précédente que

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}(\alpha, c, \varepsilon)) \leq \left(\frac{4cm^\alpha}{\sqrt{2\pi}} \right)^m n^{1+m(1/2-\alpha)}.$$

Enfin, comme $\alpha > 1/2$ et m est un entier arbitraire, il suffit de prendre ce dernier tel que $m(\alpha - 1/2) > 1$ afin que le terme de droite ci-dessus tende vers 0 lorsque $n \to \infty$. La démonstration du théorème est achevée. ■

À présent, on se pose la question suivante: qu'en est-il du cas limite $\alpha = 1/2$? Pas d'inquiétude, cher lecteur, ce cas-là étant appréhendé avec une grande précision.

Théorème 1.3.9 (Module de continuité de Lévy)**.** *Définissons le module de continuité du mouvement brownien par*

$$m(\varepsilon) := \sup_{|t-s| \leq \varepsilon} |B_t - B_s|, \quad \varepsilon \text{ assez petit.}$$

Alors on a le résultat de convergence p.s. suivant:

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{m(\varepsilon)}{\sqrt{2\varepsilon \log(1/\varepsilon)}} = 1.$$

<u>*Démonstration.*</u> Démontrer l'égalité revient bien évidemment à établir les inégalités $\leq$ et $\geq$, dont les deux démonstrations utilisent le lemme de Borel-Cantelli. Cependant, nous n'allons démontrer que la partie $\geq$, l'autre inégalité étant plus technique et pouvant par exemple être appréciée à sa juste valeur à travers la preuve du théorème 1.4.1 du somptueux cours de Jacod [1].
Commençons par poser $\phi(\varepsilon) := \sqrt{2\varepsilon \log(1/\varepsilon)}$ pour tout $\varepsilon \in (0,1)$ et définissons $\mathcal{I}(a) := \int_a^\infty e^{-x^2/2}dx$ pour tout $a > 0$. On a

$$\frac{e^{-a^2/2}}{a} = \int_a^\infty \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) e^{-x^2/2}dx \leq \left(1 + \frac{1}{a^2}\right) \mathcal{I}(a),$$

ce qui entraîne que

$$\mathcal{I}(a) \geq \frac{e^{-a^2/2}}{a + 1/a}, \quad a > 0. \tag{1.3.1}$$

À présent, soit $\delta \in (0,1)$ et posons $\mathcal{I}_n := \mathbb{P}\left(|B_{2^{-n}}| > \delta\phi(2^{-n})\right)$ pour tout entier $n \geq 1$. On obtient alors de l'inégalité (1.3.1) que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_n &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \mathcal{I}(2^{n/2}\delta\phi(2^{-n})) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \mathcal{I}(\delta\sqrt{2n\log(2)}) \\ &\geq K_\delta \, \frac{e^{-n\delta^2 \log(2)}}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

où $K_\delta > 0$ est une constante ne dépendant seulement que de δ. Ainsi, par l'indépendance et la stationnarité des accroissements browniens,

$$\begin{aligned} \alpha_n &:= \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq 2^n} |B_{\frac{k}{2^n}} - B_{\frac{k-1}{2^n}}| \leq \delta\phi(2^{-n})\right) \\ &= (1 - \mathcal{I}_n)^{2^n} \\ &\leq \exp\left(-2^n\mathcal{I}_n\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{K_\delta e^{n(1-\delta^2)\log(2)}}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Comme $\delta \in (0,1)$, la série $\sum_n \alpha_n$ converge et par le lemme de Borel-Cantelli, pour tout ω en dehors d'un ensemble négligeable $\mathcal{N}_\delta$, il existe $n_0 = n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on ait

$$\max_{1\leq k\leq 2^n} \frac{|B_{\frac{k}{2^n}}(\omega) - B_{\frac{k-1}{2^n}}(\omega)|}{\phi(2^{-n})} > \delta.$$

Il en résulte que p.s.,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{m(\varepsilon)}{\phi(\varepsilon)} \geq \limsup_{n\to\infty}\frac{m(2^{-n})}{\phi(2^{-n})} > \delta,$$

et δ étant arbitrairement proche de 1, on obtient finalement l'inégalité désirée. ■

Enfin, terminons par deux résultats classiques. Le premier exhibe ce que l'on appelle la variation quadratique du mouvement brownien, objet fondamental sur lequel repose l'intégration stochastique, tandis que le second stipule que les trajectoires browniennes ne sont pas à variation bornée.

Définition 1.3.10. *La variation d'une fonction* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *sur un intervalle* $[0, T]$ *est définie par*

$$\mathrm{Var}(f, T) := \sup \sum_i |f(t_i) - f(t_{i-1})|,$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des subdivisions (t_i) *de* $[0, T]$*. Elle est dite à variation bornée sur l'intervalle* $[0, T]$ *si* $\mathrm{Var}(f, T) < \infty$.

Par exemple, toute fonction lipschitzienne est à variation bornée, toute fonction monotone également. En particulier, toute fonction à variation bornée:
- est différence de deux fonctions croissantes;
- a au plus une infinité dénombrable de points de discontinuité.
- est dérivable presque partout (au sens de la mesure de Lebesgue).

Mentionnons qu'à l'avenir les suites de subdivisions que nous considérerons seront en général emboîtées bien que dans certains cas, comme ci-dessous, cela ne soit pas nécessaire.

Proposition 1.3.11. *Soit* $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$ *une suite de subdivisions emboîtées de l'intervalle* $[0, t]$ *de pas tendant vers 0, i.e.* $\pi_n := \sup_{1\leq i\leq p_n} t_i^n - t_{i-1}^n \to 0$ *lorsque* $n \to \infty$*. Alors, on a la convergence suivante dans* L^2*:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{p_n}(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 - t\right)^2\right] = 0.$$

De plus, la convergence est p.s. lorsque la subdivision est uniforme.

Démonstration. En notant $\Delta B_{i,n} := B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n}$ et $\Delta t_{i,n} := t_i^n - t_{i-1}^n$, on remarque que pour $i \in \{1, \ldots, p_n\}$, les accroissements $Z_{i,n} := (\Delta B_{i,n})^2 - \Delta t_{i,n}$ sont centrés et indépendants, d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{p_n}(\Delta B_{i,n})^2 - t\right)^2\right] &= \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{p_n} Z_{i,n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{p_n} \mathrm{Var}\left(Z_{i,n}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2\sum_{i=1}^{p_n}(\Delta t_{i,n})^2 \\ &\leq 2t\pi_n, \end{aligned}$$

quantité qui tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. Dans la dernière égalité ci-dessus, nous avons utilisé le fait que si X est une variable aléatoire normale centrée et de variance σ^2, alors $\mathrm{Var}(X^2) = 2\sigma^4$.
À présent, supposons la subdivision de l'intervalle $[0, t]$ uniforme, i.e. les $\Delta t_{i,n}$ ne dépendent pas de i. Par exemple, considérons les t_i^n de la forme $t_i^n := it/2^n$ avec $p_n = 2^n$. Alors pour $i \in \{1, \dots, 2^n\}$, les accroissements $U_i := \sqrt{2^n/t}\,\Delta B_{i,n}$ sont i.i.d. de loi normale centrée réduite. On obtient alors par la loi forte des grands nombres que

$$\sum_{i=1}^{2^n}(\Delta B_{i,n})^2 = \frac{t}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}U_i^2$$

tend p.s. vers t lorsque $n \to +\infty$. ■

Corollaire 1.3.12. *On a le résultat suivant: p.s., les trajectoires du mouvement brownien ne sont pas à variation bornée.*

<u>*Démonstration*</u>. La preuve se fait par l'absurde. Fixons-nous un intervalle $[0, t]$, sur lequel p.s. les trajectoires browniennes sont à variation bornée. Ainsi, en reprenant les notations ci-dessus avec la subdivision uniforme sur $[0, t]$ et le module de continuité de Lévy, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(\Delta B_{i,n})^2 &\leq m(\pi_n)\sum_{i=1}^{n}|\Delta B_{i,n}| \\ &\leq m(\pi_n)\,\mathrm{Var}(B, t), \end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, le module de continuité de Lévy étant une fonction continue par continuité uniforme du mouvement brownien sur l'intervalle compact $[0, t]$. Il y a donc contradiction. ■

1.4 Propriété de Markov forte et principe de réflexion (Devoir maison)

On considère B un mouvement brownien sur $\mathbb{R}_+$ muni de sa filtration naturelle standard $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ (regarder le chapitre 2 pour la définition). On a vu que ce processus satisfait la propriété de Markov simple, i.e. pour tout $s \geq 0$, le processus $B^{(s)}$ donné par $B_t^{(s)} := B_{s+t} - B_s$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_s$. On rappelle aussi que pour tout $a \in \mathbb{R}_*$, le temps d'atteinte T_a de a est défini par

$$T_a := \inf\{t \geq 0 : B_t = a\},$$

et nous avons démontré qu'il est p.s. fini.

1 - Dans cette question, nous étendons la propriété de Markov simple à un temps d'arrêt fini quelconque: c'est la propriété de Markov forte. Ainsi, si τ est un temps d'arrêt p.s. fini, on veut montrer que le processus $B^{(\tau)}$ défini par $B_t^{(\tau)} := B_{\tau+t} - B_\tau$, est un mouvement brownien indépendant de la tribu $\mathcal{F}_\tau$.

Soit $d \in \mathbb{N}_*$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_d$ et f une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}^d$. Enfin, soit $A \in \mathcal{F}_\tau$.

(a) Montrez que l'identité suivante est satisfaite:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}&\left[1_A\, f(B_{t_1}^{(\tau)}, \ldots, B_{t_d}^{(\tau)})\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}\left[1_{A\cap\{(k-1)\,2^{-n}<\tau\leq k\,2^{-n}\}}\, f(B_{t_1}^{(k\,2^{-n})}, \ldots, B_{t_d}^{(k\,2^{-n})})\right],\end{aligned}$$

et déduisez-en que

$$\mathbb{E}\left[1_A\, f(B_{t_1}^{(\tau)}, \ldots, B_{t_d}^{(\tau)})\right] = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{E}\left[f(B_{t_1}, \ldots, B_{t_d})\right].$$

(b) Concluez.

2 - À présent, nous allons démontrer le principe de réflexion du mouvement brownien, qui énonce que le processus X donné par

$$X_t = B_t\, 1_{\{t\leq T_a\}} + (2a - B_t)\, 1_{\{t\geq T_a\}}, \quad t \geq 0,$$

est un mouvement brownien.

(a) D'après vous, pourquoi parle-t-on de principe de réflexion ?

(b) En utilisant la propriété de Markov forte du mouvement brownien, montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(2a - B_t \geq x; T_a \leq t) = \mathbb{P}(B_t \geq x; T_a \leq t), \quad t \geq 0,$$

(c) Déduisez-en que X_t a même loi que B_t pour tout $t \geq 0$.

(d) Pourquoi intuitivement le processus X est-il un mouvement brownien ?

3 - Le supremum du mouvement brownien est noté $S_t := \sup_{s\in[0,t]} B_s$, où $t > 0$. Dans cette dernière partie, nous donnons des informations sur S_t ainsi que sur le temps d'arrêt T_a.

(a) Soient $a \geq 0$ et $x \leq a$. En utilisant le même type d'argument que dans la question 2(b), montrez que

$$\mathbb{P}\left(S_t \geq a; B_t \leq x\right) = \mathbb{P}\left(B_t \geq 2a - x\right).$$

(b) Déduisez-en que S_t a même loi que $|B_t|$. Les processus S et $|B|$ ont-ils la même loi ?

(c) Montrez que la loi jointe du couple (S_t, B_t) a pour densité

$$f_t(a,x) = \frac{2(2a-x)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2a-x)^2}{2t}\right) 1_{[0,\infty)}(a)\, 1_{(-\infty,a]}(x).$$

(d) Calculez la densité de T_a.

Chapitre 2

Martingales

2.1 Rappels sur les martingales à temps discret

Commençons l'étude des martingales par le cas du temps discret, qui est plus aisée et dont la généralisation au cas du temps continu n'est pas difficile.

2.1.1 Définition et premières propriétés

Définition 2.1.1. *Une suite $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$ est appelée une filtration de l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ si*

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \cdots \subset \mathcal{A}.$$

L'espace $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ est alors appelé un espace de probabilité filtré.

Remarque 2.1.2. La notion de tribu est liée à l'information dont nous disposons. Ainsi, supposer cette suite de tribus croissante traduit simplement le fait que plus on avance dans le temps, plus on a d'informations.

Définition 2.1.3. *Considérons une suite de variables aléatoires réelles $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est adaptée à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si M_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Remarque 2.1.4. Notons que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est évidemment adaptée à sa filtration naturelle, définie par $\mathcal{F}_n := \sigma(M_k : k \in \{0, \ldots, n\})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 2.1.5. *Considérons une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adaptée à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et dont tous les éléments sont intégrables. On dit que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (pour $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$) une*

(*i*) *martingale si $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
(*ii*) *surmartingale si $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \leq M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
(*iii*) *sous-martingale si $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \geq M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Remarque 2.1.6. Observons qu'une martingale est à la fois une surmartingale et une sous-martingale. Par ailleurs, elle est forcément d'espérance constante, tandis que celle d'une surmartingale décroît et celle d'une sous-martingale croît.

Donnons-nous quelques exemples bien sympathiques:

(i) Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ désigne une suite de variables aléatoires indépendantes et intégrables, alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ définie par $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ est une martingale (resp. surmartingale, sous-martingale) pour la filtration engendrée par la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}_*$, on a $\mathbb{E}[X_n] = 0$ (resp. $\mathbb{E}[X_n] \leq 0$, $\mathbb{E}[X_n] \geq 0$).

(ii) Même conclusion pour la suite $M_n := S_n^2 - n\sigma^2$, sous réserve que les X_i ont même variance σ^2.

(iii) Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ désigne une suite de variables aléatoires indépendantes, intégrables et d'espérance commune égale à 1, alors la suite $M_n := \prod_{i=1}^n X_i$ est une martingale par rapport à la filtration naturelle de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$.

(iv) Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ est une suite de variables aléatoires intégrables, centrées, et à accroissements indépendants, alors c'est une martingale par rapport à sa filtration naturelle.

(v) Si $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une filtration quelconque et X une variable aléatoire intégrable, alors $M_n := \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n]$ est une martingale pour $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 2.1.7. *Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite adaptée à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et telle que tous ses éléments soient intégrables. Alors c'est une martingale si et seulement si pour tout $n, p \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbb{E}[M_{n+p} \mid \mathcal{F}_n] = M_n.$$

<u>*Démonstration.*</u> La condition suffisante est triviale (prendre $p = 1$). Pour la condition nécessaire, notons que l'on a pour $p \in \mathbb{N}_*$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_{n+p} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{p}(M_{n+i} - M_{n+i-1}) + M_n \mid \mathcal{F}_n\right] \\
&= \sum_{i=1}^{p} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[M_{n+i} - M_{n+i-1} \mid \mathcal{F}_{n+i-1}\right] \mid \mathcal{F}_n\right] + M_n \\
&= M_n,
\end{aligned}$$

car $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une filtration, on a $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+i-1}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$. ■

Dans la suite, nous supposerons l'espace de probabilité filtré par une filtration générique $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 2.1.8. *Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-martingale et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante. On suppose que $f(M_n) \in L^1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la suite $(f(M_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est elle-même une sous-martingale. Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale, alors il suffit que f soit convexe.*

<u>*Démonstration.*</u> Immédiate en utilisant l'inégalité de Jensen pour l'espérance conditionnelle. ■

Remarque 2.1.9. Par exemple, si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale alors $(|M_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ (avec $p \geq 1$ et sous réserve que chaque M_n est dans L^p) et $(M_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des sous-martingales.

À présent, introduisons la notion de transformation prévisible d'une martingale.

Définition 2.1.10. *Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ une suite de variables aléatoires réelles prévisibles, i.e. $A_n \in \mathcal{F}_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_*$. Alors la transformation prévisible de la martingale $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ est définie par la suite donnée par $\widetilde{M}_0 = M_0$ et*

$$\widetilde{M}_n := M_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i\,(M_i - M_{i-1}), \quad n \in \mathbb{N}_*.$$

La transformation prévisible permet de construire une nouvelle martingale à partir d'une martingale originelle, sous certaines conditions sur la suite prévisible. Il s'agit d'une version discrète de l'intégrale stochastique.

Théorème 2.1.11. *Si les variables aléatoires réelles A_n sont bornées en plus d'être prévisibles, alors la transformation prévisible $(\widetilde{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la martingale $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ est encore une martingale.*

<u>*Démonstration.*</u> Tout d'abord, remarquons que la suite $(\widetilde{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement adaptée par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et que la bornitude des A_n assure simplement que les éléments $\widetilde{M}_n$ sont bien intégrables pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étant donné un entier n, on a par la prévisibilité de A_{n+1},

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\widetilde{M}_{n+1} - \widetilde{M}_n | \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[A_{n+1}(M_{n+1} - M_n)|\mathcal{F}_n\right] \\
&= A_{n+1}\,\mathbb{E}\left[M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n\right] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

car $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale. ■

2.1.2 Théorème d'arrêt

Introduisons à présent la notion de temps d'arrêt.

Définition 2.1.12. *Une variable aléatoire entière τ, pouvant prendre la valeur $+\infty$, est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si*

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Notons que dans cette définition on peut remplacer l'événement $\{\tau \leq n\}$ par $\{\tau = n\}$, ce qui ne sera plus le cas lorsque le temps sera continu. Pour illuster cette notion de temps d'arrêt, prenons l'exemple d'un joueur rentrant avec une somme S_0 dans un casino. On note S_n sa fortune à l'instant n. Ce joueur décide de jouer tant qu'il a encore de l'argent

dans son portefeuille (on suppose le casino ouvert 24h sur 24). Cela signifie qu'il joue jusqu'à l'instant
$$\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\},$$
qui est un temps d'arrêt pour la filtration naturelle de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 2.1.13. *Étant donné un temps d'arrêt τ, on définit $\mathcal{F}_\tau$ la tribu des événements antérieurs à τ par*

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{A} : A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Dans beaucoup de circonstances, ce qui nous intéresse est le comportement d'une suite de variables aléatoires, disons $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, évaluée au temps d'arrêt τ. S'il est supposé fini p.s., alors on peut définir la variable aléatoire X_τ, qui est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable, comme

$$X_\tau := \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{\{\tau=n\}}\, X_n.$$

Lorsque que le temps d'arrêt est infini, nous pouvons toujours le tronquer en considérant plutôt pour un entier n donné le temps d'arrêt $n \wedge \tau$, qui est fini et même borné. Dans ce cas, la variable aléatoire $X_{n\wedge\tau}$ est bien définie.

Théorème 2.1.14 (Théorème d'arrêt)**.** *Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale et soit τ un temps d'arrêt. Alors la suite arrêtée $(M_{n\wedge\tau})_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une martingale.*
De plus, si $\tau_1 \leq \tau_2$ sont deux temps d'arrêt supposés bornés, alors on a

$$\mathbb{E}\left[M_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}\right] = M_{\tau_1} \quad \textit{et} \quad \mathbb{E}[M_{\tau_1}] = \mathbb{E}[M_{\tau_2}] = \mathbb{E}[M_0].$$

Démonstration. Quitte à remplacer $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la martingale $(M_n - M_0)_{n\in\mathbb{N}}$, supposons sans perte de généralité que $M_0 = 0$, ce que l'on fera (presque) systématiquement dans la suite de ce cours. La variable τ étant un temps d'arrêt, les variables aléatoires définies pour tout $n \in \mathbb{N}_*$ par $A_n := 1_{\{\tau\geq n\}}$ forment une famille prévisible par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus, on a

$$\sum_{i=1}^{n} A_i\,(M_i - M_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n\wedge\tau}(M_i - M_{i-1}) = M_{n\wedge\tau},$$

ce qui entraîne que la suite $(M_{n\wedge\tau})_{n\in\mathbb{N}}$ est la transformation prévisible de la martingale $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par rapport à $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$. Ainsi, le théorème 2.1.11 nous permet de conclure quant à la première affirmation. Le lecteur averti aura noté que cette propriété de martingale peut être démontrée directement, bien évidemment.
Démontrons maintenant les deux égalités. Supposons τ_2 borné par une constant positive κ. Comme $(M_{n\wedge\tau_2})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale, on a pour $n \geq \kappa$ que

$$\mathbb{E}\left[M_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}\right] \;=\; \mathbb{E}\left[M_{n\wedge\tau_2} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{p\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[M_{n\wedge\tau_2} \mid \mathcal{F}_p\right] 1_{\{\tau_1=p\}} \\
&= \sum_{p\in\mathbb{N}} M_{p\wedge\tau_2} 1_{\{\tau_1=p\}} \\
&= \sum_{p\in\mathbb{N}} M_p 1_{\{\tau_1=p\}} \\
&= M_{\tau_1},
\end{aligned}
$$

où la seconde égalité se démontre en revenant à la définition de l'espérance conditionnelle. Enfin, si τ désigne τ_1 ou τ_2, comme p.s. $M_{n\wedge\tau} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M_\tau$ et que

$$
\begin{aligned}
|M_{n\wedge\tau}| &\leq \sum_{i=1}^{n\wedge\tau} |M_i - M_{i-1}| \\
&\leq \sum_{i=1}^{\kappa} (|M_i| + |M_{i-1}|),
\end{aligned}
$$

qui est intégrable (car les M_i le sont) et indépendant de n, le théorème de convergence dominée entraîne que

$$\mathbb{E}[M_\tau] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[M_{n\wedge\tau}] = 0.$$

∎

2.2 Inégalités maximales et théorèmes de convergence

2.2.1 Inégalités maximales de Doob

Lorsque l'on étudie un processus aléatoire, une question importante en pratique est de savoir contrôler son évolution. En particulier, il s'avère que pour les sous-martingales positives, nous pouvons obtenir des inégalités sur son processus supremum, à savoir

$$M_n^* := \sup_{0\leq k\leq n} M_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On les appelle inégalités maximales (de Doob). Dans cette partie, nous établissons deux inégalités maximales pour les sous-martingales positives qui nous serviront comme ingrédient de base dans le développement du calcul stochastique. En particulier, une fois que tous les résultats ci-dessous seront démontrés, ils seront immédiatement valables pour des martingales, en remplaçant M_n^* par $\sup_{0\leq k\leq n} |M_k|$.

Théorème 2.2.1. *Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-martingale positive. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\lambda\, \mathbb{P}(M_n^* \geq \lambda) \leq \mathbb{E}[M_n 1_{\{M_n^*\geq\lambda\}}] \leq \mathbb{E}[M_n], \quad \lambda > 0.$$

Par ailleurs, si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a tous ses éléments dans L^p, où $p \geq 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(M_n^* \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[|M_n|^p]}{\lambda^p}, \quad \lambda > 0.$$

Démonstration. Établissons tout d'abord la première inégalité. Notons que pour une sous-martingale, on a

$$M_k \leq \mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_k], \quad k \leq n, \quad n, k \in \mathbb{N},$$

ce qui entraîne que pour tout $A \in \mathcal{F}_k$, en multipliant par 1_A et en prenant l'espérance,

$$\mathbb{E}[M_k \, 1_A] \leq \mathbb{E}[M_n \, 1_A].$$

Par ailleurs, on peut écrire l'identité suivante: pour tout $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}(M_n^* \geq \lambda) = \mathbb{P}(\tau_\lambda \leq n), \quad n \in \mathbb{N},$$

où τ_λ est le temps d'arrêt $\tau_\lambda := \inf\{n \in \mathbb{N} : M_n \geq \lambda\}$. Ainsi, étant donné que sur $\{\tau_\lambda \leq n\}$, on a $M_{\tau_\lambda} \geq \lambda$, on obtient en passant à l'espérance et en utilisant l'inégalité précédente que

$$\begin{aligned} \lambda \, \mathbb{P}(\tau_\lambda \leq n) &\leq \mathbb{E}[M_{\tau_\lambda} 1_{\{\tau_\lambda \leq n\}}] \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[M_k \, 1_{\{\tau_\lambda = k\}}] \\ &\leq \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[M_n \, 1_{\{\tau_\lambda = k\}}] \quad \text{car } \{\tau_\lambda = k\} \in \mathcal{F}_k \\ &= \mathbb{E}[M_n \, 1_{\{\tau_\lambda \leq n\}}], \end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration de la première inégalité.
Pour la seconde inégalité, on notera que si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale ou une sous-martingale positive et telle que $M_n \in L^p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $(|M_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale positive et l'inégalité précédente s'applique, ce qui termine la preuve. ∎

À présent, donnons une seconde inégalité maximale, comparant l'espérance du processus supremum avec celle du processus originel.

Théorème 2.2.2 (Doob L^p)**.** *Soit $p > 1$. Supposons que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une sous-martingale positive telle que $M_n \in L^p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n^* \in L^p$ et*

$$\mathbb{E}[(M_n^*)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[M_n^p].$$

Démonstration. Tout d'abord, le fait que $M_n^* \in L^p$ est une conséquence des inégalités

$$(M_n^*)^p \leq \left(\sum_{k=0}^n M_k\right)^p \leq (n+1)^{p-1} \sum_{k=0}^n M_k^p.$$

En se ramenant à la première inégalité maximale du théorème 2.2.1, il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(M_n^*)^p] &= p \int_0^\infty x^{p-1}\, \mathbb{P}(M_n^* \geq x)\, dx \\
&\leq p \int_0^\infty x^{p-2}\, \mathbb{E}[M_n\, 1_{\{M_n^* \geq x\}}]\, dx \\
&= p\, \mathbb{E}[M_n \int_0^{M_n^*} x^{p-2}\, dx] \\
&= \frac{p}{p-1}\, \mathbb{E}[M_n\, (M_n^*)^{p-1}] \\
&\leq \frac{p}{p-1}\, \mathbb{E}[M_n^p]^{1/p}\, \mathbb{E}[(M_n^*)^p]^{(p-1)/p},
\end{aligned}$$

où dans la dernière inégalité nous avons utilisé l'inégalité de Hölder avec les exposants p et $q = p/(p-1)$. Enfin, on regroupe les termes comme il faut dans l'inégalité ci-dessus et ceci achève la démonstration. ∎

2.2.2 Convergence des martingales

Dans ce paragraphe, nous nous attaquons à la convergence des martingales, sous diverses hypothèses d'intégrabilité. Pour la théorie du calcul stochastique que l'on va voir dans les prochains chapitres, un théorème important concerne les martingales bornées dans L^2. Énonçons ce premier résultat, dont la preuve repose essentiellement sur une inégalité maximale de Doob.

Théorème 2.2.3. *Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale bornée dans L^2, i.e.*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[M_n^2\right] < +\infty.$$

Alors la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.s. et dans L^2 vers une variable aléatoire $M_\infty \in L^2$.

Démonstration. Pour toute paire arbitraire de rationnels $a < b$, notons l'ensemble

$$A_{a,b} := \left\{ \omega \in \Omega : \liminf_{n\to+\infty} M_n(\omega) \leq a < b \leq \limsup_{n\to+\infty} M_n(\omega) \right\}.$$

Ainsi, la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ va converger p.s. (éventuellement vers l'infini) à partir du moment où l'on montre que $\mathbb{P}(\cup_{a,b\in\mathbb{Q}} A_{a,b}) = 0$. Afin de faire le rapprochement avec les inégalités maximales, observons que l'on a

$$A_{a,b} \subset \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{k\geq m} |M_k(\omega) - M_m(\omega)| \geq \frac{b-a}{2} \right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

En effet, si $\omega \in A_{a,b}$, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$b - a \leq \sup_{k\geq m} M_k(\omega) - \inf_{k\geq m} M_k(\omega)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{k,l\geq m} |M_k(\omega) - M_l(\omega)| \\
&\leq 2\sup_{k\geq m} |M_k(\omega) - M_m(\omega)|.
\end{aligned}
$$

Considérons à présent les accroissements définis par $d_k := M_k - M_{k-1}$, $k \in \mathbb{N}_*$. Comme la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de carré intégrable, on en déduit que les $(d_k)_{k\in\mathbb{N}_*}$ sont orthogonaux entre eux (exercice). Comme précédemment nous pouvons supposer sans perte de généralité que $M_0 = 0$, et l'on obtient alors

$$
\mathbb{E}[M_n^2] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^n d_k\right)^2\right] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[d_k^2\right],
$$

qui est la somme partielle d'une série convergente par l'hypothèse de L^2-bornitude. Par ailleurs, le processus $(M_{k+m} - M_m)_{k\in\mathbb{N}}$ étant une martingale (pour la filtration translatée $(\mathcal{F}_{k+m})_{k\in\mathbb{N}}$), la suite $(M'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $M'_k := (M_{k+m} - M_m)^2$ est une sous-martingale positive et l'inégalité de Doob du théorème 2.2.1, combinée au lemme de Fatou, s'applique de la manière suivante:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sup_{k\geq m} |M_k - M_m| \geq \frac{b-a}{2}\right) &= \mathbb{P}\left(\sup_{k\geq 0} M'_k \geq \frac{(b-a)^2}{4}\right) \\
&\leq \frac{4}{(b-a)^2} \liminf_{k\to\infty} \mathbb{E}\left[M'_k\right] \\
&= \frac{4}{(b-a)^2} \sup_{k\geq 0} \mathbb{E}\left[M'_k\right] \\
&= \frac{4}{(b-a)^2} \sup_{k\geq 0} \sum_{i=m}^{k+m} \mathbb{E}\left[d_i^2\right] \\
&= \frac{4}{(b-a)^2} \sum_{i\geq m} \mathbb{E}\left[d_i^2\right].
\end{aligned}
$$

Enfin, le terme de droite tend vers 0 lorsque $m \to +\infty$, ce qui démontre que $\mathbb{P}(A_{a,b}) = 0$, et donc que $\mathbb{P}(\cup_{a,b\in\mathbb{Q}} A_{a,b}) = 0$.
Pour démontrer la seconde assertion, notons M_∞ la limite p.s. de la martingale $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par le lemme de Fatou, on a

$$
\mathbb{E}\left[M_\infty^2\right] \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[M_n^2\right] \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[M_n^2\right] < +\infty,
$$

d'où M_∞ est non seulement finie mais aussi dans L^2. Enfin, la convergence dans L^2 est immédiate d'après ce qui précède:

$$
\mathbb{E}\left[(M_\infty - M_n)^2\right] = \sum_{k\geq n+1} \mathbb{E}[d_k^2] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
$$

■

Remarque 2.2.4. Mentionnons que ce résultat reste valable lorsqu'on remplace L^2 par L^p pour tout $p > 1$.

Il s'avère que l'on peut obtenir une complète caractérisation de la convergence des martingales dans l'espace L^1. Pour ce faire, introduisons tout d'abord le concept d'intégrabilité uniforme.

Définition 2.2.5. *Une famille de variables aléatoires réelles $(X_i)_{i\in I}$ est dite uniformément intégrable si*

$$\lim_{a\to+\infty} \sup_{i\in I} \mathbb{E}\left[|X_i|\, 1_{\{|X_i|>a\}}\right] = 0.$$

L'intérêt d'introduire cette notion est qu'elle va nous permettre d'obtenir la convergence dans L^1 à partir de la convergence p.s., lorsque le théorème de convergence dominée ne s'applique pas.

Proposition 2.2.6. *Si une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable et converge p.s. vers une variable aléatoire X_∞, alors $X_\infty \in L^1$ et la convergence a aussi lieu dans L^1.*

Démonstration. Notons pour tout $a > 0$ la quantité

$$\rho(a) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|X_n|\, 1_{\{|X_n|>a\}}\right].$$

Tout d'abord par le lemme de Fatou,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|X_\infty|\, 1_{\{|X_\infty|>a\}}\right] &\leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[|X_n|\, 1_{\{|X_n|>a\}}\right] \\ &\leq \rho(a), \end{aligned}$$

ce qui entraîne que $X_\infty \in L^1$ et même $\mathbb{E}[|X_\infty|] \leq \rho(a) + a$. Maintenant, on majore $|X_n - X_\infty|$ de la manière suivante:

$$|X_n - X_\infty| \leq |X_n - X_\infty|\, 1_{\{|X_n|\leq a\}} + |X_\infty|\, 1_{\{|X_n|>a\}} + |X_n|\, 1_{\{|X_n|>a\}}.$$

Les deux premiers termes sont majorés respectivement par $a + |X_\infty|$ et $|X_\infty|$, tous deux dans L^1, donc le théorème de convergence dominée entraîne que

$$\mathbb{E}\left[|X_n - X_\infty|\, 1_{\{|X_n|\leq a\}}\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[|X_\infty|\, 1_{\{|X_n|>a\}}\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[|X_\infty|\, 1_{\{|X_\infty|>a\}}\right] \leq \rho(a),$$

tandis que le troisième et dernier terme est majoré en espérance par $\rho(a)$. Ainsi, on obtient que

$$\limsup_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[|X_n - X_\infty|\right] \leq 2\rho(a),$$

et nous concluons la preuve en observant que $\rho(a) \to 0$ lorsque $a \to +\infty$. ∎

La proposition suivante exhibe des critères intéressants en pratique pour établir la propriété d'intégrabilité uniforme.

Proposition 2.2.7. *Les assertions suivantes sont vérifiées.*

(i) Si une famille de variables aléatoires réelles $(X_i)_{i\in I}$ est bornée par une variable aléatoire intégrable, alors elle est uniformément intégrable.

(ii) S'il existe $p>1$ tel que la famille de variables aléatoires $(X_i)_{i\in I}$ soit bornée dans L^p, i.e.

$$\sup_{i\in I}\mathbb{E}\left[|X_i|^p\right] < +\infty,$$

alors elle est uniformément intégrable.

(iii) Une famille de variables aléatoires réelles $(X_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable si et seulement si elle est bornée dans L^1 et équicontinue, i.e. pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que

$$\mathbb{P}(A) < \eta \Longrightarrow \sup_{i\in I}\mathbb{E}\left[|X_i|\,1_A\right] < \varepsilon.$$

<u>*Démonstration*</u>. Le point (i) est immédiat en utilisant le théorème de convergence dominée, tandis que pour le point (ii), on utilise les inégalités de Hölder puis de Chebyshev.
Établissons le point (iii). On a pour tout $A\in\mathcal{A}$ et tout $a>0$,

$$\mathbb{E}[|X_i|\,1_A] \le a\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{E}[|X_i|\,1_{\{|X_i|>a\}}].$$

Ainsi, en prenant $A=\Omega$, ceci entraîne par intégrabilité uniforme que $\sup_{i\in I}\mathbb{E}[|X_i|] < +\infty$. Montrons maintenant l'équicontinuité. Soit $\varepsilon>0$. On choisit alors a de telle sorte que $\sup_{i\in I}\mathbb{E}[|X_i|\,1_{\{|X_i|>a\}}] < \varepsilon/2$. De l'inégalité ci-dessus, il s'ensuit

$$\sup_{i\in I}\mathbb{E}[|X_i|\,1_A] \le a\,\mathbb{P}(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Enfin, le choix de $\eta := \varepsilon/(2a)$ nous permet d'établir l'équicontinuité.
Réciproquement, posons $M := \sup_{i\in I}\mathbb{E}\left[|X_i|\right] < +\infty$. Alors pour tout $i\in I$, l'inégalité de Chebyshev nous dit que

$$\sup_{i\in I}\mathbb{P}(|X_i|>a) \le \frac{M}{a},$$

et par suite, le choix de a assez grand et l'équicontinuité achèvent la démonstration de l'intégrabilité uniforme. ■

Remarque 2.2.8. En particulier, si une variable aléatoire réelle est intégrable, alors on peut adapter la preuve précédente pour montrer, en utilisant le théorème de convergence dominée, qu'elle est équicontinue. Ceci se généralise à une famille finie de variables aléatoires.

À présent, nous sommes en mesure d'établir la caractérisation de la convergence dans L^1 des martingales.

Théorème 2.2.9. *Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) il existe une variable aléatoire $Z \in L^1$ telle que

$$M_n = \mathbb{E}[Z \mid \mathcal{F}_n], \quad n \in \mathbb{N}.$$

(ii) la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable.

(iii) la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.s. et dans L^1 vers une variable $M_\infty \in L^1$.

Dans ce cas, on a $Z = M_\infty$ et la martingale $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite fermée (par M_∞).

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$: étant donné un entier n, considérons l'ensemble $A_n := \{|M_n| > a\}$. D'après les inégalités de Chebyshev puis de Jensen, on a

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) \leq \frac{\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|M_n|\right]}{a} \leq \frac{\mathbb{E}\left[|Z|\right]}{a}.$$

Par ailleurs, A_n étant $\mathcal{F}_n$-mesurable, l'inégalité de Jensen entraîne aussi

$$\mathbb{E}\left[|M_n|\, 1_{A_n}\right] \leq \mathbb{E}\left[|Z|\, 1_{A_n}\right].$$

La variable aléatoire Z étant équicontinue car intégrable, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(A_n) < \eta \Longrightarrow \mathbb{E}\left[|Z|\, 1_{A_n}\right] < \varepsilon.$$

Il suffit enfin de choisir a assez grand de sorte que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \eta$, et on aura alors $\mathbb{E}\left[|M_n|\, 1_{A_n}\right] < \epsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, autrement dit l'intégrabilité uniforme.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: on admet la démonstration de la convergence p.s., qui n'est pas difficile mais utilise un formalisme assez pénible à introduire. Il s'agit de considérer ce que l'on appelle le "nombre de montées d'une martingale à travers un intervalle fixé". Le lecteur intéressé trouvera une preuve de ce résultat dans n'importe quel ouvrage traitant de la convergence des martingales. Une fois la convergence p.s. établie, la convergence dans L^1 est immédiate par la proposition 2.2.6.

$(iii) \Rightarrow (i)$: notons que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ et tout $A \in \mathcal{F}_n$, la propriété de martingale et l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraînent que

$$\begin{aligned} \left|\mathbb{E}\left[(M_\infty - M_n)\, 1_A\right]\right| &= \left|\mathbb{E}\left[(M_\infty - M_{n+p})\, 1_A\right]\right| \\ &\leq \mathbb{E}\left[|M_\infty - M_{n+p})|\right] \\ &\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient que $\mathbb{E}\left[(M_\infty - M_n)\, 1_A\right] = 0$ pour tout $A \in \mathcal{F}_n$, donc que $M_n = \mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{F}_n]$. ■

Remarque 2.2.10. On en déduit par les théorèmes 2.2.3 et 2.2.9 que toute martingale bornée dans un L^p, où $p > 1$, est fermée.

2.3 Martingales à temps continu

À présent, nous allons nous focaliser dans le reste de ce cours sur les processus en temps continu. En particulier, nous allons généraliser au cadre des martingales à temps continu toutes les définitions, propriétés et résultats vus dans la partie précédente. Dans la suite tout processus $(X_t)_{t\geq 0}$ sera noté X.

2.3.1 Définition et premières propriétés

Définition 2.3.1. *Une famille $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$ est une filtration de l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ si*

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, \quad 0 \leq s \leq t.$$

L'espace $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ est alors appelé un espace de probabilité filtré.
On note $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$. Si chaque tribu $\mathcal{F}_t$ contient les ensembles négligeables de $\mathcal{F}_\infty$, la filtration est dite complète. Définissons la tribu

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}.$$

Alors $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$ est une nouvelle filtration. On dit que la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est continue à droite si $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ pour tout $t \geq 0$. Enfin une filtration est dite standard si elle est complète et continue à droite.

Remarque 2.3.2. On peut toujours se ramener au cas d'une filtration complète en remplaçant $\mathcal{F}_t$ par $\bar{\mathcal{F}}_t := \sigma(\mathcal{F}_t, \mathcal{N})$, où $\mathcal{N}$ désigne la classe des ensembles négligeables de $\mathcal{F}_\infty$. De plus, remarquons que la filtration $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$ est la plus petite filtration continue à droite contenant $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Enfin, si l'on considère la filtration naturelle d'un processus X à trajectoires continues, i.e. pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t := \sigma(X_s : s \in [0,t])$, il se peut qu'elle ne soit pas continue à droite.

Soit B un mouvement brownien, $\mathcal{F}_t^0 := \sigma(B_s : s \in [0,t])$ et $\mathcal{F}_\infty^0 := \sigma(B_t : t \geq 0)$. Si $\mathcal{N}$ désigne la classe des ensembles négligeables de $\mathcal{F}_\infty^0$, on définit

$$\mathcal{F}_t := \sigma(\mathcal{F}_t^0, \mathcal{N}).$$

La filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ s'appelle la filtration standard du mouvement brownien, et comme son nom l'indique, c'est une filtration standard car elle est continue à droite (résultat admis): $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ pour tout $t \geq 0$.

Définition 2.3.3. *Un processus X est adapté à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $t \geq 0$.*

Définition 2.3.4. *Considérons un processus M adapté à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, et dont tous les éléments sont intégrables. On dit que M est, par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, une*

(i) martingale si $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$ pour tout $0 \leq s \leq t$.

(ii) surmartingale si $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] \leq M_s$ pour tout $0 \leq s \leq t$.

(iii) sous-martingale si $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] \geq M_s$ pour tout $0 \leq s \leq t$.

Encore une fois, donnons-nous quelques exemples encore plus sympathiques que dans le cadre discret. Pour cela, on considère un processus à accroissements indépendants X, i.e. pour tout $0 \leq s < t$, la variable aléatoire $X_t - X_s$ est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_s$, où $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est sa filtration naturelle. Le lecteur attentif aura remarqué que cette définition est légèrement différente de celle donnée pour le mouvement brownien au chapitre précédent, dans la proposition 1.1.11. Il s'avère qu'en fait ces deux définitions coïncident lorsque l'on prend la filtration standard du mouvement brownien.

(i) Si le processus X est intégrable alors $M_t := X_t - \mathbb{E}[X_t]$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

(ii) Si X est centré et de carré intégrable, alors même conclusion pour le processus $M_t := X_t^2 - \mathbb{E}[X_t^2]$.

(iii) Si X est exponentiellement intégrable d'ordre $\theta > 0$, alors même conclusion pour le processus $M_t^{(\theta)} := e^{\theta X_t}/\mathbb{E}\left[e^{\theta X_t}\right]$.

En particulier, on voit que le mouvement brownien est une martingale par rapport à sa filtration standard.

Dans la suite de ce cours, on supposera l'espace de probabilité filtré par une filtration générique $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Proposition 2.3.5. *Soit M une sous-martingale et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante. On suppose que $f(M_t) \in L^1$ pour tout $t \geq 0$. Alors le processus $(f(M_t))_{t\geq 0}$ est elle-même une sous-martingale. Si M est une martingale, alors il suffit que f soit convexe.*

2.3.2 Théorème d'arrêt et inégalités maximales de Doob

Comme dans le cadre discret, introduisons à présent la notion de temps d'arrêt relativement à une filtration.

Définition 2.3.6. *Une variable aléatoire τ, pouvant prendre la valeur $+\infty$, est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si*

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad t \geq 0.$$

Dans ce cas, on définit la tribu $\mathcal{F}_\tau$ des événements antérieurs à τ par

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{A} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \geq 0\}.$$

Notons que si τ n'était pas un temps d'arrêt, $\mathcal{F}_\tau$ ne serait pas une tribu ($\Omega \notin \mathcal{F}_\tau$). De plus, on remarque que la définition de $\mathcal{F}_\tau$ est quelque peu différente du cas où le temps est discret, où la notion de continuité à droite n'a pas de sens (comme on l'a vu précédemment, on peut utiliser comme définition d'un temps d'arrêt que $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ ou $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Dans le cas continu, $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \geq 0$ n'implique pas que τ est un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Voici maintenant une liste de propriétés classiques satisfaites par les temps d'arrêt, dont les démonstrations sont laissées au lecteur passionné. En particulier, certains résultats nous prouvent à quel point il est agréable de considérer une filtration standard plutôt qu'une filtration quelconque.

Proposition 2.3.7. (i) *Si $\tau(\omega) = t$ pour tout $\omega \in \Omega$, alors τ est un temps d'arrêt et $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$ (il n'y a donc pas d'ambiguïté de notation).*

(ii) *Le temps d'arrêt τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable.*

(iii) *Si $\tau_1 \leq \tau_2$, alors $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$.*

(iv) *Les variables $\min\{\tau_1, \tau_2\}$ et $\max\{\tau_1, \tau_2\}$ sont des temps d'arrêt et $\mathcal{F}_{\min\{\tau_1,\tau_2\}} = \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$.*

(v) *Les événements $\{\tau_1 < \tau_2\}$, $\{\tau_1 \leq \tau_2\}$ et $\{\tau_1 = \tau_2\}$ sont dans $\mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$.*

(vi) *Si $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de temps d'arrêt, alors $\tau := \lim_{n\to\infty} \tau_n$ est aussi un temps d'arrêt (éventuellement infini).*

(vii) *La variable τ est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$ si et seulement si pour tout $t \geq 0$, $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$.*

$(viii)$ *Si $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ n'est pas continue à droite, il existe des temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$ qui ne le sont pas pour $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.*

(ix) *Tout temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$ est limite d'une suite décroissante de temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.*

(x) *Si $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est continue à droite, alors on peut remplacer $\{\tau \leq t\}$ par $\{\tau < t\}$ dans la définition de la tribu $\mathcal{F}_\tau$.*

Soit X un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Étant donné un borélien A, on note le temps d'entrée dans A par $\tau_A := \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\}$, où l'on convient que $\inf \emptyset = \infty$.

(xi) *Si A est fermé et X à trajectoires continues, alors τ_A est un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.*

(xii) *Si A est ouvert et X à trajectoires continues, alors τ_A est un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$.*

À partir de maintenant, vu que l'on va sans cesse manipuler des temps d'arrêt, la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sera supposée standard.

Théorème 2.3.8 (Théorème d'arrêt)**.** *Soit M une martingale continue et soit τ un temps d'arrêt p.s. fini. Alors le processus arrêté M^τ donné par $M_t^\tau = M_{t\wedge\tau}$ est aussi une martingale.*
De plus, si $\sigma \leq \tau$ sont deux temps d'arrêt bornés, alors on a

$$\mathbb{E}\left[M_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\right] = M_\sigma \quad \textit{et} \quad \mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_\sigma] = \mathbb{E}[M_0].$$

Remarque 2.3.9. Si l'on suppose que la martingale est uniformément intégrable, alors on peut s'affranchir de l'hypothèse de bornitude sur les temps d'arrêt. Cette remarque est évidemment valable pour le théorème d'arrêt en temps discret.

Démonstration. Les deux points que nous devons vérifier sont l'intégrabilité du processus M^τ ainsi que la propriété de martingale, i.e. pour tout $0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}\left[M_{t\wedge\tau} \mid \mathcal{F}_s\right] = M_{s\wedge\tau}.$$

Pour ce faire, notons pour tout entier $n \geq 1$ l'ensemble discret

$$\mathcal{S}_n(s,t) := \{s + (t-s)k/2^n : k \in \mathbb{Z}\},$$

qui contient les éléments s et t, et désignons par τ_n le plus petit élément de $\mathcal{S}_n(s,t)$ supérieur ou égal à τ, i.e.

$$\tau_n = \inf\{u \in \mathcal{S}_n(s,t) : u \geq \tau\}.$$

On remarque que $\mathcal{S}_n(s,t) \subset \mathcal{S}_{n+1}(s,t)$ et que $(\tau_n)_{n\geq 1}$ est une suite de temps d'arrêt qui tend p.s. vers τ en décroissant. Ainsi le processus $(M_u)_{u\in\mathcal{S}_n(s,t)^+}$ (resp. $(|M_u|)_{u\in\mathcal{S}_n(s,t)^+}$) est une martingale (resp. sous-martingale) à temps discret par rapport à la filtration discrète $(\mathcal{F}_u)_{u\in\mathcal{S}_n(s,t)^+}$, où $\mathcal{S}_n(s,t)^+$ désigne l'ensemble des éléments positifs ou nuls de $\mathcal{S}_n(s,t)$. Ainsi, par le théorème d'arrêt 2.1.14, les temps d'arrêt t et $t \wedge \tau_n$ étant dans $\mathcal{S}_n(s,t)^+$ et bornés, on a

$$\mathbb{E}\left[M_t \mid \mathcal{F}_{t\wedge\tau_n}\right] = M_{t\wedge\tau_n}, \tag{2.3.1}$$

et par l'inégalité de Jensen, on obtient

$$\mathbb{E}\left[|M_{t\wedge\tau_n}|\right] \leq \mathbb{E}\left[|M_t|\right].$$

En faisant tendre n vers l'infini, le lemme de Fatou entraîne l'intégrabilité du processus M^τ. Par ailleurs, comme $s, t, \tau_n \in \mathcal{S}_n(s,t)^+$, le théorème d'arrêt 2.1.14 nous dit que

$$\mathbb{E}\left[M_{t\wedge\tau_n} \mid \mathcal{F}_s\right] = M_{s\wedge\tau_n}.$$

Il reste à faire tendre n proprement vers l'infini de chaque côté de l'égalité. Par continuité de la martingale, le terme de droite tend p.s. vers $M_{s\wedge\tau}$. De même, comme $M_{t\wedge\tau_n}$ tend p.s. vers $M_{t\wedge\tau}$, il nous suffit de montrer, par unicité de la limite, la convergence dans L^1 pour établir l'égalité désirée. En adaptant la preuve du début du théorème 2.2.9, l'égalité (2.3.1) entraîne l'uniforme intégrabilité de la suite $(M_{t\wedge\tau_n})_{n\geq 1}$. Ainsi, par la proposition 2.2.6, la convergence dans L^1 est démontrée, ce qui achève la démonstration de la première partie du théorème.

À présent, si τ et σ sont deux temps d'arrêt bornés (disons par κ), alors adaptant le même raisonnement que précédemment, il existe deux suites décroissantes de temps d'arrêt $(\tau_n)_{n\geq 1}$ et $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ convergeant p.s. respectivement vers τ et σ, et telles que p.s., $\sigma_n \leq \tau_n$ pour tout entier $n \geq 1$ et $\tau_n \leq \kappa + 1$ pour n assez grand. Alors par le théorème d'arrêt 2.1.14 appliqué à la restriction de la martingale à l'ensemble (discret) des valeurs possibles pour un couple (σ_n, τ_n),

$$\mathbb{E}\left[M_{\tau_n} \mid \mathcal{F}_{\sigma_n}\right] = M_{\sigma_n}.$$

Ceci entraîne que pour tout $A \in \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma_n}$,

$$\mathbb{E}\left[1_A M_{\tau_n}\right] = \mathbb{E}\left[1_A M_{\sigma_n}\right]. \tag{2.3.2}$$

Par ailleurs, on a aussi pour n assez grand que

$$M_{\sigma_n} = \mathbb{E}\left[M_{\kappa+1} \mid \mathcal{F}_{\sigma_n}\right] \quad \text{et que} \quad M_{\tau_n} = \mathbb{E}\left[M_{\kappa+1} \mid \mathcal{F}_{\tau_n}\right].$$

Ainsi, les suites $(M_{\sigma_n})_{n\geq 1}$ et $(M_{\tau_n})_{n\geq 1}$ sont uniformément intégrables. Enfin, comme elles convergent p.s. respectivement vers M_σ et M_τ, on en déduit par la proposition 2.2.6 la convergence dans L^1, et donc on obtient en faisant tendre $n \to \infty$ dans (2.3.2) l'égalité désirée:

$$\mathbb{E}\left[M_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\right] = M_\sigma.$$

■

On vient de voir qu'il fallait travailler un peu afin d'établir le théorème d'arrêt en temps continu. En revanche, l'adaptation des inégalités maximales de Doob au temps continu est immédiate, comme on va le voir ci-dessous. Dans la suite, on note pour une sous-martingale positive son processus supremum

$$M_T^* := \sup_{t\in[0,T]} M_t, \quad T > 0.$$

En particulier, une fois que tous les résultats ci-dessous seront démontrés, ils seront immédiatement valables pour des martingales, en remplaçant M_T^* par $\sup_{t\in[0,T]} |M_t|$.

Théorème 2.3.10 (Inégalités maximales de Doob)**.** *Soit M une sous-martingale positive continue et ayant tous ses éléments dans L^p, où $p \geq 1$. Alors pour tout $T > 0$ on a l'inégalité suivante :*

$$\mathbb{P}\left(M_T^* > \lambda\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[M_T^p\right]}{\lambda^p}, \quad \lambda > 0,$$

et si $p > 1$, on a aussi

$$\mathbb{E}\left[(M_T^*)^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[M_T^p\right].$$

<u>*Démonstration*</u>. Étant donné $T > 0$, notons pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble $\mathcal{S}_n[0,T] := \{kT/2^n : k = 0, 1, \ldots, 2^n\}$. Alors par continuité du processus M, on a

$$M_T^* = \lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in\mathcal{S}_n[0,T]} M_t.$$

Ainsi, en utilisant les deux inégalités maximales de Doob du théorème 2.2.1 pour la sous-martingale positive à temps discret $(M_t)_{t\in\mathcal{S}_n[0,T]}$ puis le lemme de Fatou, on obtient pour tout $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}\left(M_T^* > \lambda\right) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{t\in\mathcal{S}_n[0,T]} M_t > \lambda\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[M_T^p\right]}{\lambda^p},$$

et aussi

$$\mathbb{E}\left[(M_T^*)^p\right] \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in\mathcal{S}_n[0,T]} M_t^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[M_T^p\right].$$

■

2.3.3 Convergence des martingales

Dans ce paragraphe, nous adaptons au cadre du temps continu les théorèmes de convergence des martingales à temps discret.

Théorème 2.3.11. *Soit M une martingale continue bornée dans L^p, i.e.*

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|M_t|^p] < +\infty$$

pour un $p > 1$. Alors elle converge p.s. et dans L^p vers une variable aléatoire $M_\infty \in L^p$. De plus, la martingale est fermée par M_∞, i.e. $M_t = \mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{F}_t]$, $t \geq 0$.

Démonstration. Démontrons simplement le cas de la convergence L^p. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\|M_t - M_\infty\|_p \leq \|M_t - M_m\|_p + \|M_m - M_\infty\|_p, \quad t \geq 0.$$

Le processus $(|M_t - M_m|^p)_{t\geq m}$ étant une sous-martingale pour la filtration translatée $(\mathcal{F}_{m+t})_{t\geq 0}$, on a pour tout entier n vérifiant $n > t \geq m$ que

$$\|M_t - M_m\|_p \leq \|M_n - M_m\|_p,$$

et donc il vient pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\limsup_{t\to+\infty} \|M_t - M_\infty\|_p \leq \|M_m - M_\infty\|_p + \sup_{n\geq m} \|M_n - M_m\|_p.$$

Enfin, par la version L^p du théorème 2.2.3, la martingale discrète M_m converge vers M_∞ dans L^p et on en déduit que les deux termes de droite tendent vers 0 lorsque m tend vers l'infini. ■

Théorème 2.3.12. *Soit M une martingale continue. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) M est fermée par une variable aléatoire $Z \in L^1$.
(ii) M est uniformément intégrable.
(iii) M converge p.s. et dans L^1 vers une variable $M_\infty \in L^1$.

Dans ce cas, on a $Z = M_\infty$.

Démonstration. Les démonstrations de $(i) \Rightarrow (ii)$ et $(iii) \Rightarrow (i)$ sont les mêmes que celles du théorème 2.2.9 pour les martingales à temps discret.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Une fois la convergence p.s. démontrée, la convergence dans L^1 se déduit de l'uniforme intégrabilité par la proposition 2.2.6, comme dans le cadre discret. Ainsi, démontrons la convergence p.s. de la martingale. Tout d'abord, définissons la suite croissante de temps d'arrêt

$$\tau_n := \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

et notons que par le théorème d'arrêt 2.3.8, le processus M^{τ_n} est une martingale bornée par n. Ainsi, par le théorème 2.3.11, elle converge p.s. lorsque $t \to \infty$. Étant donné que l'on a $M_t = M_{t\wedge\tau_n}$ lorsque $\tau_n = \infty$, on en déduit que la martingale M converge p.s. sur $\{\tau_n = \infty\}$. À présent, on sait que l'uniforme intégrabilité entraîne la bornitude dans L^1 et donc par l'inégalité maximale de Doob du théorème 2.3.10, on a pour tout $n \in \mathbb{N}_*$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau_n < \infty) &= \lim_{T\to\infty} \mathbb{P}(\tau_n \leq T) \\
&= \lim_{T\to\infty} \mathbb{P}\left(M_T^* \geq n\right) \\
&\leq \frac{\sup_{T>0} \mathbb{E}\left[|M_T|\right]}{n}.
\end{aligned}$$

Ainsi, il en résulte que $\mathbb{P}(\cap_{n\in\mathbb{N}}\{\tau_n < \infty\}) = 0$. Enfin, la martingale M convergeant p.s. sur $\cup_{n\in\mathbb{N}}\{\tau_n = \infty\}$, qui est donc un événement de probabilité 1, on en déduit qu'elle converge p.s., ce qui achève la démonstration. ∎

Chapitre 3

Semimartingales continues

Dans le chapitre précédent, nous avons vu le cas des martingales. Il s'avère que ces processus font partie d'une classe plus générale de processus stochastiques, appelés semimartingales, pour lesquels nous serons en mesure dans le prochain chapitre d'établir une théorie de l'intégration stochastique. Par définition, une semimartingale continue est la somme d'une martingale locale et d'un processus à variation bornée, tous deux continus. Après avoir défini la notion de martingale locale, nous introduirons la variation quadratique d'une semimartingale, qui jouera dans cette théorie de l'intégration un rôle prépondérant.

3.1 Martingales locales

3.1.1 Définition et premières propriétés

Par soucis de concision, les martingales (locales) que nous considérerons dans la suite de ce chapitre seront, sauf mention du contraire, toujours continues et issues de 0.

Définition 3.1.1. *Un processus M adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale s'il existe une suite croissante $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de temps d'arrêt tendant vers l'infini et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le processus arrêté $M^{\tau_n} = (M_{t\wedge\tau_n})_{t\geq 0}$ est une martingale. On dit alors que la suite $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réduit M ou est une suite localisante pour M.*

Remarque 3.1.2. Au contraire des martingales classiques, nous n'imposons pas d'hypothèse d'intégrabilité sur les martingales locales.

À présent, établissons quelques propriétés classiques des martingales locales, qui sont bien utiles en pratique. Les démonstrations sont laissées en exercice.

Proposition 3.1.3. (*i*) *Une martingale est une martingale locale (la suite $\tau_n = n$ est localisante).*

(*ii*) *Si M est une martingale locale, alors pour tout temps d'arrêt τ, le processus arrêté M^τ est aussi une martingale locale (utiliser le théorème d'arrêt).*

(iii) Si $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réduit une martingale locale et que $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de temps d'arrêt tendant vers l'infini, alors la suite $(\tau_n \wedge \theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi localisante.

(iv) L'espace des martingales locales est un espace vectoriel.

Dans la suite, nous donnons quelques propriétés supplémentaires des martingales locales que l'on utilise fréquemment en pratique.

Proposition 3.1.4. *Les propriétés suivantes sont satisfaites:*

(i) Une martingale locale positive M telle que $M_0 \in L^1$ est une surmartingale.

(ii) Une martingale locale bornée ou telle qu'il existe $Z \in L^1$ telle que pour tout $t \geq 0$, $|M_t| \leq Z$, est une martingale (supposer que $M_t \in L^1$ pour tout $t \geq 0$ ne suffit pas; en revanche la condition $\mathbb{E}[\sup_{s\in[0,t]} |M_s|] < \infty$ pour tout $t \geq 0$ est suffisante, et bien utile en pratique).

(iii) Si M est une martingale locale, alors la suite $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\tau_n := \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}$ est localisante.

(iv) Si une martingale locale est à variation bornée, alors elle est p.s. identiquement nulle.

Démonstration. (i) : Soit $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite localisante et soient $s \leq t$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M_{s\wedge\tau_n} \quad = \quad \mathbb{E}\left[M_{t\wedge\tau_n} \mid \mathcal{F}_s\right].$$

Puisque la martingale locale est positive, on peut appliquer le lemme de Fatou pour les espérances conditionnelles et on obtient

$$M_s \quad \geq \quad \mathbb{E}\left[M_t \mid \mathcal{F}_s\right].$$

Enfin, en prenant $s = 0$ puis en passant à l'espérance, on voit que $M_t \in L^1$ pour tout $t \geq 0$. Il s'agit donc bien d'une surmartingale.

(ii) : Même raisonnement que précédemment, en utilisant cette fois le théorème de convergence dominée.

(iii) : C'est une conséquence immédiate de (ii).

(iv) : Ce cas est plus délicat. Supposons la martingale locale M à variation bornée. Alors pour tout $t \geq 0$, le processus variation $(\mathrm{Var}(M,t))_{t\geq 0}$ est fini et la suite de temps d'arrêt $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définis par $\tau_n := \inf\{t \geq 0 : \mathrm{Var}(M,t) \geq n\}$ tend vers l'infini. Il en résulte par l'item (ii) de la proposition 3.1.3 que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le processus arrêté M^{τ_n} est une martingale locale dont la variation (et donc le processus lui-même) est bornée par n. Ainsi, c'est une vraie martingale.
Soit maintenant $0 = t_0^k < t_1^k < \cdots < t_{p_k}^k = t$ une suite de subdivisions emboîtées de l'intervalle $[0,t]$ de pas tendant vers 0 lorsque $k \to \infty$. Alors par la propriété de martingale,

$$\mathbb{E}\left[M^2_{t\wedge\tau_n}\right] \quad = \quad \sum_{i=1}^{p_k} \mathbb{E}\left[M^2_{t_i^k\wedge\tau_n} - M^2_{t_{i-1}^k\wedge\tau_n}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{p_k} \mathbb{E}\left[(M_{t_i^k\wedge\tau_n} - M_{t_{i-1}^k\wedge\tau_n})^2\right] + 2\,\mathbb{E}\left[M_{t_{i-1}^k\wedge\tau_n}(M_{t_i^k\wedge\tau_n} - M_{t_{i-1}^k\wedge\tau_n})\right] \\
&= \sum_{i=1}^{p_k} \mathbb{E}\left[(M_{t_i^k\wedge\tau_n} - M_{t_{i-1}^k\wedge\tau_n})^2\right] \\
&\leq n\,\mathbb{E}\left[\sup_{i\in\{1,\ldots,p_k\}} |M_{t_i^k\wedge\tau_n} - M_{t_{i-1}^k\wedge\tau_n}|\right],
\end{aligned}
$$

et cette dernière quantité tend vers 0 lorsque $k \to \infty$ par (uniforme) continuité des trajectoires du processus et en utilisant le théorème de convergence dominée (le processus étant borné par n). On en conclut alors que $\mathbb{E}\left[M_{t\wedge\tau_n}^2\right] = 0$ et donc par le lemme de Fatou quand $n \to \infty$ que $\mathbb{E}\left[M_t^2\right] = 0$. ∎

3.1.2 Variation quadratique

À présent, intéressons-nous à la notion de variation quadratique.

Théorème 3.1.5. *Soit M une martingale locale. Alors il existe un unique processus croissant continu et adapté, appelé la variation quadratique de M et noté $([M,M]_t)_{t\geq 0}$, tel que $M^2 - [M,M]$ soit une martingale locale. De plus, si $0 = t_0^k < t_1^k < \cdots < t_{p_k}^k = t$ est une suite de subdivisions emboîtées de l'intervalle $[0,t]$ de pas tendant vers 0 lorsque $k \to \infty$, on a la convergence en probabilité suivante:*

$$[M,M]_t = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{p_k} (M_{t_i^k} - M_{t_{i-1}^k})^2.$$

Par exemple, en utilisant la sémantique nouvellement introduite, on a vu au premier chapitre que la variation quadratique du mouvement brownien était $[B,B]_t = t$ pour tout $t \geq 0$. Notons aussi que la variation quadratique étant un processus croissant, elle est à variation bornée.

Démonstration. Pour l'unicité, notons que si A et B sont deux processus satisfaisant les conditions données, alors le processus différence donné par

$$A_t - B_t = (M_t^2 - B_t) - (M_t^2 - A_t),$$

doit être à la fois une martingale locale et à variation bornée, comme différence de deux processus croissants. Ainsi, par la proposition 3.1.4, on a p.s. $A_t = B_t$ pour tout $t \geq 0$.

Pour l'existence, remarquons qu'il suffit de démontrer le résultat pour les martingales bornées nulles en 0, quitte à réduire la martingale locale par $\tau_n := \inf\{t \geq 0 : |M_t - M_0| \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. En effet, supposons l'existence démontrée pour la martingale bornée M^{τ_n}. Grâce à la partie unicité, il existe un processus croissant continu et adapté $[M,M]$ tel que $[M^{\tau_n}, M^{\tau_n}] = [M,M]^{\tau_n}$. De plus, le processus $(M^2)^{\tau_n} - [M,M]^{\tau_n}$ étant une martingale par construction (à venir), le processus $M^2 - [M,M]$ est précisément une martingale locale. Pour la convergence, on a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|[M,M]_t - \sum_{i=1}^{p_k}(M_{t_i^k} - M_{t_{i-1}^k})^2| > \varepsilon\right) &\leq \mathbb{P}\left(|[M^{\tau_n},M^{\tau_n}]_t - \sum_{i=1}^{p_k}(M^{\tau_n}_{t_i^k} - M^{\tau_n}_{t_{i-1}^k})^2| > \varepsilon\right) \\ &\quad + \mathbb{P}(\tau_n \leq t),\end{aligned}$$

et la première quantité tend vers 0 lorsque $k \to \infty$, tandis que la seconde tend vers 0 quand $n \to \infty$, la suite $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant p.s. vers l'infini.

Ainsi, supposons la martingale locale M bornée et notons K une borne supérieure. Soit $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$ une suite strictement croissante tendant vers l'infini (une subdivision de $\mathbb{R}_+$), que l'on va noter Δ. Pour $t \geq 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $t_k \leq t < t_{k+1}$. Notons alors le processus issu de 0:

$$V_t^\Delta(M) := \sum_{i=1}^{k}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 + (M_t - M_{t_k})^2,$$

ou juste V_t^Δ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la martingale, le terme supplémentaire en t nous assurant de la continuité du processus adapté V^Δ. On va montrer que le processus $M^2 - V^\Delta$ est une martingale (continue). Soit $s \leq t$. Si $t_k \leq s \leq t < t_{k+1}$, alors

$$\begin{aligned}V_t^\Delta - V_s^\Delta &= (M_t - M_{t_k})^2 - (M_s - M_{t_k})^2 \\ &= M_t^2 - M_s^2 - 2M_{t_k}(M_t - M_s).\end{aligned}$$

En particulier, M étant une martingale, on a

$$\mathbb{E}\left[V_t^\Delta - V_s^\Delta \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - M_s^2.$$

Maintenant, si $t_{k-1} \leq s < t_k$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[V_t^\Delta - V_s^\Delta \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[(M_t - M_{t_k})^2 \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &\quad - \mathbb{E}\left[(M_s - M_{t_{k-1}})^2 \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - M_s^2.\end{aligned}$$

Enfin, si $s < t_{k-1}$ alors il existe $n < k-1$ tel que $t_n \leq s < t_{n+1}$, et dans ce cas on a après calculs que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[V_t^\Delta - V_s^\Delta \mid \mathcal{F}_s\right] &= \sum_{i=n+1}^{k}\mathbb{E}\left[(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[(M_t - M_{t_k})^2 \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &\quad - \mathbb{E}\left[(M_s - M_{t_n})^2 \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - M_s^2.\end{aligned}$$

Ainsi, le processus $M^2 - V^\Delta$ est bien une martingale (continue), et de plus, on a pour tous $s \leq t$,

$$\mathbb{E}\left[V_t^\Delta - V_s^\Delta \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right], \tag{3.1.1}$$

identité ne dépendant pas de Δ, et qui va nous servir dans la suite. Remarquons que le processus V^Δ vérifie toutes les propriétés que doit satisfaire le crochet droit $[M,M]$, sauf la croissance. En effet, comme on va le voir dans la suite, V^Δ est croissant le long de la subdivision Δ mais en aucun cas croissant sur $\mathbb{R}_+$.

À présent, fixons $t \geq 0$ et soit $0 = t_0^k < t_1^k < \cdots < t_{p_k}^k = t$ une suite de subdivisions emboîtées de l'intervalle $[0,t]$ de pas tendant vers 0 lorsque $k \to \infty$, et telle que $\cup_{k\geq 1}(t_n^k)_{n\in\{0,\ldots,p_k\}}$ soit dense dans $[0,t]$. Comme précédemment, pour tout $s \in [0,t]$, il existe $n \leq p_k$ tel que $t_n^k \leq s < t_{n+1}^k$. Notons alors

$$V_s^k(M) := \sum_{i=1}^{n} (M_{t_i^k} - M_{t_{i-1}^k})^2 + (M_s - M_{t_n^k})^2,$$

ou juste V_s^k s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la martingale. Pour montrer que

$$V_t^k = \sum_{i=1}^{p_k} (M_{t_i^k} - M_{t_{i-1}^k})^2$$

converge dans L^2, on va montrer que c'est une suite de Cauchy. Tout d'abord si $k < l$, le processus $(V_s^l - V_s^k)_{s\in[0,t]}$ est une martingale (issue de 0) par ce qui précède, et en prenant l'espérance dans (3.1.1) appliquée à $V^l - V^k$ à la place de M,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(V_t^l - V_t^k\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[V_t^l(V^l - V^k)\right] \\
&\leq 2\,\mathbb{E}\left[V_t^l(V^l)\right] + 2\,\mathbb{E}\left[V_t^l(V^k)\right],
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$. Notons que l'on a simplement

$$\begin{aligned}
V_t^l(V^l) &= \sum_{i=1}^{p_l} (V_{t_i^l}^l - V_{t_{i-1}^l}^l)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{p_l} (M_{t_i^l} - M_{t_{i-1}^l})^4 \\
&\leq V_t^l(M) \sup_{i\in\{1,\ldots,p_l\}} |M_{t_i^l} - M_{t_{i-1}^l}|^2,
\end{aligned}$$

et donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\mathbb{E}\left[V_t^l(V^l)\right]^2 \leq \mathbb{E}\left[\left(V_t^l(M)\right)^2\right] \mathbb{E}\left[\sup_{i\in\{1,\ldots,p_l\}} |M_{t_i^l} - M_{t_{i-1}^l}|^4\right].$$

Ainsi, comme la martingale M est (uniformément) continue et bornée par K, le théorème de convergence dominée entraîne que le terme de droite tend vers 0 lorsque $l \to \infty$, et donc que $V_t^l(V^l)$ tend vers 0 dans L^2, sous réserve que la suite $(V_t^l(M))_{l\in\mathbb{N}_*}$ soit bornée dans L^2, ce que l'on va vérifier un peu plus tard.

Pour le terme $V_t^l(V^k)$, on va le traiter de la manière suivante. Considérons un point t_{i-1}^l et $t_{m_{i-1}}^k$ le point le plus proche de t_{i-1}^l tel que $t_{m_{i-1}}^k \leq t_{i-1}^l < t_i^l \leq t_{m_{i-1}+1}^k$. Alors on a

$$\begin{aligned} V_{t_i^l}^k - V_{t_{i-1}^l}^k &= (M_{t_i^l} - M_{t_{m_{i-1}}^k})^2 - (M_{t_{i-1}^l} - M_{t_{m_{i-1}}^k})^2 \\ &= (M_{t_i^l} - M_{t_{i-1}^l})\,(M_{t_i^l} - 2M_{t_{m_{i-1}}^k} + M_{t_{i-1}^l}), \end{aligned}$$

ce qui entraîne alors que

$$\begin{aligned} V_t^l(V^k) &= \sum_{i=1}^{p_l} (V_{t_i^l}^k - V_{t_{i-1}^l}^k)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{p_l} (M_{t_i^l} - M_{t_{i-1}^l})^2\,(M_{t_i^l} - 2M_{t_{m_{i-1}}^k} + M_{t_i^l})^2 \\ &\leq V_t^l(M) \sup_{i\in\{1,\dots,p_l\}} |M_{t_i^l} - 2M_{t_{m_{i-1}}^k} + M_{t_i^l}|^2. \end{aligned}$$

En utilisant le même raisonnement que précédemment, on en déduit que $V_t^l(V^k)$ tend vers 0 dans L^2 lorsque $k,l \to \infty$, sous réserve encore une fois que la suite $(V_t^l)_{l\in\mathbb{N}_*}$ soit bornée dans L^2, ce que l'on va démontrer à présent:

$$\begin{aligned} (V_t^l)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{p_l} (M_{t_i^l} - M_{t_{i-1}^l})^2\right)^2 \\ &= 2\sum_{i=1}^{p_l}\sum_{j=i+1}^{p_l} (M_{t_i^l} - M_{t_{i-1}^l})^2\,(M_{t_j^l} - M_{t_{j-1}^l})^2 + \sum_{i=1}^{p_l} (M_{t_i^l} - M_{t_{i-1}^l})^4 \\ &= 2\sum_{i=1}^{p_l}\sum_{j=i+1}^{p_l} (V_{t_i^l}^l - V_{t_{i-1}^l}^l)\,(V_{t_j^l}^l - V_{t_{j-1}^l}^l) + \sum_{i=1}^{p_l} (M_{t_i^l} - M_{t_{i-1}^l})^4 \\ &= 2\sum_{i=1}^{p_l} (V_{t_i^l}^l - V_{t_{i-1}^l}^l)\,(V_{t_{p_l}^l}^l - V_{t_i^l}^l) + \sum_{i=1}^{p_l} (M_{t_i^l} - M_{t_{i-1}^l})^4 \\ &= 2\sum_{i=1}^{p_l} (V_{t_i^l}^l - V_{t_{i-1}^l}^l)\,(V_t^l - V_{t_i^l}^l) + \sum_{i=1}^{p_l} (M_{t_i^l} - M_{t_{i-1}^l})^4. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant (3.1.1) avec $s = t_i^l$, on obtient en passant à l'espérance que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(V_t^l)^2\right] &= 2\sum_{i=1}^{p_l} \mathbb{E}\left[(V_{t_i^l}^l - V_{t_{i-1}^l}^l)\,\mathbb{E}\left[V_t^l - V_{t_i^l}^l \mid \mathcal{F}_{t_i^l}\right]\right] + \sum_{i=1}^{p_l} \mathbb{E}\left[(M_{t_i^l} - M_{t_{i-1}^l})^4\right] \\ &= 2\sum_{i=1}^{p_l} \mathbb{E}\left[(V_{t_i^l}^l - V_{t_{i-1}^l}^l)\,\mathbb{E}\left[(M_t - M_{t_i^l})^2 \mid \mathcal{F}_{t_i^l}\right]\right] + \sum_{i=1}^{p_l} \mathbb{E}\left[(M_{t_i^l} - M_{t_{i-1}^l})^4\right] \\ &= 2\sum_{i=1}^{p_l} \mathbb{E}\left[(V_{t_i^l}^l - V_{t_{i-1}^l}^l)\,(M_t - M_{t_i^l})^2\right] + \sum_{i=1}^{p_l} \mathbb{E}\left[(M_{t_i^l} - M_{t_{i-1}^l})^4\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \mathbb{E}\left[V_t^l\left(2\sup_{i\in\{1,\dots,p_l\}}|M_t-M_{t_i^l}|^2+\sup_{i\in\{1,\dots,p_l\}}|M_{t_i^l}-M_{t_{i-1}^l}|^2\right)\right]\\
&\le 12\,K^2\,\mathbb{E}\left[V_t^l\right]\\
&= 12\,K^2\,\mathbb{E}\left[M_t^2\right]\\
&\le 12\,K^4,
\end{aligned}
$$

où dans l'avant-dernière ligne on a utilisé le fait que le processus $M^2 - V^l$ étant une martingale, son espérance est constante et même nulle car ces deux processus sont issus de 0. Ainsi, la conclusion est la suivante: pour tout $t \ge 0$ fixé, la suite $(V_t^l)_{l\in\mathbb{N}_*}$ est de Cauchy dans L^2 qui est complet, donc converge vers une variable aléatoire dépendant de t, que l'on note $[M,M]_t$.

À présent, montrons que $t \to [M,M]_t$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Comme $V^l - V^k$ est une martingale de carré intégrable, l'inégalité de Doob L^2 entraîne que pour tout $t \ge 0$,

$$
\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}(V_s^l-V_s^k)^2\right]\le 4\,\mathbb{E}\left[(V_t^l-V_t^k)^2\right]\underset{k,l\to\infty}{\longrightarrow}0.
$$

Alors il existe une sous-suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ tendant vers l'infini lorsque $n\to\infty$ telle que

$$
\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}(V_s^{k_{n+1}}-V_s^{k_n})^2\right]\le\frac{1}{n^4},
$$

et donc on obtient par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$
\sum_{n\in\mathbb{N}_*}\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}|V_s^{k_{n+1}}-V_s^{k_n}|\right]<\infty,
$$

donc que p.s.,

$$
\sum_{n\in\mathbb{N}_*}\sup_{s\in[0,t]}|V_s^{k_{n+1}}-V_s^{k_n}|<\infty.
$$

Ainsi, comme p.s. le critère de Cauchy uniforme est vérifié pour la suite de processus $(V^{k_n})_{n\in\mathbb{N}_*}$, la convergence p.s. de la suite de processus $(V^{k_n})_{n\in\mathbb{N}_*}$ est uniforme sur $[0,t]$ et donc le processus limite $[M,M]$ est continu sur $[0,t]$, pour tout $t\ge 0$, donc continu sur $\mathbb{R}_+$.

Ensuite, bien que le processus V^k ne soit pas croissant, on a pour tous $t_n^k < t_m^k$, $V_{t_n^k}^k \le V_{t_m^k}^k$ donc par passage à la limite, $[M,M]$ est croissant sur $\cup_{k\ge1}(t_n^k)_{n\in\{0,\dots,p_k\}}$ (supposé dense dans $[0,t]$), donc sur $[0,t]$ par continuité.

Enfin, comme le processus $M^2 - V^k$ est une martingale, on a pour tout $s \le t$ et tout $A_s \in \mathcal{F}_s$,

$$
\mathbb{E}\left[1_{A_s}(M_t^2-V_t^k)\right]=\mathbb{E}\left[1_{A_s}(M_s^2-V_s^k)\right],
$$

et comme V_s^k et V_t^k convergent dans L^2 respectivement vers $[M,M]_s$ et $[M,M]_t$ lorsque $k \to \infty$, on peut passer à la limite dans l'identité précédente pour obtenir

$$\mathbb{E}\left[1_{A_s}\left(M_t^2 - [M,M]_t\right)\right] = \mathbb{E}\left[1_{A_s}\left(M_s^2 - [M,M]_s\right)\right],$$

ou en d'autres termes, que $M^2 - [M,M]$ est une martingale. La démonstration du théorème 3.1.5 est enfin achevée. ■

Remarque 3.1.6. Si τ est un temps d'arrêt, alors par unicité de la variation quadratique, on a $[M^\tau, M^\tau] = [M,M]^\tau$.

Regardons maintenant comment les propriétés d'une martingale locale sont liées à celles de sa variation quadratique. Si A est un processus croissant, la variable aléatoire A_∞ désigne de manière évidente la limite croissante de A_t lorsque $t \to \infty$.

Théorème 3.1.7. *Soit M une martingale locale.*

(i) Si c'est une vraie martingale bornée dans L^2, alors $\mathbb{E}\left[[M,M]_\infty\right] < \infty$ et le processus $M^2 - [M,M]$ est une martingale uniformément intégrable.

(ii) Si $\mathbb{E}\left[[M,M]_\infty\right] < \infty$, alors M est une vraie martingale bornée dans L^2.

(iii) Le processus M est une vraie martingale de carré intégrable si et seulement si $\mathbb{E}\left[[M,M]_t\right] < \infty$ pour tout $t \geq 0$. De plus, si ces conditions sont satisfaites, alors le processus $M^2 - [M,M]$ est une martingale.

Démonstration. (i) : Si M est une martingale bornée dans L^2, alors par le théorème 2.3.11, elle converge p.s. et dans L^2 vers une variable aléatoire notée M_∞. De plus, par l'inégalité de Doob L^2,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0} M_t^2\right] \leq 4 \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left[M_t^2\right] < \infty.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, définissons le temps d'arrêt $\tau_n := \inf\{t \geq 0 : [M,M]_t \geq n\}$. Alors le processus $(M^{\tau_n})^2 - [M,M]^{\tau_n}$ est une martingale locale. De plus, on a pour tout $t \geq 0$ que $[M,M]_{t\wedge\tau_n} \leq n$ et on en déduit que $(M^{\tau_n})^2 - [M,M]^{\tau_n}$ est dominée par la variable intégrable $\sup_{t\geq 0} M_t^2 + n$. Par conséquent, c'est une vraie martingale et on a

$$\mathbb{E}\left[[M,M]_{t\wedge\tau_n}\right] = \mathbb{E}\left[M_{t\wedge\tau_n}^2\right].$$

En faisant tendre $t \to \infty$ (et en utilisant les théorèmes de convergence monotone et dominée pour les membres de gauche et de droite, respectivement) on trouve

$$\mathbb{E}\left[[M,M]_{\tau_n}\right] = \mathbb{E}\left[M_{\tau_n}^2\right],$$

et enfin en faisant tendre $n \to \infty$ on trouve, avec les deux mêmes arguments, que

$$\mathbb{E}\left[[M,M]_\infty\right] = \mathbb{E}\left[M_\infty^2\right] < \infty.$$

Enfin, la martingale locale $M^2 - [M,M]$ étant dominée par la variable intégrable $\sup_{t\geq 0} M_t^2 + [M,M]_\infty$, il s'agit donc d'une vraie martingale (uniformément intégrable).

(ii) : On suppose maintenant que $\mathbb{E}\left[[M,M]_\infty\right] < \infty$. Notons la suite de temps d'arrêt $\tau_n := \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}$ de sorte que pour tout $t \geq 0$, $|M_{t\wedge\tau_n}| \leq n$. Ainsi, la martingale locale M^{τ_n} est en fait une vraie martingale. Par ailleurs, la martingale locale $(M^{\tau_n})^2 - [M,M]^{\tau_n}$ étant dominée par la variable intégrable $n^2 + [M,M]_\infty$, c'est aussi une vraie martingale uniformément intégrable, et on a pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[M_{t\wedge\tau_n}^2\right] &= \mathbb{E}\left[[M,M]_{t\wedge\tau_n}\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[[M,M]_\infty\right], \end{aligned}$$

quantité qui est supposée finie. Ainsi, la famille $(M_{t\wedge\tau_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^2 donc uniformément intégrable. En passant à la limite L^1 quand $n \to \infty$ dans l'égalité

$$\mathbb{E}\left[M_{t\wedge\tau_n} \mid \mathcal{F}_s\right] = M_{s\wedge\tau_n}, \quad s \in [0,t],$$

on en déduit que M est une vraie martingale, qui est bornée dans L^2 par le lemme de Fatou.
(iii) : D'après (i) et (ii), M est une vraie martingale bornée dans L^2 si et seulement si $\mathbb{E}\left[[M,M]_\infty\right] < \infty$. Il en résulte que pour tout $a \geq 0$, M^a est une vraie martingale bornée dans L^2 si et seulement si $\mathbb{E}\left[[M,M]_a\right] < \infty$. Enfin, si ces conditions sont remplies, (i) montre que $(M^a)^2 - [M,M]^a$ est une vraie martingale. ∎

On en déduit immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 3.1.8. *Une martingale locale admet p.s. une variation quadratique nulle si et seulement si elle est elle-même p.s. identiquement égale à 0.*

3.1.3 Crochet droit de deux martingales locales

Par polarisation, nous sommes en mesure d'introduire le crochet droit de deux martingales locales à partir de la variation quadratique de leur somme.

Définition 3.1.9. *Le crochet droit de deux martingales locales M et N est défini par*

$$[M,N]_t := \frac{1}{2}\left([M+N,M+N]_t - [M,M]_t - [N,N]_t\right), \quad t \geq 0.$$

Donnons quelques propriétés du crochet droit, dont les démonstrations sont immédiates d'après ce qui précède.

Proposition 3.1.10. *On a les propriétés suivantes:*

(i) : *Le processus $[M,N]$ est l'unique processus adapté à variation bornée tel que $MN - [M,N]$ soit une martingale locale.*

(ii) : *L'application $(M,N) \to [M,N]$ est bilinéaire symétrique.*

(iii) : *Si $0 = t_0^k < t_1^k < \cdots < t_{p_k}^k = t$ est une suite de subdivisions emboîtées de l'intervalle $[0,t]$ de pas tendant vers 0 lorsque $k \to \infty$, on a la convergence en probabilité suivante:*

$$[M,N]_t = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{p_k} (M_{t_i^k} - M_{t_{i-1}^k})(N_{t_i^k} - N_{t_{i-1}^k}).$$

(iv) : Pour tout temps d'arrêt τ, $[M^\tau, N^\tau] = [M^\tau, N] = [M, N^\tau] = [M, N]^\tau$.

(v) : Si M et N sont deux vraies martingales bornées dans L^2, alors le processus $MN - [M, N]$ est une vraie martingale uniformément intégrable.

Enfin, avant d'introduire les semimartingales, donnons un résultat important, connu sous le nom d'inégalité de Kunita-Watanabe. Tout d'abord, si A est un processus continu à variation bornée, alors l'intégrale par rapport à ce processus existe au sens de Stieltjes. De plus, le processus variation $(\mathrm{Var}(A,t))_{t\geq 0}$ est bien défini, croissant et même continu. Ainsi, comme il est à variation bornée, intégrer au sens de Stieltjes par rapport à ce processus variation a bien un sens. Pour simplifier l'écriture, on notera dans la suite de ce cours la mesure associée

$$d\mathrm{Var}(A,t) = |dA_t|.$$

Notons alors que l'on a

$$\left|\int_0^t dA_s\right| = |A_t - A_0| \leq \mathrm{Var}(A,t) = \int_0^t d\mathrm{Var}(A,s) = \int_0^t |dA_s|.$$

On considère dans la suite le cas ou $A = [M, N]$ avec M et N deux martingales locales.

Proposition 3.1.11 (Inégalité de Kunita-Watanabe)**.** *Soient M et N deux martingales locales et soient H et K deux processus. Alors*

$$\left|\int_0^\infty |H_t|\,|K_t|\,|d[M,N]_t|\right| \leq \sqrt{\int_0^\infty H_t^2\, d[M,M]_t}\sqrt{\int_0^\infty K_t^2\, d[N,N]_t}.$$

<u>*Démonstration.*</u> Soient $0 \leq s < t$ et soit $s = t_0 < \cdots < t_p = t$ une subdivision de l'intervalle $[s,t]$. En utilisant la définition du crochet droit ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^p \left|[M,N]_{t_k} - [M,N]_{t_{k-1}}\right| &\leq \sum_{k=1}^p \sqrt{[M,M]_{t_k} - [M,M]_{t_{k-1}}}\sqrt{[N,N]_{t_k} - [N,N]_{t_{k-1}}} \\
&\leq \sqrt{\sum_{k=1}^p [M,M]_{t_k} - [M,M]_{t_{k-1}}}\sqrt{\sum_{k=1}^p [N,N]_{t_k} - [N,N]_{t_{k-1}}} \\
&= \sqrt{[M,M]_t - [M,M]_s}\sqrt{[N,N]_t - [N,N]_s},
\end{aligned}$$

d'où l'on obtient que

$$\int_s^t |d[M,N]_u| \leq \sqrt{[M,M]_t - [M,M]_s}\sqrt{[N,N]_t - [N,N]_s}$$

Par un argument de classe monotone, on peut généraliser cette inégalité à toute partie borélienne bornée A de $\mathbb{R}_+$,

$$\int_A |d[M,N]_u| \leq \sqrt{\int_A d[M,M]_u}\sqrt{\int_A d[N,N]_u}.$$

Ensuite, si $h = \sum_i \alpha_i 1_{A_i}$ et $k = \sum_j \beta_j 1_{B_j}$ sont deux fonctions étagées positives, où les A_i sont disjoints, tout comme les B_j, on a par l'inégalité précédente ainsi que par Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty h(t)k(t)\ |d[M,N]_u| &= \sum_{i,j} \alpha_i\beta_j \int_{A_i\cap B_j} |d[M,N]_u| \\ &\leq \sqrt{\sum_i \alpha_i^2 \int_{A_i\cap(\cup_j B_j)} d[M,M]_u} \sqrt{\sum_j \beta_j^2 \int_{(\cup_i A_i)\cap B_j} d[N,N]_u} \\ &\leq \sqrt{\int_0^\infty h(t)^2\, d[M,M]_t} \sqrt{\int_0^\infty k(t)^2\, d[N,N]_t},\end{aligned}$$

et donc l'inégalité est vérifiée pour les fonctions étagées positives. Enfin, en utilisant le fait que toute fonction mesurable positive peut être approchée (simplement) par une suite croissante de fonctions étagées positives, on obtient l'inégalité de Kunita-Watanabe en toute généralité. ■

3.2 Semimartingales continues

À présent, introduisons la classe des semimartingales continues.

Définition 3.2.1. *Un processus X est une semimartingale continue s'il s'écrit sous la forme*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t, \quad t \geq 0,$$

où M est une martingale locale et A un processus (continu) adapté et à variation bornée, tous deux partant de 0.

Remarquons que cette décomposition est unique à cause du théorème 3.1.5. Si Y est une autre semimartingale continue de décomposition $Y_t = Y_0 + N_t + B_t$, on pose par définition

$$[X,Y]_t \ := \ [M,N]_t, \quad t \geq 0.$$

Proposition 3.2.2. *Si $0 = t_0^k < t_1^k < \cdots < t_{p_k}^k = t$ est une suite de subdivisions emboîtées de l'intervalle $[0,t]$ de pas tendant vers 0 lorsque $k \to \infty$, on a la convergence en probabilité suivante:*

$$[X,Y]_t = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{p_k} (X_{t_i^k} - X_{t_{i-1}^k})\,(Y_{t_i^k} - Y_{t_{i-1}^k}).$$

Démonstration. Traitons seulement le cas $X = Y$ pour simplifier. On a

$$\sum_{i=1}^{p_k} (X_{t_i^k} - X_{t_{i-1}^k})^2 \ = \ \sum_{i=1}^{p_k} (M_{t_i^k} - M_{t_{i-1}^k})^2 + \sum_{i=1}^{p_k} (A_{t_i^k} - A_{t_{i-1}^k})^2$$

$$+2\sum_{i=1}^{p_k}(M_{t_i^k}-M_{t_{i-1}^k})(A_{t_i^k}-A_{t_{i-1}^k}).$$

Or on sait déjà par le théorème 3.1.5 qu'en probabilité,

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{p_k}(M_{t_i^k}-M_{t_{i-1}^k})^2 \;=\; [M,M]_t \;=\; [X,X]_t.$$

D'autre part, on a

$$\sum_{i=1}^{p_k}(A_{t_i^k}-A_{t_{i-1}^k})^2 \;\le\; \mathrm{Var}(A,t)\sup_{i\in\{1,\dots,p_k\}}|A_{t_i^k}-A_{t_{i-1}^k}|,$$

qui tend p.s. vers 0 lorsque $k\to\infty$ par (uniforme) continuité du processus A sur $[0,t]$. Enfin, le même raisonnement montre que

$$\left|\sum_{i=1}^{p_k}(A_{t_i^k}-A_{t_{i-1}^k})(M_{t_i^k}-M_{t_{i-1}^k})\right| \;\le\; \mathrm{Var}(A,t)\sup_{i\in\{1,\dots,p_k\}}|M_{t_i^k}-M_{t_{i-1}^k}|,$$

qui tend p.s. vers 0 lorsque $k\to\infty$ par (uniforme) continuité de M sur $[0,t]$. Ainsi, comme la convergence p.s entraîne la convergence en probabilité, et que l'on a aussi pour toutes variables aléatoires X,Y,Z et tout $\varepsilon>0$,

$$\mathbb{P}(|X+Y+Z|>\varepsilon)\le\mathbb{P}(|X|>\varepsilon/3)+\mathbb{P}(|Y|>\varepsilon/3)+\mathbb{P}(|Z|>\varepsilon/3),$$

la preuve est achevée. ■

Chapitre 4

Intégration stochastique

Ce chapitre constitue l'objet central d'un cours de calcul stochastique. Le calcul d'Itô est considéré comme l'un des thèmes les plus importants de la théorie des probabilités, et permet par exemple de construire de manière systématique de nouvelles martingales à partir de martingales originelles, exactement comme dans le cadre discret de la transformation prévisible vue au chapitre 2. Le but principal est de donner un sens à l'intégrale

$$\mathcal{I}_t(H) = \int_0^t H_s \, dM_s, \quad t \geq 0, \tag{4.0.1}$$

où M est une martingale continue et H un processus adapté, tous deux satisfaisant de "bonnes" propriétés d'intégrabilité. Étant donné que $(M_t)_{t\geq 0}$ n'est pas à variation bornée, cette intégrale ne peut être définie dans le sens classique de l'intégration à la Stieltjes. L'idée première est assez naturelle: il s'agit de définir cette intégrale sur une classe de processus simples pour lesquels nous sommes capables de faire des calculs, et de l'étendre à une classe plus générale par un argument de densité-continuité. En revanche, si l'on souhaite voir $(\mathcal{I}_t(H))_{t\geq 0}$ comme un processus, alors il va falloir (se préparer à) travailler davantage.

4.1 Construction de l'intégrale stochastique

4.1.1 Définition de l'intégrale stochastique

Afin de donner un sens à l'identité (4.0.1), introduisons quelques notations. Notons $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}_+$ et $\mathcal{M}^2$ l'espace des martingales continues bornées dans L^2 et nulles en 0. On le munit du produit scalaire suivant:

$$< X, Y >_{\mathcal{M}^2} := \mathbb{E}\left[X_\infty Y_\infty\right] = \mathbb{E}\left[[X, Y]_\infty\right],$$

de sorte qu'il devienne un espace de Hilbert (démonstration non triviale). On considère dans la suite une martingale $M \in \mathcal{M}^2$, et pour tout $t \geq 0$, on note $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}$ la tribu engendrée par les produits $A \times B$, où $A \in \mathcal{F}_t$ et $B \in \mathcal{B}$.

Définition 4.1.1. *On définit l'espace de Hilbert $\mathcal{H}^2(M)$ comme l'ensemble des processus H adaptés à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et dans $L^2(d\mathbb{P}\times d[M,M])$, i.e.*

$$\|H\|^2_{\mathcal{H}^2(M)} := \mathbb{E}\left[\int_0^\infty H_t^2\, d[M,M]_t\right] < \infty.$$

Par ailleurs, on note $\mathcal{H}^2_0(M)$ le sous-espace de $\mathcal{H}^2(M)$ formé des processus simples, c'est-à-dire des processus H de la forme

$$H_t(\omega) = \sum_{k\geq 0} a_k(\omega)\, 1_{(t_k,t_{k+1}]}(t), \quad t\geq 0,$$

où a_k est une v.a. bornée et $\mathcal{F}_{t_k}$-mesurable, et $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \cdots$ est une suite croissant vers l'infini.

On remarque que le processus $[M,M]$ étant croissant (donc à variation bornée), l'intégrale par rapport à ce processus est simplement celle de Stieltjes. L'intérêt d'introduire les processus simples réside dans le résultat suivant.

Lemme 4.1.2. *Le sous-espace $\mathcal{H}^2_0(M)$ est dense dans $\mathcal{H}^2(M)$.*

<u>*Démonstration*</u>. Par le théorème du supplémentaire orthogonal d'un fermé dans un espace de Hilbert, il suffit de montrer que si $H\in\mathcal{H}^2(M)$ est orthogonal à $\mathcal{H}^2_0(M)$, alors ce processus est nul. Supposons donc $H\in\mathcal{H}^2(M)$ orthogonal à $\mathcal{H}^2_0(M)$, i.e.

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty H_tK_t\, d[M,M]_t\right] = 0, \quad K\in\mathcal{H}^2_0(M).$$

Étant donnés $0\leq s<t$, soient F une variable aléatoire $\mathcal{F}_s$-mesurable bornée et $L\in\mathcal{H}^2_0(M)$ le processus défini par $L_u = F1_{(s,t]}(u)$. On a alors

$$0 =< H, L >_{\mathcal{H}^2(M)} = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty H_uL_u\, d[M,M]_u\right] = \mathbb{E}\left[F\int_s^t H_u\, d[M,M]_u\right].$$

Posons pour tout $t\geq 0$,

$$X_t := \int_0^t H_u\, d[M,M]_u,$$

qui est p.s. absolument convergente et même bornée dans L^1 (par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $H\in\mathcal{H}^2(M)$ et $M\in\mathcal{M}^2$). De plus, l'identité précédente montre que pour tout $s<t$ et toute variable aléatoire $\mathcal{F}_s$-mesurable bornée F,

$$\mathbb{E}\left[F(X_t - X_s)\right] = 0.$$

En d'autres termes, le processus X est une martingale continue. D'autre part, puisque X est défini comme une intégrale par rapport au processus croissant $[M,M]$, c'est aussi un processus à variation bornée. Il en résulte par la proposition 3.1.4 que p.s. ce processus est nul, et donc que p.s.,

$$H = 0, \quad d[M,M] \quad \text{p.p.},$$

i.e. $H = 0$ dans $\mathcal{H}^2(M)$. ■

Ainsi, en définissant l'intégrale stochastique sur l'espace des processus simples $\mathcal{H}_0^2(M)$, on peut espérer l'étendre par densité aux processus dans $\mathcal{H}^2(M)$.
Notons à présent qu'il est tout à fait logique de demander à ce que l'intégrale stochastique satisfasse, pour tout $0 \leq a < b$,

$$\int_a^b dM_s = M_b - M_a,$$

et la linéarité nous force alors à définir l'intégrale stochastique de la manière suivante.

Définition 4.1.3. *On définit sur l'espace $\mathcal{H}_0^2(M)$ l'intégrale stochastique $\mathcal{I}$ comme suit:*

$$\begin{array}{llll} \mathcal{I} & : & \mathcal{H}_0^2(M) & \to & L^2 \\ & & H & \mapsto & \mathcal{I}(H) := \sum_{k\geq 0} a_k \, (M_{t_{k+1}} - M_{t_k}). \end{array}$$

Le fait que l'espace d'arrivée est L^2 se déduit des calculs suivants: si $H \in \mathcal{H}_0^2(M)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\mathcal{I}(H)^2\right] &= \sum_{k,l\geq 0} \mathbb{E}\left[a_k a_l \,(M_{t_{k+1}} - M_{t_k})(M_{t_{l+1}} - M_{t_l})\right] \\ &= \sum_{k\geq 0} \mathbb{E}\left[a_k^2 \,(M_{t_{k+1}} - M_{t_k})^2\right] \\ &\quad +2\sum_{k<l} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[a_k a_l \,(M_{t_{k+1}} - M_{t_k})(M_{t_{l+1}} - M_{t_l}) \mid \mathcal{F}_{t_l}\right]\right] \\ &= \sum_{k\geq 0} \mathbb{E}\left[a_k^2 \,\left([M,M]_{t_{k+1}} - [M,M]_{t_k}\right)\right] \\ &\quad +2\sum_{k<l} \mathbb{E}\left[a_k a_l \,(M_{t_{k+1}} - M_{t_k})\mathbb{E}\left[M_{t_{l+1}} - M_{t_l} \mid \mathcal{F}_{t_l}\right]\right] \\ &= \sum_{k\geq 0} \mathbb{E}\left[a_k^2 \,\left([M,M]_{t_{k+1}} - [M,M]_{t_k}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty H_t^2 \, d[M,M]_t\right] \\ &= \|H\|^2_{\mathcal{H}^2(M)}, \end{aligned}$$

quantité qui est supposée finie. Ci-dessus, on a utilisé la $\mathcal{F}_{t_l}$-mesurabilité de $a_k a_l \,(M_{t_{k+1}} - M_{t_k})$ pour $k < l$, ainsi que le fait que le processus $M^2 - [M,M]$ est une martingale. Plus important encore, on voit que l'on a obtenu l'isométrie suivante, connue sous le nom d'isométrie d'Itô.

Lemme 4.1.4 (Isométrie d'Itô sur $\mathcal{H}_0^2(M)$)**.** *Pour tout processus simple $H \in \mathcal{H}_0^2(M)$,*

$$\|\mathcal{I}(H)\|_{L^2} = \|H\|_{\mathcal{H}^2(M)}.$$

On en déduit que l'intégrale stochastique $\mathcal{I}$ est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{H}_0^2(M)$ vers L^2. En particulier, $\mathcal{I}$ transforme les suites de Cauchy de $\mathcal{H}_0^2(M)$ en suites de

Cauchy de L^2, ce qui va nous permettre d'étendre l'intégrale stochastique aux éléments de $\mathcal{H}^2(M)$. Regardons ceci plus en détail. Étant donné un processus $H \in \mathcal{H}^2(M)$, il existe une suite de processus simples $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_0^2(M)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|H - H^n\|_{\mathcal{H}^2(M)} = 0.$$

L'idée est donc de définir l'intégrale stochastique $\mathcal{I}(H)$ comme la limite dans L^2 de $\mathcal{I}(H^n)$. Cependant, cet objet est-il bien défini, i.e. la suite $(\mathcal{I}(H^n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle et si oui, la limite est-elle définie de manière unique ? Énonçons le théorème suivant.

Théorème 4.1.5. *Soit $H \in \mathcal{H}^2(M)$. Alors l'intégrale stochastique $\mathcal{I}(H)$ déterminée par*

$$\mathcal{I}(H) = L^2 - \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(H^n),$$

où $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_0^2(M)$ est une suite de processus simples convergeant vers H dans $\mathcal{H}^2(M)$, est bien définie. On la note

$$\mathcal{I}(H) := \int_0^\infty H_t \, dM_t.$$

De plus, on a l'isométrie d'Itô:

$$\|\mathcal{I}(H)\|_{L^2} = \|H\|_{\mathcal{H}^2(M)}.$$

Démonstration. Démontrons tout d'abord le premier point. Si $H \in \mathcal{H}^2(M)$ alors il existe une suite de processus simples $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_0^2(M)$ qui converge vers H dans $\mathcal{H}^2(M)$. En particulier, elle est de Cauchy et par l'isométrie d'Itô sur $\mathcal{H}_0^2(M)$, on en déduit que $(\mathcal{I}(H^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy dans L^2 qui est complet, donc convergente.
De plus, si $(K^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_0^2(M)$ est une autre suite de processus convergeant vers H dans $\mathcal{H}^2(M)$, l'inégalité triangulaire entraîne que

$$\lim_{n\to\infty} \|H^n - K^n\|_{\mathcal{H}^2(M)} = 0,$$

et par l'isométrie d'Itô sur $\mathcal{H}_0^2(M)$, on obtient que

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{I}(H^n) - \mathcal{I}(K^n)\|_{L^2} = 0.$$

Enfin, l'inégalité triangulaire nous permet de démontrer que les deux limites sont en fait les mêmes. Ainsi, l'intégrale stochastique $\mathcal{I}(H)$ est bien définie pour tout processus appartenant à l'espace $\mathcal{H}^2(M)$.
À présent, l'isométrie d'Itô sur $\mathcal{H}^2(M)$ se démontre immédiatement: si $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_0^2(M)$ converge vers H dans $\mathcal{H}^2(M)$, alors par l'isométrie d'Itô sur $\mathcal{H}_0^2(M)$,

$$\|\mathcal{I}(H^n)\|_{L^2} = \|H^n\|_{\mathcal{H}^2(M)}.$$

Enfin, les deux côtés de cette égalité admettant une limite par l'inégalité triangulaire, on obtient l'identité désirée en faisant tendre n vers l'infini. ∎

4.1.2 L'intégrale stochastique vue comme une martingale

Ainsi, l'intégrale stochastique $\mathcal{I}$ est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{H}^2(M)$ vers L^2. À présent, il est légitime de se demander si en faisant varier la borne supérieure dans l'intégrale, on obtient alors un processus. L'idée est de faire apparaître un processus (déterministe) de troncation $m^t \in \mathcal{H}^2(M)$ défini pour tout $t \geq 0$ par

$$m_s^t(\omega) = 1_{[0,t]}(s), \quad s \geq 0,$$

et tel que $m^t H \in \mathcal{H}^2(M)$. Dans ce cas, il est raisonnable de penser que l'élément X donné par

$$X_t = \mathcal{I}(m^t H), \quad t \geq 0,$$

est bien un processus. Cependant l'intégrale stochastique $\mathcal{I}(m^t H)$ est seulement définie comme un élément de L^2, donc peut être spécifiée arbitrairement sur tout ensemble négligeable $A_t \in \mathcal{F}_t$. Autrement dit, la définition de $\mathcal{I}(m^t H)$ est ambiguë sur les ensembles négligeables de $\mathcal{F}_t$. Si nous ne devions considérer qu'un nombre dénombrable de tels ensembles A_t, cette ambiguité ne poserait pas de problème car l'union dénombrable d'ensembles négligeables est encore négligeable. Malheureusement, l'intervalle $\mathbb{R}_+$ n'étant pas dénombrable, l'union de tels ensembles A_t sur $\mathbb{R}_+$ peut être Ω tout entier. Aïe aïe aïe !! Il s'avère qu'en fait ce problème admet une solution qui devrait rassurer le lecteur inquiet.

Théorème 4.1.6. *Pour tout processus $H \in \mathcal{H}^2(M)$, il existe une martingale $X \in \mathcal{M}^2$ telle que*

$$\mathbb{P}(X_t = \mathcal{I}(m^t H) \quad \forall t \geq 0) = 1.$$

On note alors

$$X_t := \int_0^t H_s \, dM_s, \quad t \geq 0.$$

<u>*Démonstration*</u>. Étant donné un processus $H \in \mathcal{H}^2(M)$, il existe une suite $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_0^2(M)$ telle que $\|H - H^n\|_{\mathcal{H}^2(M)} \to 0$. On définit alors la suite de processus $(X^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2$ comme $X_t^n := \mathcal{I}(m^t H^n)$, $t \geq 0$. Notons que cette suite de processus adaptés admet la représentation explicite suivante: pour tout $t \in (t_k^n, t_{k+1}^n]$,

$$X_t^n = a_k^n \, (M_t - M_{t_k^n}) + \sum_{i=0}^{k-1} a_i^n \, (M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n}),$$

où les a_i^n sont $\mathcal{F}_{t_i^n}$-mesurables. On vérifie sans peine que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X^n est une martingale continue et bornée dans L^2: $X^n \in \mathcal{M}^2$. En particulier, elle admet une limite $X_\infty^n \in L^2$ lorsque $t \to \infty$. De surcroît, comme $m^t H_n \to H_n$ dans $\mathcal{H}^2(M)$ lorsque $t \to \infty$, on a que $X_t^n \to \mathcal{I}(H_n)$ dans L^2 et par unicité de la limite, on obtient que $X_\infty^n = \mathcal{I}(H_n)$. Ainsi, quels que soient $m, n \in \mathbb{N}$, par l'inégalité maximale de Doob appliquée à la sous-martingale $|X^n - X^m|$, on a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\geq 0} |X_t^n - X_t^m| > \varepsilon\right) \quad \leq \quad \frac{\mathbb{E}\left[|X_\infty^n - X_\infty^m|^2\right]}{\varepsilon^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathbb{E}\left[|\mathcal{I}(H^n) - \mathcal{I}(H^m)|^2\right]}{\varepsilon^2} \\
&= \frac{\|H^n - H^m\|^2_{\mathcal{H}^2(M)}}{\varepsilon^2},
\end{aligned}
$$

par l'isométrie d'Itô. La suite $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy dans $\mathcal{H}^2(M)$, on a que $\|H^n - H^m\|_{\mathcal{H}^2(M)} \to 0$ lorsque $m, n \to \infty$, et donc il existe une sous-suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tendant vers l'infini telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$
\|H^{n_{k+1}} - H^{n_k}\|^2_{\mathcal{H}^2(M)} \leq \frac{1}{2^{3k}}.
$$

D'où en prenant $\varepsilon = 2^{-k}$, on obtient que

$$
\mathbb{P}\left(\sup_{t\geq 0} |X_t^{n_{k+1}} - X_t^{n_k}| > \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k},
$$

qui est sommable: par le lemme de Borel-Cantelli, pour tout ω en dehors d'un ensemble négligeable, il existe $N = N(\omega) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$,

$$
\sup_{t\geq 0} |X_t^{n_{k+1}} - X_t^{n_k}| \leq \frac{1}{2^k},
$$

donc que

$$
\sum_{k\in\mathbb{N}} \sup_{t\geq 0} |X_t^{n_{k+1}} - X_t^{n_k}| < \infty.
$$

Ainsi, p.s. la suite $(X_t^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy uniformément sur $\mathbb{R}_+$, donc elle converge p.s. uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers un processus adapté X qui est alors continu. Comme pour tout $t \geq 0$, $m^t H_n \to m^t H$ dans $\mathcal{H}^2(M)$, l'isométrie d'Itô entraîne que $X_t^n \to \mathcal{I}(m^t H)$ dans L^2 et par unicité de la limite, on a pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}(X_t = \mathcal{I}(m^t H)) = 1$. L'union dénombrable d'ensembles négligeables restant négligeable, on a

$$
\mathbb{P}(X_t = \mathcal{I}(m^t H) \quad \forall t \in [0,\infty) \cap \mathbb{Q}) = 1,
$$

et par continuité du processus X,

$$
\mathbb{P}(X_t = \mathcal{I}(m^t H) \quad \forall t \in [0,\infty)) = 1.
$$

De plus, le processus X vérifie bien la propriété de martingale. En effet, comme X^{n_k} la vérifie pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors en combinant les convergences p.s. et L^2, on peut passer à la limite en k de chaque coté de l'égalité

$$
\mathbb{E}\left[X_t^{n_k} \mid \mathcal{F}_s\right] = X_s^{n_k}.
$$

Enfin, si l'on applique l'isométrie d'Itô, on a pour tout $t \geq 0$,

$$
\mathbb{E}\left[X_t^2\right] = \mathbb{E}\left[\mathcal{I}(m^t H)^2\right]
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty (m^t H)_s^2 \, d[M,M]_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 \, d[M,M]_s\right] \\
&\leq \|H\|^2_{\mathcal{H}^2(M)}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, la martingale continue X est bornée dans L^2: elle est donc dans $\mathcal{M}^2$, ce qui termine la démonstration. ■

Remarquons que l'on peut relier la norme dans $\mathcal{M}^2$ de l'intégrale stochastique X à celle dans $\mathcal{H}^2(M)$ du processus intégré H de la manière suivante:

$$
\|X\|^2_{\mathcal{M}^2} = \mathbb{E}\left[X_\infty^2\right] = \mathbb{E}\left[\mathcal{I}(H)^2\right] = \|H\|^2_{\mathcal{H}^2(M)}.
$$

On a donc obtenu une interprétation trajectorielle de l'intégrale stochastique, au sens où c'est une martingale continue de carré intégrable. Sa valeur en 0 étant nulle, on a que

$$
\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s \, dM_s\right] = 0, \quad t \geq 0.
$$

Regardons ce que l'on obtient dans le cas brownien. On dit que le processus B est un mouvement brownien relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si c'est un mouvement brownien adapté et à accroissements indépendants par rapport à cette filtration. Rappelons que $B \notin \mathcal{M}^2$ mais en revanche $B^T \in \mathcal{M}^2$ où $T > 0$ est un horizon déterministe fixé. Ainsi, quitte à réduire la martingale par T, la théorie de l'intégrale stochastique est valable aussi sur $[0,T]$ en lieu et place de $\mathbb{R}_+$. En considérant l'espace $\mathcal{M}^2[0,T]$ des martingales continues de carré intégrable sur $[0,T]$ et $\mathcal{H}^2(B,T)$ l'espace $\mathcal{H}^2(B^T)$, on obtient que pour tout processus $H \in \mathcal{H}^2(B,T)$,

$$
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s \, dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 \, ds\right], \quad 0 \leq t \leq T.
$$

4.1.3 Variation quadratique de l'intégrale stochastique

Regardons à présent comment se comporte l'intégrale stochastique par rapport à la variation quadratique.

Proposition 4.1.7. *Soit $N \in \mathcal{M}^2$. Alors pour tout $H \in \mathcal{H}^2(M)$, on a l'identité suivante:*

$$
\left[\int_0^\cdot H_s \, dM_s, N\right]_t = \int_0^t H_s \, d[M,N]_s, \quad t \geq 0, \tag{4.1.1}
$$

où l'intégrale de droite est une intégrale de Stieltjes. En particulier, si N est elle-même une intégrale stochastique, i.e. $N := \int_0^\cdot K_s \, d\tilde{M}_s$ où $\tilde{M} \in \mathcal{M}^2$ et $K \in \mathcal{H}^2(\tilde{M})$, alors

$$
\left[\int_0^\cdot H_s \, dM_s, \int_0^\cdot K_s \, d\tilde{M}_s\right]_t = \int_0^t H_s K_s \, d[M,\tilde{M}]_s, \quad t \geq 0.
$$

Démonstration. Tout d'abord, en utilisant la linéarité de $[\cdot, N]$, la relation est clairement vérifiée pour les processus simples $H \in \mathcal{H}_0^2(M)$: pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\left[\int_0^{\cdot} H_s\, dM_s, N\right]_t &= \left[\sum_{k\geq 0} a_k \left(M_{t_{k+1}\wedge \cdot} - M_{t_k \wedge \cdot}\right), N\right]_t \\
&= \sum_{k\geq 0} a_k \left(\left[M_{t_{k+1}\wedge \cdot}, N\right]_t - [M_{t_k\wedge\cdot}, N]_t\right) \\
&= \sum_{k\geq 0} a_k \left([M,N]_{t_{k+1}\wedge t} - [M,N]_{t_k\wedge t}\right) \\
&= \int_0^t H_s\, d[M,N]_s.
\end{aligned}$$

Il reste à étendre cette égalité à l'espace $\mathcal{H}^2(M)$. Soit $H \in \mathcal{H}^2(M)$ et $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_0^2(M)$ une suite de processus simples convergeant vers H dans $\mathcal{H}^2(M)$. Notons X (resp. X^n) l'intégrale stochastique de H (resp. H^n) par rapport à M. Soit $t \geq 0$. En utilisant l'égalité précédente pour la suite $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis les inégalités de Kunita-Watanabe et Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|[X,N]_t - \int_0^t H_s\, d[M,N]_s\right|\right] &\leq \mathbb{E}\left[|[X - X^n, N]_t|\right] + \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t (H_s^n - H_s)\, d[M,N]_s\right|\right] \\
&\leq \|X - X^n\|_{\mathcal{M}^2} \|N\|_{\mathcal{M}^2} + \|H^n - H\|_{\mathcal{H}^2(M)} \|N\|_{\mathcal{M}^2} \\
&= 2\,\|H^n - H\|_{\mathcal{H}^2(M)} \|N\|_{\mathcal{M}^2},
\end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, d'où l'égalité désirée. ■

Il est facile de voir que l'identité (4.1.1) caractérise l'intégrale stochastique, propriété qui va nous être utile par la suite. En effet, si $X \in \mathcal{M}^2$ vérifie aussi la même identité, alors on a pour tout $N \in \mathcal{M}^2$,

$$\left[\int_0^{\cdot} H_s\, dM_s - X, N\right] = 0,$$

et en prenant $N := \int_0^{\cdot} H_s\, dM_s - X \in \mathcal{M}^2$, on trouve que $X = \int_0^{\cdot} H_s\, dM_s$. Par ailleurs, en prenant l'espérance dans la seconde identité de la proposition précédente, on obtient que

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s\, dM_s\right)\left(\int_0^t K_s\, d\tilde{M}_s\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s K_s\, d[M,\tilde{M}]_s\right],$$

égalité généralisant l'isométrie d'Itô. Avant d'étendre dans le paragraphe suivant la construction de l'intégrale stochastique sur son vrai domaine, qui est un espace plus grand que $\mathcal{H}^2(M)$, observons comment elle se comporte lorsque l'on introduit un temps d'arrêt.

Proposition 4.1.8. *Si τ est un temps d'arrêt, alors on a pour tout $H \in \mathcal{H}^2(M)$,*

$$\int_0^t H_s 1_{\{s<\tau\}}\, dM_s = \int_0^{t\wedge\tau} H_s\, dM_s = \int_0^t H_s\, dM_{s\wedge\tau}, \quad t \geq 0.$$

<u>Démonstration</u>. En utilisant les propriétés du crochet vues à la proposition 3.1.10 ainsi que (4.1.1), on a pour tout $t \geq 0$,

$$\left[\int_0^{\cdot\wedge\tau} H_s\, dM_s, N\right]_t = \left[\int_0^{\cdot} H_s\, dM_s, N\right]_{t\wedge\tau} = \int_0^{t\wedge\tau} H_s\, d[M,N]_s = \int_0^t H_s 1_{\{s<\tau\}}\, d[M,N]_s,$$

ce qui montre que la martingale arrêtée $\int_0^{\cdot\wedge\tau} H_s\, dM_s$ vérifie la propriété caractéristique (4.1.1) de l'intégrale stochastique $\int_0^{\cdot} H_s 1_{\{s<\tau\}}\, dM_s$. On obtient ainsi la première égalité désirée.
La preuve de la seconde est analogue en écrivant que pour tout $t \geq 0$,

$$\left[\int_0^{\cdot} H_s\, dM_{s\wedge\tau}, N\right]_t = \int_0^t H_s\, d[M_{\cdot\wedge\tau}, N]_s = \int_0^t H_s\, d[M,N]_{s\wedge\tau} = \int_0^t H_s 1_{\{s<\tau\}}\, d[M,N]_s.$$

$\blacksquare$

Grâce au résultat précédent, nous pourrions dès maintenant définir l'intégrale stochastique par rapport à une martingale locale M, et ce pour des processus adaptés H vérifiant

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty H_t^2\, d[M,M]_t\right] < \infty.$$

Nous ne le ferons pas car ce qui va suivre est beaucoup plus général et englobe cette extension.

4.2 Localisation

À présent, si l'on se donne une fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors une théorie consistante de l'intégration stochastique devrait donner un sens à l'intégrale $\int_0^T f(M_t)\, dM_t$. Cependant, elle n'a été définie jusqu'à présent que pour des processus $H = f(M)$ qui appartiennent à l'espace $\mathcal{H}^2(M)$. Or si par exemple $M = B$ le mouvement brownien, alors en prenant une fonction continue f tendant très rapidement à l'infini, comme $f(x) = e^{x^4}$, on voit que le processus $f(B) \notin \mathcal{H}^2(B,T)$, ce qui est un peu gênant. Étant donnée M une martingale locale issue de 0, notons aussi $\mathcal{H}^2(M)$ l'espace des processus adaptés H tels que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty H_t^2\, d[M,M]_t\right] < \infty,$$

et soit $\mathcal{H}^2_{\mathrm{loc}}(M) \supset \mathcal{H}^2(M)$ l'espace des processus adaptés H tels que pour tout $t \geq 0$, on ait p.s.,

$$\int_0^t H_s^2\, d[M,M]_s < \infty.$$

L'espace $\mathcal{H}^2_{\mathrm{loc}}(M)$ est en fait le bon espace à considérer dans la construction de l'intégrale stochastique.

Théorème 4.2.1. *Pour tout $H \in \mathcal{H}^2_{\mathrm{loc}}(M)$, il existe une unique martingale locale issue de 0, notée $\int_0^\cdot H_t\, dM_t$, telle que pour toute martingale locale N issue de 0,*

$$\left[\int_0^\cdot H_s\, dM_s, N\right]_t = \int_0^t H_s\, d[M,N]_s, \quad t \geq 0.$$

De plus, les égalités de la proposition 4.1.8 sont aussi vérifiées. Enfin, si $M \in \mathcal{M}^2$ et $H \in \mathcal{H}^2(M)$, alors cette définition étend celle de l'intégrale stochastique vue précédemment.

Démonstration. Considérons

$$\tau_n := \inf\left\{t \geq 0 : [M,M]_t + \int_0^t H_s^2\, d[M,M]_s \geq n\right\} \in [0,\infty],$$

de sorte que $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de temps d'arrêt tendant en croissant vers l'infini. Puisque l'on a pour tout $t \geq 0$

$$[M^{\tau_n}, M^{\tau_n}]_t = [M,M]_{t\wedge\tau_n} \leq n,$$

la martingale locale arrêtée M^{τ_n} appartient à $\mathcal{M}^2$ et de plus,

$$\int_0^\infty H_t^2\, d[M^{\tau_n}, M^{\tau_n}]_t = \int_0^\infty H_t^2\, d[M,M]_{t\wedge\tau_n} = \int_0^{\tau_n} H_t^2\, d[M,M]_t \leq n,$$

donc $H \in \mathcal{H}^2(M^{\tau_n})$: on peut alors définir pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale stochastique $\int_0^\cdot H_t\, dM_{t\wedge\tau_n}$ au sens classique. Ainsi, en utilisant la propriété caractéristique (4.1.1), on vérifie facilement que si $m > n$, alors

$$\int_0^t H_s\, dM_{s\wedge\tau_n} = \int_0^{t\wedge\tau_n} H_s\, dM_{s\wedge\tau_m}, \quad t \geq 0.$$

Cela montre qu'il existe un unique processus, noté $\int_0^\cdot H_s\, dM_s$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{t\wedge\tau_n} H_s\, dM_s = \int_0^t H_s\, dM_{s\wedge\tau_n}, \quad t \geq 0.$$

Puisque les processus $\int_0^{\cdot\wedge\tau_n} H_s\, dM_s$ sont dans $\mathcal{M}^2$, $\int_0^\cdot H_s\, dM_s$ est une martingale locale. À présent, soient N une martingale locale issue de 0 et $\tau_n' := \inf\{t \geq 0 : |N_t| \geq n\}$ et enfin $T_n := \tau_n \wedge \tau_n'$. Alors pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\left[\int_0^\cdot H_s\, dM_s, N\right]_{t\wedge T_n} &= \left[\int_0^{\cdot\wedge T_n} H_s\, dM_s, N^{T_n}\right]_t \\
&= \left[\int_0^{\cdot\wedge T_n} H_s\, dM_{s\wedge\tau_n}, N^{T_n}\right]_t \\
&= \left[\int_0^\cdot H_s\, dM_{s\wedge\tau_n}, N^{T_n}\right]_t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^t H_s\, d[M^{\tau_n}, N^{T_n}]_s \\ &= \int_0^t H_s\, d[M, N]_{s\wedge T_n} \\ &= \int_0^{t\wedge T_n} H_s\, d[M, N]_s, \end{aligned}$$

d'où l'égalité

$$\left[\int_0^\cdot H_s\, dM_s, N\right]_t = \int_0^t H_s\, d[M, N]_s, \quad t \geq 0.$$

De plus, les égalités de la proposition 4.1.8 sont obtenues dans ce cadre par les mêmes arguments que dans la démonstration de la Proposition 4.1.8 (ces arguments utilisent seulement la propriété caractéristique (4.1.1) que l'on vient d'étendre).

Enfin, si $M \in \mathcal{M}^2$ et $H \in \mathcal{H}^2(M)$, l'égalité $\left[\int_0^\cdot H_s\, dM_s, \int_0^\cdot H_s\, dM_s\right] = \int_0^\cdot H_s^2\, d[M, M]_s$ entraîne d'abord que $\int_0^\cdot H_s\, dM_s \in \mathcal{M}^2$, et ensuite la propriété caractéristique (4.1.1) montre que les définitions des théorèmes 4.1.5 et 4.2.1 coïncident. ■

Remarquons que si M est une martingale locale issue de 0 et $H \in \mathcal{H}^2(M)$, alors en appliquant le théorème 3.1.7 à l'intégrale stochastique $\int_0^\cdot H_s\, dM_s$, on a pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s\, dM_s\right] = 0, \qquad \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s\, dM_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2\, d[M, M]_s\right].$$

4.3 Extension de l'intégrale stochastique aux semimartingales continues

Nous allons maintenant étendre l'intégrale stochastique aux semimartingales continues. On dit qu'un processus adapté H est localement borné si p.s,

$$\sup_{s\in[0,t]} |H_s| < \infty, \quad t \geq 0.$$

En particulier, tout processus continu adapté est localement borné. De plus, si H est localement borné, alors pour tout processus A continu à variation bornée, on a p.s.

$$\int_0^t |H_s|\, |dA_s| < \infty, \quad t \geq 0,$$

et $\int_0^\cdot H_s\, dA_s$ est un processus continu à variation bornée.

De même, si M est une martingale locale issue de 0, alors $H \in \mathcal{H}^2_{\mathrm{loc}}(M)$.

Définition 4.3.1. *Soit $X = X_0 + M + A$ une semimartingale continue et H un processus adapté localement borné. L'intégrale stochastique $\int_0^\cdot H_s\, dX_s$ est alors définie comme la semimartingale continue suivante:*

$$\int_0^t H_s\, dX_s := \int_0^t H_s\, dM_s + \int_0^t H_s\, dA_s, \quad t \geq 0.$$

Proposition 4.3.2. *Soit X une semimartingale continue, et soit H un processus adapté localement borné.*

(i) L'application $(H,X) \to \int_0^\cdot H_s\,dX_s$ est bilinéaire.

(ii) Les égalités de la proposition 4.1.8 (faisant intervenir un temps d'arrêt) restent vérifiées en remplaçant M par X.

Pour finir ce paragraphe, énonçons un lemme important qui va nous servir dans la suite. Remarquons que ce résultat ne nécessite pas de démonstration dès que $H \in \mathcal{H}^2(M)$, car dans ce cas il s'agit de la construction initiale de l'intégrale stochastique comme limite L^2 de l'intégrale stochastique sur $\mathcal{H}_0^2(M)$.

Lemme 4.3.3. *Soit X une semimartingale continue et H un processus continu adapté. Alors pour tout $t > 0$, toute suite de subdivisions emboîtées $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$ de l'intervalle $[0,t]$, de pas tendant vers 0 lorsque $n \to \infty$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} H_{t_{i-1}^n} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}) = \int_0^t H_s\,dX_s,$$

au sens de la convergence en probabilité.

<u>*Démonstration*</u>. Notons que pour un processus continu à variation bornée A, on a p.s.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} H_{t_{i-1}^n} (A_{t_i^n} - A_{t_{i-1}^n}) = \int_0^t H_s\,dA_s,$$

donc il suffit simplement de traiter la partie martingale locale après avoir remarqué que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X+Y| > \varepsilon) \le \mathbb{P}(|X| > \varepsilon/2) + \mathbb{P}(|Y| > \varepsilon/2).$$

Ainsi, supposons sans perte de généralité que $X = M$ est une martingale locale issue de 0. Pour chaque $n \in \mathbb{N}_*$, définissons le processus adapté H^n par

$$H_s^n := \sum_{i=1}^{p_n} H_{t_{i-1}^n} 1_{(t_{i-1}^n, t_i^n]}(s).$$

On observe tout d'abord que $H_s^n \to H_s$ p.s. lorsque $n \to \infty$. De plus, ce processus ressemble à un élément de $\mathcal{H}_0^2(M)$, mais n'a aucune raison d'y appartenir car $H_{t_{i-1}^n}$ n'est pas forcément borné. On veut donc montrer que quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left| \int_0^t (H_s^n - H_s)\,dM_s \right| > \varepsilon \right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Étant donné un paramètre $p \in \mathbb{N}_*$, posons

$$\tau_p := \inf\{s \ge 0 : |H_s| + [M,M]_s \ge p\},$$

qui est une suite croissante de temps d'arrêt tendant p.s. vers l'infini. Remarquons que les processus H^{τ_p}, $(H^n)^{\tau_p}$ sont bornés par p, tout comme $[M,M]^{\tau_p}$, donc dans $\mathcal{H}^2(M^{\tau_p})$. Ainsi, pour tout p fixé,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (H_s^n - H_s)\, dM_s^{\tau_p}\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t (H_s^n - H_s)^2\, d[M^{\tau_p}, M^{\tau_p}]_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t (H_s^n - H_s)^2\, d[M,M]_{s\wedge\tau_p}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_p} (H_s^n - H_s)^2\, d[M,M]_s\right],
\end{aligned}$$

et par convergence dominée ce dernier terme tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. Ainsi, en utilisant la proposition 4.1.8, on obtient que

$$L^2 - \lim_{n\to\infty} \int_0^{t\wedge\tau_p} H_s^n\, dM_s = \int_0^{t\wedge\tau_p} H_s\, dM_s.$$

Enfin, on achève la preuve en remarquant, via l'inégalité de Chebyshev, que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\int_0^t (H_s^n - H_s)\, dM_s\right| > \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\int_0^{t\wedge\tau_p} (H_s^n - H_s)\, dM_s\right| > \varepsilon ; \tau_p > t\right) \\
&\quad + \mathbb{P}\left(\left|\int_0^t (H_s^n - H_s)\, dM_s\right| > \varepsilon ; \tau_p \leq t\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\left|\int_0^{t\wedge\tau_p} (H_s^n - H_s)\, dM_s\right| > \varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(\tau_p \leq t\right) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t\wedge\tau_p} (H_s^n - H_s)\, dM_s\right)^2\right] + \mathbb{P}\left(\tau_p \leq t\right),
\end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque n puis p tendent vers 0. ■

En particulier, on notera que si $H = f(X)$ où f est une fonction continue, alors on a la convergence en probabilité:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} f(X_{t_{i-1}^n})\,(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}) = \int_0^t f(X_s)\, dX_s, \quad t \geq 0.$$

4.4 Formule d'Itô

À présent, nous allons énoncer et démontrer l'un des résultats les plus importants de la théorie du calcul stochastique, la formule d'Itô. Ces travaux ont été publiés entre 1942 et 1950 et sont dus au mathématicien japonais récemment décédé, Kiyoshi Itô. Elle montre qu'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de d semimartingales continues est encore une semimartingale continue, et exprime explicitement sa décomposition.

Rappelons que dans le cadre de l'intégration au sens de Stieltjes, un des théorèmes fondamentaux de cette théorie est le suivant: étant donné A un processus continu à variation bornée et une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, on a

$$f(A_t) - f(A_0) = \int_0^t f'(A_s)\, dA_s, \quad t \geq 0.$$

De même, si B est un autre processus continu à variation bornée, la formule d'intégration par parties est vérifiée:

$$A_t B_t - A_0 B_0 = \int_0^t A_s\, dB_s + \int_0^t B_s\, dA_s, \quad t \geq 0.$$

Évidemment, ces formules ne sont plus valables dès que l'on sort du cadre des processus à variation bornée. Cependant, en reprenant le même type de démonstration via la formule de Taylor et en contrôlant de manière adéquate le reste quadratique (qui est négligeable dans le cas précédent), on est en mesure d'obtenir la fameuse formule d'Itô, faisant donc apparaître un terme supplémentaire: la variation quadratique.

Théorème 4.4.1. *Soit $X^1, \ldots, X^d$ des semimartingales continues et soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Alors pour tout $t \geq 0$,*

$$\begin{aligned} f(X_t^1, \ldots, X_t^d) &= f(X_0^1, \ldots, X_0^d) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}\,(X_s^1, \ldots, X_s^d)\, dX_s^i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\,(X_s^1, \ldots, X_s^d)\, d[X^i, X^j]_s. \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Démonstration. Traitons seulement le cas $d = 1$, la généralisation au cas multidimensionnel étant immédiate (les termes faisant apparaître les crochets $[X^i, X^j]$ se traitent de la même façon que celui pour le crochet $[X, X]$ qui va suivre), et notons $X := X^1$. Considérons pour tout $t \geq 0$ une suite $0 = t_0^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$ de subdivisions emboîtées de $[0, t]$ de pas tendant vers 0 lorsque $n \to \infty$. Alors par la formule de Taylor,

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \sum_{i=1}^{p_n} \Big(f(X_{t_i^n}) - f(X_{t_{i-1}^n}) \Big) \\ &= f(X_0) + \sum_{i=1}^{p_n} \left(f'(X_{t_{i-1}^n})\,(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}) + \frac{f_{n,i}}{2}\,(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 \right), \end{aligned}$$

où $f_{n,i}$ est une variable aléatoire satisfaisant

$$\inf_{\theta \in [0,1]} f''(X_{t_{i-1}^n} + \theta\,(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})) \leq f_{n,i} \leq \sup_{\theta \in [0,1]} f''(X_{t_{i-1}^n} + \theta\,(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})).$$

D'après le lemme 4.3.3, on a la convergence en probabilité suivante:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} f'(X_{t_{i-1}^n})\,(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}) = \int_0^t f'(X_s)\,dX_s.$$

Montrons alors qu'en probabilité,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} f_{n,i}\,(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 = \int_0^t f''(X_s)\,d[X,X]_s.$$

Tout d'abord, commençons par observer que pour $m < n$,

$$\sum_{i=1}^{p_n} f_{n,i}\,(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 = \sum_{j=1}^{p_m} \sum_{\substack{i\in\{1,\dots,p_n\}\\ t_{j-1}^m < t_i^n \le t_j^m}} f_{n,i}\,(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2,$$

ce qui entraîne l'inégalité suivante:

$$\left| \sum_{i=1}^{p_n} f_{n,i}\,(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 - \sum_{j=1}^{p_m} f_{m,j} \sum_{\substack{i\in\{1,\dots,p_n\}\\ t_{j-1}^m < t_i^n \le t_j^m}} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 \right| \le Z_{m,n} \sum_{i=1}^{p_n} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2,$$

où la variable aléatoire $Z_{m,n}$ est donnée par

$$Z_{m,n} := \sup_{j\in\{1,\dots,p_m\}} \sup_{\substack{i\in\{1,\dots,p_n\}\\ t_{j-1}^m < t_i^n \le t_j^m}} |f_{n,i} - f_{m,j}|.$$

Grâce à la continuité de f'', on vérifie que $Z_{m,n} \to 0$ p.s. quand n puis $m \to \infty$. Comme par la proposition 3.2.2, $\sum_{i=1}^{p_n} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2$ tend vers $[X,X]_t$ en probabilité, il en résulte que $Z_{m,n} \sum_{i=1}^{p_n} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2$ tend vers 0 en probabilité quand n puis $m \to \infty$ (exercice). Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir m assez grand de sorte que pour tout $n > m$,

$$\mathbb{P}\left(Z_{m,n} \sum_{i=1}^{p_n} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 > \varepsilon/3 \right) < \varepsilon/3.$$

Ensuite, pour cette valeur fixée de m, la convergence suivante en probabilité est vérifiée:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{p_m} f_{m,j} \sum_{\substack{i\in\{1,\dots,p_n\}\\ t_{j-1}^m < t_i^n \le t_j^m}} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 &= \sum_{j=1}^{p_m} f_{m,j} \left([X,X]_{t_j^m} - [X,X]_{t_{j-1}^m} \right) \\
&= \int_0^t h_m(s)\,d[X,X]_s,
\end{aligned}$$

où $h_m(s) := \sum_{j=1}^{p_m} f_{m,j}\, 1_{(t_{j-1}^m, t_j^m]}(s)$, qui tend clairement vers $f''(X_s)$ p.s. lorsque $m \to \infty$. Ainsi, quitte à prendre m encore plus grand, on peut supposer que

$$\mathbb{P}\left(\left|\int_0^t h_m(s)\, d[X,X]_s - \int_0^t f''(X_s)\, d[X,X]_s\right| > \varepsilon/3\right) < \varepsilon/3.$$

Enfin, en combinant ce qui précède, on obtient pour $n > m$ assez grand,

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{p_n} f_{n,i}\, (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 - \int_0^t f''(X_s)\, d[X,X]_s\right| > \varepsilon\right) \quad < \quad \varepsilon,$$

d'où la convergence en probabilité désirée. Enfin, on achève la démonstration de la formule d'Itô de la manière suivante. La convergence en probabilité entraînant la convergence p.s. d'une sous-suite, (4.4.1) est vérifiée en tant qu'égalité p.s. pour chaque $t \geq 0$ fixé, puis pour tout $t \in [0,\infty) \cap \mathbb{Q}$, p.s., et enfin, les deux membres de l'égalité étant continus, pour tout $t \geq 0$ p.s., ce qui termine la preuve. ■

Si M est une martingale locale, alors pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$,

$$f(M_t) = f(M_0) + \underbrace{\int_0^t f'(M_s)\, dM_s}_{\text{martingale locale}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^t f''(M_s)\, d[M,M]_s}_{\text{continu à variation bornée}}, \quad t \geq 0.$$

En particulier, si $f'(M) \in \mathcal{H}^2(M)$, alors la martingale locale est une vraie martingale. Par exemple, la formule d'Itô appliquée à la fonction $f(x) = x^2$ entraîne que

$$M_t^2 - [M,M]_t = M_0^2 + 2\int_0^t M_s\, dM_s, \quad t \geq 0.$$

Ainsi, non seulement on retrouve le fait que le processus $M^2 - [M,M]$ est une martingale, mais de plus on donne sa valeur sous forme d'intégrale sochastique.
Une autre application intéressante de la formule d'Itô est la formule d'intégration par parties, généralisant celle vue ci-dessus dans le cadre des processus à variation bornée.

Corollaire 4.4.2. *Si X et Y sont deux semimartingales continues, alors*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t Y_s\, dX_s + \int_0^t X_s\, dY_s + [X,Y]_t, \quad t \geq 0.$$

À présent, regardons plus en détail le cas brownien. En appliquant la formule d'Itô bidimensionnelle au mouvement brownien B ainsi qu'à la semimartingale déterministe $X_t := t$, on obtient pour toute fonction $f : (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mapsto f(x,t) \in \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ en x et $\mathscr{C}^1$ en t,

$$f(B_t, t) \;=\; f(0,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(B_s, s)\, dB_s + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(B_s, s)\, ds, \quad t \geq 0.$$

En effet, vu que B est une martingale et X un processus continu à variation bornée, la définition du crochet entraîne pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} [B,X]_t &= \frac{1}{2}\left([B+X,B+X]_t - [B,B]_t - [X,X]_t\right) \\ &= \frac{1}{2}\left([B,B]_t - [B,B]_t - 0\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

et en reprenant la démonstration de la formule d'Itô dans ce cadre "dégénéré", il suffit de prendre f seulement $\mathscr{C}^1$ en t. On remarque alors que le processus $f(B,X)$ est une martingale locale si et seulement si l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,$$

est satisfaite. Ceci se généralise à la dimension supérieure. On appelle mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ un vecteur d-dimensionnel $\tilde{B} := (B^1,\ldots,B^d)$ de mouvements browniens indépendants et tel que $\tilde{B}$ soit adapté et à accroissements indépendants pour cette filtration. Remarquons que lorsque $i \neq j$, on a pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} [B^i,B^j]_t &= \frac{1}{2}\left([B^i+B^j,B^i+B^j]_t - [B^i,B^i]_t - [B^j,B^j]_t\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2t - t - t\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

car la somme de deux mouvements browniens indépendants est "presque" un mouvement brownien (processus gaussien continu centré mais de fonction de covariance $K(s,t) = 2\,s \wedge t$). Ainsi, pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$f(\tilde{B}_t,t) = f(0_{\mathbb{R}^d},0) + \int_0^t < \nabla f(\tilde{B}_s,s), d\tilde{B}_s > + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta f\right)(\tilde{B}_s,s)\,ds, \quad t \geq 0,$$

où l'on a utilisé la notation vectorielle. De même que précédemment, $f(\tilde{B},X)$ est une martingale locale si et seulement si l'EDP suivante est vérifiée:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta f = 0,$$

propriété illustrant le lien étroit entre la théorie des probabilités et les EDP.

Donnons une autre illustration de la formule d'Itô, les inégalités de Burkhölder-Davis-Gundy.

Théorème 4.4.3. *Pour tout réel $p > 0$, il existe des constantes $c_p, C_p > 0$ telle que pour toute martingale locale M issue de 0,*

$$c_p\,\mathbb{E}\left[[M,M]_\infty^{p/2}\right] \leq \mathbb{E}\left[(M_\infty^*)^p\right] \leq C_p\,\mathbb{E}\left[[M,M]_\infty^{p/2}\right],$$

où comme dans le chapitre 2, $M_\infty^* := \sup_{t\geq 0}|M_t|$.

Remarquons que si τ est un temps d'arrêt quelconque, alors en remplaçant M par la martingale arrêtée M^τ, on obtient les mêmes inégalités avec τ à la place de ∞.

Démonstration. Nous n'allons démontrer les bornes supérieure et inférieure que dans les cas $p \geq 2$ et $p \in \{2\} \cup [4, \infty)$, respectivement. La généralisation pourra être consultée au théorème 4.1 de la bible probabiliste de Revuz-Yor [4]. Par ailleurs, on peut se restreindre sans perte de généralité au cas d'une martingale bornée, quitte à remplacer M par M^{τ_n} pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $\tau_n := \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}$, auquel cas $M \in \mathcal{M}^2$.

Commençons par le cas $p = 2$. On a par l'inégalité de Doob L^2,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[[M,M]_\infty\right] &= \mathbb{E}\left[M_\infty^2\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[(M_\infty^*)^2\right] \\
&\leq 4 \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left[M_t^2\right] \\
&= 4\,\mathbb{E}\left[[M,M]_\infty\right].
\end{aligned}$$

À présent, démontrons la borne supérieure pour $p > 2$. La fonction $x \mapsto |x|^p$ étant $\mathscr{C}^2$, la formule d'Itô entraîne pour tout $t \geq 0$,

$$|M_t|^p = \int_0^t p|M_s|^{p-1}\mathrm{sign}(M_s)\, dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t p(p-1)|M_s|^{p-2}\, d[M,M]_s.$$

Notons que l'intégrale stochastique est aussi dans $\mathcal{M}^2$ car M est bornée. En passant à l'espérance et en utilisant les inégalités de Hölder,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|M_t|^p\right] &= \frac{p(p-1)}{2}\,\mathbb{E}\left[\int_0^t |M_s|^{p-2}\, d[M,M]_s\right] \\
&\leq \frac{p(p-1)}{2}\,\mathbb{E}\left[(M_t^*)^{p-2}\,[M,M]_t\right] \\
&\leq \frac{p(p-1)}{2}\,\mathbb{E}\left[(M_t^*)^p\right]^{(p-2)/p}\,\mathbb{E}\left[[M,M]_t^{p/2}\right]^{2/p}.
\end{aligned}$$

Ainsi, par l'inégalité de Doob L^p, on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\frac{p-1}{p}\right)^p \mathbb{E}\left[(M_t^*)^p\right] &\leq \mathbb{E}\left[|M_t|^p\right] \\
&\leq \frac{p(p-1)}{2}\,\mathbb{E}\left[(M_t^*)^p\right]^{(p-2)/p}\,\mathbb{E}\left[[M,M]_t^{p/2}\right]^{2/p},
\end{aligned}$$

et en simplifiant cette dernière expression, le résultat désiré est démontré (par convergence monotone, on peut passer à la limite dans l'inégalité lorsque $t \to \infty$).

Pour démontrer la borne inférieure dans le cas $p \geq 4$, on procède de manière similaire. Notons que la constante c_p qui va apparaître dans ce qui suit désigne une constante ne dépendant que de p, mais changeant éventuellement de ligne à ligne. Tout d'abord, de l'identité

$$M_t^2 = 2\int_0^t M_s\, dM_s + [M,M]_t, \quad t \geq 0,$$

on obtient en utilisant l'inégalité triviale $|x+y|^p \leq c_p \, (|x|^p + |y|^p)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[[M,M]_t^{p/2} \right] &\leq c_p \left(\mathbb{E}\left[(M_t^*)^p \right] + \mathbb{E}\left[\left| \int_0^t M_s \, dM_s \right|^{p/2} \right] \right) \\
&\leq c_p \left(\mathbb{E}\left[(M_t^*)^p \right] + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t M_s^2 \, d[M,M]_s \right)^{p/4} \right] \right) \\
&\leq c_p \left(\mathbb{E}\left[(M_t^*)^p \right] + \mathbb{E}\left[(M_t^*)^{p/2} \, [M,M]_t^{p/4} \right] \right) \\
&\leq c_p \left(\mathbb{E}\left[(M_t^*)^p \right] + \sqrt{\mathbb{E}\left[(M_t^*)^p \right]} \sqrt{\mathbb{E}\left[[M,M]_t^{p/2} \right]} \right),
\end{aligned}$$

où pour obtenir les seconde et quatrième inégalités, on a utilisé la borne supérieure de l'inégalité de BDG juste démontrée, ainsi que Cauchy-Schwarz, respectivement. Si maintenant on note

$$x := \sqrt{\mathbb{E}\left[[M,M]_t^{p/2} \right]} \quad \text{et} \quad y := \sqrt{\mathbb{E}\left[(M_t^*)^p \right]},$$

alors l'inégalité précédente se réécrit comme

$$x^2 - c_p \, xy - c_p \, y^2 \leq 0,$$

ce qui entraîne que x est plus petit que la racine carrée positive de l'équation $x^2 - c_p \, xy - c_p \, y^2 = 0$, qui est de la forme $c_p \, y$. La démonstration est achevée en faisant tendre t vers l'infini. ∎

En application des inégalités de BDG, on obtient pour le mouvement brownien B et pour tout temps d'arrêt τ,

$$c_p \, \mathbb{E}\left[\tau^{p/2} \right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t \in [0,\tau]} |B_t|^p \right] \leq C_p \, \mathbb{E}\left[\tau^{p/2} \right].$$

La formule d'Itô nous permet d'exhiber de nouvelle martingales locales, comme la classe des martingales exponentielles, généralisant celles rencontrées au début du chapitre 2 pour les processus à accroissements indépendants. On dit qu'un processus à valeurs dans $\mathbb{C}$ est une martingale locale si ses parties réelle et imaginaire le sont. La démonstration du prochain résultat est laissée en exercice.

Corollaire 4.4.4. *Soit M une martingale locale et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors le processus donné par*

$$\mathscr{E}(\lambda M)_t := \exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} [M,M]_t \right), \quad t \geq 0,$$

est une martingale locale à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Maintenant, énonçons le théorème de Lévy, stipulant que toute martingale locale dont le crochet est celui d'un mouvement brownien, est en fait un mouvement brownien.

Théorème 4.4.5 (Lévy). *Soit M un processus continu issu de 0 et adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) M est un mouvement brownien pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

(ii) M est une martingale locale par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, et de crochet $[M,M]_t = t$.

<u>*Démonstration.*</u> Seul le point $(ii) \Rightarrow (i)$ est à démontrer. Ainsi, supposons que M soit une martingale locale de crochet $[M,M]_t = t$. Étant donné $\theta \in \mathbb{R}$, le corollaire 4.4.4 indique que le processus $\mathscr{E}(i\theta M)$ est une martingale locale, qui est bornée sur tout intervalle $[0,T]$, $T > 0$ arbitraire, donc une vraie martingale sur $[0,T]$ (et donc sur $\mathbb{R}_+$). D'où pour tous $0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}\left[e^{i\theta M_t + \frac{\theta^2 t}{2}} \mid \mathcal{F}_s\right] = e^{i\theta M_s + \frac{\theta^2 s}{2}},$$

ou encore que

$$\mathbb{E}\left[e^{i\theta(M_t - M_s)} \mid \mathcal{F}_s\right] = e^{-\frac{\theta^2(t-s)}{2}},$$

Ainsi, on en déduit que $M_t - M_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ mais aussi que $M_t - M_s$ est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_s$. Il reste à démontrer que M est un processus gaussien, ce qui est clair car si $d \in \mathbb{N}_*$, $\alpha \in \mathbb{R}^d$ et $0 = t_0 < \cdots < t_d$, alors

$$\sum_{i=1}^d \alpha_i \, M_{t_i} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^i \alpha_i \, (M_{t_j} - M_{t_{j-1}}) = \sum_{j=1}^d \left(\sum_{i=j}^d \alpha_i \right) (M_{t_j} - M_{t_{j-1}}),$$

qui est donc la somme de variables aléatoires gaussiennes indépendantes, donc une variable gaussienne. ■

Terminons ce paragraphe par le théorème de Dubins-Schwarz, énonçant que toute martingale locale issue de 0 est un mouvement brownien changé de temps.

Théorème 4.4.6 (Dubins-Schwarz). *Soit M une martingale locale issue de 0 et telle que p.s., $[M,M]_\infty = \infty$. Alors il existe un mouvement brownien B tel que p.s.,*

$$M_t = B_{[M,M]_t}, \quad t \geq 0.$$

Avant de démontrer ce résultat, mentionnons que ce théorème reste vrai dans le cas ou p.s., $[M,M]_\infty < \infty$, quitte à grossir l'espace de probabilité sous-jacent. Par ailleurs, notons que le mouvement brownien ci-dessus l'est par rapport à une filtration changée de temps. En effet, si l'on définit le temps d'arrêt (fini d'après l'hypothèse sur le crochet):

$$\tau_r = \inf\{t \geq 0 : [M,M]_t > r\}, \quad r \geq 0,$$

qui est l'inverse généralisé du crochet (ce dernier n'est pas forcément strictement croissant), alors $B_r = M_{\tau_r}$ qui est adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{G}_r)_{r\geq 0}$ donnée par $\mathcal{G}_r = \mathcal{F}_{\tau_r}$. On peut montrer que cette filtration est standard.

<u>*Démonstration.*</u> Tout d'abord, notons que la fonction $r \to \tau_r$ est croissante, continue à droite, et admet une limite à gauche (fonction dite *càdlàg*). On a aussi que

$$\tau_{r-} := \lim_{s \uparrow r} \tau_s = \inf\{t \geq 0 : [M,M]_t \geq r\},$$

avec par convention que $\tau_{0-} = 0$. De plus, on remarque que $\tau_r \neq \tau_{r-}$ si et seulement si $[M,M]_s = r$ pour tout $s \in [\tau_{r-}, \tau_r]$. Ainsi, la fonction $r \to \tau_r$ est continue si et seulement si $[M,M]$ est strictement croissant. Enfin, notons que $[M,M]$ et $(\tau_r)_{r\geq 0}$ ne jouent pas un rôle complètement symétrique car on a toujours que

$$[M,M]_{\tau_r} = [M,M]_{\tau_{r-}} = r,$$

alors qu'en général on a seulement que $\tau_{[M,M]_t} \geq t$: $\tau_{[M,M]_t} > t$ si t est dans un intervalle de constance du crochet $[M,M]$, i.e.

$$[M,M]_t = [M,M]_{\tau_{[M,M]_t}}.$$

Posons $B_r = M_{\tau_r}$ pour tout $r \geq 0$. On peut montrer (exercice) que les intervalles de constance de M et $[M,M]$ sont p.s. les mêmes. D'où p.s. pour tout $r \geq 0$,

$$B_r = M_{\tau_r} = M_{\tau_{r-}} = \lim_{s\uparrow r} M_{\tau_s} = \lim_{s\uparrow r} B_s.$$

Comme les trajectoires de B défini ci-dessus sont clairement continues à droite, on en déduit que le processus B est continu. Vérifions à présent que B et $(B_r^2 - r)_{r\geq 0}$ sont des martingales pour la filtration $(\mathcal{G}_r)_{r\geq 0}$. Soient $0 \leq r \leq s \leq n$. Vu que l'on a

$$\mathbb{E}\left[[M,M]_\infty^{\tau_n}\right] = n < \infty,$$

le théorème 3.1.7 nous dit que M^{τ_n} est une vraie martingale bornée dans L^2 donc uniformément intégrable, et de surcroît $(M^2)^{\tau_n} - [M,M]^{\tau_n}$ est aussi une martingale uniformément intégrable. Ainsi, le théorème d'arrêt entraîne

$$\mathbb{E}\left[B_s \mid \mathcal{G}_r\right] = \mathbb{E}\left[M_{\tau_s}^{\tau_n} \mid \mathcal{F}_{\tau_r}\right] = M_{\tau_r}^{\tau_n} = B_r,$$

$$\mathbb{E}\left[B_s^2 - s \mid \mathcal{G}_r\right] = \mathbb{E}\left[(M_{\tau_s}^{\tau_n})^2 - [M^{\tau_n}, M^{\tau_n}]_{\tau_s} \mid \mathcal{F}_{\tau_r}\right] = (M_{\tau_r}^{\tau_n})^2 - [M^{\tau_n}, M^{\tau_n}]_{\tau_r} = B_r^2 - r.$$

Par ailleurs, ceci démontre par unicité de la variation quadratique que $[B,B]_s = s$ et le théorème de Lévy implique que B est bien un mouvement brownien pour la filtration $(\mathcal{G}_r)_{r\geq 0}$. Finalement, par définition de B, on a pour tout $t \geq 0$,

$$B_{[M,M]_t} = M_{\tau_{[M,M]_t}}.$$

Ainsi, dans le cas où $\tau_{[M,M]_t} > t$, on a que t est dans un intervalle de constance de $[M,M]$, donc de M, et on en déduit alors que p.s. pour tout $t \geq 0$, $M_t = B_{[M,M]_t}$. ∎

4.5 Théorème de Girsanov

L'objectif de ce dernier paragraphe est d'étudier comment se transforment les notions de semimartingales et de martingales lorsque l'on remplace la probabilité générique $\mathbb{P}$ par une probabilité $\mathbb{Q}$ absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$. On rappelle que $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$. Commençons par donner deux lemmes qui vont nous servir dans la suite.

Lemme 4.5.1. *Soit $\mathbb{Q}$ une probabilité absolument continue (sur $\mathcal{F}_\infty$) par rapport à $\mathbb{P}$, de dérivée de Radon-Nikodym $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$. Pour tout $t \in [0,\infty)$, notons D_t la restriction de $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$ à la tribu $\mathcal{F}_t$, que l'on suppose continue. Alors,*

(i) le processus D est une $\mathbb{P}$-martingale continue uniformément intégrable.

(ii) pour tout temps d'arrêt τ, D_τ est la restriction de $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$ à la tribu $\mathcal{F}_\tau$.

(iii) si l'on suppose que les deux probabilités sont équivalentes, i.e. $\mathbb{P}$ est aussi une probabilité absolument continue par rapport à $\mathbb{Q}$, alors p.s. $D_t > 0$ pour tout $t \geq 0$.

Démonstration. (i): Pour tout $A \in \mathcal{F}_t$, on a

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[1_A\right] = \mathbb{E}_\mathbb{P}\left[1_A \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] = \mathbb{E}_\mathbb{P}\left[1_A\, \mathbb{E}_\mathbb{P}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t\right]\right].$$

Ainsi, par unicité de la dérivée de Radon-Nikodym, on a que p.s.,

$$D_t = \mathbb{E}_\mathbb{P}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t\right],$$

ce qui entraîne que le processus D est une $\mathbb{P}$-martingale continue fermée (par $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$) donc uniformément intégrable. On note dans la suite $D_\infty := d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$.
(ii): Si τ est un temps d'arrêt, alors pour tout $A \in \mathcal{F}_\tau$, on a par le théorème d'arrêt,

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[1_A\right] = \mathbb{E}_\mathbb{P}\left[1_A\, D_\infty\right] = \mathbb{E}_\mathbb{P}\left[1_A\, D_\tau\right],$$

d'où la conclusion puisque D_τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable.
(iii): Considérons le temps d'arrêt $\tau := \inf\{t \geq 0 : D_t = 0\}$. Par continuité, on a p.s. $D_\tau = 0$ sur $A := \{\tau < \infty\} \in \mathcal{F}_\tau$. Enfin, l'égalité $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_\mathbb{P}\left[1_A\, D_\tau\right]$ entraîne que $\mathbb{Q}(A) = 0$, donc que $\mathbb{P}(A) = 0$ par absolue continuité de $\mathbb{P}$ par rapport à $\mathbb{Q}$. ∎

Lemme 4.5.2. *Soit D une martingale locale strictement positive. Alors il existe une unique martingale locale L telle que*

$$D = \exp\left(L - \frac{1}{2}\left[L, L\right]\right) = \mathscr{E}(L).$$

De plus, le processus L est donné par la formule

$$L_t = \log(D_0) + \int_0^t \frac{dD_s}{D_s}, \quad t \geq 0.$$

Démonstration. L'unicité est une conséquence de la proposition 3.1.4. Pour l'existence, il suffit d'appliquer la formule d'Itô à la fonction logarithme, le processus D étant strictement positif. On remarquera qu'il est inutile de se fatiguer à calculer le crochet $[D, D]$ car L défini comme ci-dessus satisfait $d[L, L] = d[D, D]/D^2$. ∎

À présent, nous sommes en mesure d'énoncer le théorème de Girsanov.

Théorème 4.5.3 (Girsanov)**.** *Soit $\mathbb{Q}$ une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ sur la tribu $\mathcal{F}_\infty$. Considérons D la martingale (supposée continue) associée à $\mathbb{Q}$ par le lemme 4.5.1, ainsi que L la martingale locale associée à D par le lemme 4.5.2. Alors si M est une $\mathbb{P}$-martingale locale, le processus $\widetilde{M} := M - [M, L]$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale.*

Démonstration. Tout d'abord, montrons que si τ est un temps d'arrêt et si X est un processus continu adapté tel que $(XD)^\tau$ est une $\mathbb{P}$-martingale, alors X^τ est une $\mathbb{Q}$-martingale. Par le lemme 4.5.1, on a

$$\mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[|X_{t\wedge\tau}|\right] = \mathbb{E}_\mathbb{P}\left[|X_{t\wedge\tau}\, D_{t\wedge\tau}|\right] < \infty,$$

donc que $X_{t\wedge\tau} \in L^1(\mathbb{Q})$. Ensuite, soient $0 < s < t$ et $A \in \mathcal{F}_s$. Puisque $A \cap \{\tau > s\} \in \mathcal{F}_s$ (car τ est un temps d'arrêt), on a, en utilisant le fait que $(XD)^\tau$ est une $\mathbb{P}$-martingale,

$$\mathbb{E}_\mathbb{P}\left[1_{A\cap\{\tau>s\}}\, X_{t\wedge\tau}\, D_{t\wedge\tau}\right] = \mathbb{E}_\mathbb{P}\left[1_{A\cap\{\tau>s\}}\, X_{s\wedge\tau}\, D_{s\wedge\tau}\right].$$

Par le lemme 4.5.1,

$$D_{t\wedge\tau} = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_{t\wedge\tau} \quad \text{et} \quad D_{s\wedge\tau} = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_{s\wedge\tau},$$

et donc puisque $A \cap \{\tau > s\} \in \mathcal{F}_{s\wedge\tau} \subset \mathcal{F}_{t\wedge\tau}$ (utiliser $\mathcal{F}_{s\wedge\tau} = \mathcal{F}_s \cap \mathcal{F}_\tau$ et revenir à la définition de $\mathcal{F}_\tau$), il vient

$$\mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[1_{A\cap\{\tau>s\}}\, X_{t\wedge\tau}\right] = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[1_{A\cap\{\tau>s\}}\, X_{s\wedge\tau}\right].$$

D'autre part, il est immédiat que

$$\mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[1_{A\cap\{\tau\leq s\}}\, X_{t\wedge\tau}\right] = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[1_{A\cap\{\tau\leq s\}}\, X_{\tau}\right] = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[1_{A\cap\{\tau\leq s\}}\, X_{s\wedge\tau}\right],$$

d'où on en déduit que pour tout $A \in \mathcal{F}_s$,

$$\mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[1_A\, X_{t\wedge\tau}\right] = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[1_A\, X_{s\wedge\tau}\right],$$

c'est-à-dire que X^τ est une $\mathbb{Q}$-martingale.
Une conséquence de ce qui précède est que si XD est une $\mathbb{P}$-martingale locale, alors X est une $\mathbb{Q}$-martingale locale. Maintenant, si M est une $\mathbb{P}$-martingale locale, on applique ce qui précède avec $X = \widetilde{M}$, en remarquant que par la formule d'Itô, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{M}_t\, D_t &= \widetilde{M}_0\, D_0 + \int_0^t \widetilde{M}_s\, dD_s + \int_0^t D_s\, d\widetilde{M}_s + [\widetilde{M}, D]_t \\
&= M_0\, D_0 + \int_0^t \widetilde{M}_s\, dD_s + \int_0^t D_s\, dM_s - \int_0^t D_s\, d[M, L]_s + [M, D]_t \\
&= M_0\, D_0 + \int_0^t \widetilde{M}_s\, dD_s + \int_0^t D_s\, dM_s,
\end{aligned}$$

car $d[M, L] = d[M, D]/D$ d'après le lemme 4.5.2. On voit ainsi que $\widetilde{M}D$ est une $\mathbb{P}$-martingale locale, donc que $\widetilde{M}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale, ce qui termine la preuve. ■

Faisons quelques remarques sur ce résultat très important.

(i) Une $\mathbb{P}$-martingale locale M reste une $\mathbb{Q}$-semimartingale continue, dont la décomposition est

$$M = \widetilde{M} + [M, L].$$

On voit ainsi que la classe des $\mathbb{P}$-semimartingales continues est contenue dans celle des $\mathbb{Q}$-semimartingales continues. En fait, ces deux classes coïncident car $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ jouent des rôles symétriques dans le théorème de Girsanov. En effet, si l'on applique le théorème à $M = (-L)$, le processus $\widetilde{(-L)} = (-L) - [(-L), L]$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale avec $[\widetilde{(-L)}, \widetilde{(-L)}] = [L, L]$. D'où

$$\mathscr{E}(\widetilde{(-L)}) = \exp\left(\widetilde{(-L)} - \frac{1}{2}\,[\widetilde{(-L)}, \widetilde{(-L)}]\right) = \exp\left(-L + \frac{1}{2}\,[L, L]\right) = \frac{1}{\mathscr{E}(L)} = \frac{1}{D}.$$

Cela montre que l'on peut échanger les rôles de $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ quitte à remplacer D par $1/D$ et L par $\widetilde{(-L)}$.

(ii) Remarquons que la valeur du crochet est la même sous $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ (ceci a été implicitement utilisé pour déterminer le crochet de $\widetilde{(-L)}$) car il est toujours donné par l'approximation en probabilité des théorème 3.1.5 et proposition 3.2.2, respectivement.

(iii) L'application $\mathcal{T}_{\mathbb{P}\to\mathbb{Q}} : M \to \mathcal{T}_{\mathbb{P}\to\mathbb{Q}}(M) := \widetilde{M}$ est un opérateur linéaire de l'espace des martingales locales par rapport à $\mathbb{P}$ vers celui des martingales locales par rapport à $\mathbb{Q}$. On vérifie facilement que $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}\to\mathbb{P}} \circ \mathcal{T}_{\mathbb{P}\to\mathbb{Q}} = \mathrm{Id}$. De plus, l'opérateur $\mathcal{T}_{\mathbb{P}\to\mathbb{Q}}$ commute avec l'intégrale stochastique: si H est un processus localement borné, alors pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^t H_s\, d\mathcal{T}_{\mathbb{P}\to\mathbb{Q}}(M)_s &= \int_0^t H_s\, dM_s - \int_0^t H_s\, d[M, L]_s \\
&= \int_0^t H_s\, dM_s - \left[\int_0^\cdot H_s\, dM_s, L\right]_t \\
&= \mathcal{T}_{\mathbb{P}\to\mathbb{Q}}\left(\int_0^\cdot H_s\, dM_s\right)_t .
\end{aligned}$$

(iv) Enfin, mentionnons que le théorème de Girsanov reste vrai lorsque l'on remplace ∞ par un horizon fini $T > 0$, ce qui est souvent utilisé en pratique.

Finissons ce chapitre en appliquant le théorème de Girsanov au mouvement brownien. Soit H un processus satisfaisant la condition de Novikov :

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^\infty H_t^2\, dt\right)\right] < \infty.$$

En notant L l'intégrale stochastique de H par rapport à B, qui est une martingale uniformément intégrable, on peut montrer que $\mathscr{E}(L)$ l'est aussi (ardu). En particulier on a $\mathbb{E}\left[\mathscr{E}(L)_\infty\right] = \mathbb{E}\left[\mathscr{E}(L)_0\right] = 1$ et donc en définissant la probabilité $\mathbb{Q}$ comme $d\mathbb{Q} = \mathscr{E}(L)_\infty\, d\mathbb{P}$, le théorème de Girsanov entraîne que le processus $\widetilde{B}$ donné pour tout $t \geq 0$ par

$$\widetilde{B_t} := B_t - \left[B, \int_0^{\cdot} H_s \, dBs\right]_t = B_t - \int_0^t H_s \, d[B,B]_s = B_t - \int_0^t H_s \, ds,$$

est non seulement une martingale locale par rapport à $\mathbb{Q}$, mais aussi, en calculant son crochet, un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien par le théorème de Lévy.

Chapitre 5

Équations différentielles stochastiques

La plupart des processus continus importants en pratique satisfont une équation de la forme

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s,$$

ou sous une forme différentielle,

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t; \\ X_0 = x_0. \end{cases}$$

Comme nous l'avons vu avec la formule d'Itô dans le chapitre précédent, il existe un lien étroit entre la théorie des probabilités et celles plus anciennes des équations aux dérivées partielles, et ce type d'équations différentielles stochastiques (EDS) ci-dessus permet de passer de l'une à l'autre. Pour illustrer notre propos, nous allons d'abord introduire trois EDS classiques et montrer comment leurs solutions peuvent être trouvées par des méthodes simples. En revanche, dès que l'on complexifie un peu l'équation, comme dans le cas déterministe, il s'avère que ces méthodes de résolution ne sont plus accessibles et se posent alors les questions d'existence et d'unicité de ces solutions.

5.1 Trois exemples classiques

5.1.1 Le mouvement brownien géométrique

Commençons par une équation linéaire des plus connues:

$$\begin{cases} dX_t = \mu\, X_t\, dt + \sigma X_t\, dB_t; \\ X_0 = x_0 > 0; \end{cases}$$

où les constantes μ et σ sont dans $\mathbb{R}$ et $(0, \infty)$, respectivement. Pour résoudre cette EDS, nous allons utiliser la formule d'Itô et rechercher une solution de la forme $X_t = f(B_t, t)$.

On obtient alors:

$$dX_t = f_x(B_t,t)\,dB_t + \left(\frac{1}{2}\,f_{xx}(B_t,t) + f_t(B_t,t)\right)\,dt,$$

où f_x et f_t désignent les dérivées premières de f en espace et en temps, respectivement, et f_{xx} est la dérivée seconde en espace. Par identification des coefficients, on a:

$$\begin{cases} \mu\, f(x,t) = \frac{1}{2}\,f_{xx}(x,t) + f_t(x,t); \\ \sigma\, f(x,t) = f_x(x,t); \end{cases}$$

Une solution de la seconde équation est de la forme $f(x,t) = \exp(\sigma x + g(t))$, où g est une fonction arbitraire. Ainsi, en la réinjectant dans la première équation, on trouve que g doit satisfaire $g'(t) = \mu - \sigma^2/2$. Il en résulte alors qu'une solution de l'EDS est

$$X_t = x_0\,\exp\left(\sigma\,B_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\,t\right).$$

Pour le moment, nous devons admettre qu'il puisse y avoir d'autres solutions à cette EDS. On verra plus tard qu'en fait il s'agit de l'unique solution. Ce processus, appelé communément mouvement brownien géométrique, est l'un des plus utilisés dans le calcul stochastique, et en particulier en finance et en économie (c'est le fameux modèle de Black-Scholes). Concernant ce processus, on notera un étrange phénomène: on a $\mathbb{E}[X_t] = x_0\,e^{\mu t}$ tandis que comme p.s., $B_t/t \to 0$ lorsque $t \to \infty$, on montre que p.s., $X_t \to 0$ dans le cas où $\sigma^2 > 2\mu$: X_t tend p.s. vers 0 alors qu'en moyenne il tend vers l'infini très rapidement, à une vitesse exponentielle.

5.1.2 Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck

La méthode d'identification que l'on vient de proposer dans le cas du mouvement brownien géométrique est souvent efficace, mais elle peut très bien se révéler inutile pour des cas très simples, comme celui que nous allons regarder maintenant. L'EDS que l'on va considérer est la suivante:

$$\begin{cases} dX_t = -\alpha\,X_t\,dt + \sigma\,dB_t; \\ X_0 = x_0 \in \mathbb{R}; \end{cases}$$

où $\alpha, \sigma > 0$. Ce modèle a été introduit au début des années 30 par les physiciens Ornstein et Uhlenbeck lorsqu'ils ont étudié la théorie cinétique des gaz, et plus précisément le comportement en vitesse de ces molécules. Notons tout de même que cette équation était écrite légèrement différemment, "à la physicienne", car le calcul stochastique introduit par Itô n'est né que 10 ans après. Bien que la solution de cette EDS soit simple, comme nous allons le voir ultérieurement, elle n'est pas de la forme précédente $f(B_t,t)$ car elle dépend de toute la trajectoire du mouvement brownien jusqu'à l'instant t, et non seulement de B_t. Ainsi, pour appliquer la méthode d'identification précédente, on va la chercher sous la forme

$$X_t = a(t)\,\left(x_0 + \int_0^t b(s)\,dB_s\right),$$

où a et b sont des fonctions régulières à déterminer et $a(0) = 1$. En appliquant la formule d'Itô, ou plutôt la formule d'intégration par parties, on obtient:

$$dX_t = a'(t) \left(x_0 + \int_0^t b(s)\, dB_s \right) dt + a(t)b(t)\, dB_t.$$

Par ailleurs, si l'on suppose que $a(t) > 0$ pour tout $t > 0$, alors X est solution de l'EDS

$$\begin{cases} dX_t = \frac{a'(t)}{a(t)} X_t\, dt + a(t)b(t)\, dB_t; \\ X_0 = x_0 \in \mathbb{R}; \end{cases}$$

et en revenant à l'EDS initiale, on obtient les équations

$$\begin{cases} \frac{a'(t)}{a(t)} = -\alpha; \\ a(t)\, b(t) = \sigma. \end{cases}$$

Finalement, la solution de l'EDS est

$$X_t = x_0\, e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\, dB_s, \quad t \geq 0.$$

5.1.3 Le pont brownien

Considérons l'EDS suivante sur $[0, 1)$:

$$\begin{cases} dX_t = -\frac{X_t}{1-t}\, dt + dB_t; \\ X_0 = 0. \end{cases}$$

Par la méthode précédente, on obtient le système

$$\begin{cases} \frac{a'(t)}{a(t)} = -\frac{1}{1-t}; \\ a(t)\, b(t) = 1; \end{cases}$$

ce qui entraîne que la solution de cette équation est donnée par

$$X_t = (1-t) \int_0^t \frac{dB_s}{1-s}, \quad t \in [0, 1).$$

En utilisant la méthode que l'on a appliquée pour démontrer le théorème de Lévy au chapitre précédent (avec la filtration naturelle standard du mouvement brownien), on démontre aisément (exercice) que ce processus est gaussien centré et de fonction de covariance $K(s, t) = s\,(1-t)$ pour tous $0 \leq s \leq t < 1$ (utiliser l'isométrie d'Itô et l'indépendance des accroissements browniens). Comme il est continu sur $[0, 1)$, on montre (comme pour l'invariance du mouvement brownien par retournement du temps) que p.s., $X_t \to 0$ lorsque $t \to 1$. Ainsi, ce processus part de 0 et y revient p.s. au temps $t = 1$: on parle alors de pont brownien. Notons qu'il existe plusieurs représentations du pont brownien. En effet, nous pouvions tout à fait introduire ce processus autrement: par exemple, le processus $B_t - t\, B_1$ convient car il est gaussien, continu sur $[0, 1]$, centré et a la même fonction de covariance. Par contre, il diffère du premier car il n'est pas adapté par rapport à la filtration naturelle standard du mouvement brownien, alors que X l'est.

5.2 Théorème d'existence et d'unicité de la solution

Le but de cette dernière partie est d'énoncer et de démontrer le théorème d'existence et d'unicité des solutions des EDS du type de celle introduite en premier lieu dans ce chapitre. Il existe plusieurs notions d'existence et d'unicité pour les solutions d'EDS. Cependant, nous n'étudierons pas la notion de solution faible (pour l'unicité faible : toutes les solutions ont même loi), ni de solution forte (la solution est adaptée par rapport à la filtration standard du mouvement brownien sous-jacent), ni de l'interprétation markovienne de ce processus (ceci ferait l'objet d'un cours au moins aussi dense que celui-ci). Notons tout de même que le théorème de Yamada-Watanabe stipule que l'existence et l'unicité définies ci-dessous entraîne que la solution est en fait une solution forte.

Théorème 5.2.1. *Étant donné un horizon fini $T > 0$, considérons l'EDS suivante sur $[0, T]$:*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t; \\ X_0 = x_0. \end{cases}$$

Supposons les coefficients b et σ localement bornés en temps et lipschitziens en espace, i.e. pour tout $t \in [0, T]$,

$$|b(t, x) - b(t, y)|^2 + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 \leq K\, |x - y|^2. \tag{5.2.1}$$

Alors on a le résultat suivant :

(i) existence : il existe une solution X sur $[0, T]$ continue et adaptée, qui de plus est bornée dans L^2:

$$\sup_{t \in [0,T]} \mathbb{E}\left[X_t^2\right] < \infty.$$

(ii) unicité : si X et Y sont deux telles solutions de cette EDS (avec le même mouvement brownien et le même point initial), alors elles sont égales p.s., i.e.

$$\mathbb{P}\left(X_t = Y_t \quad \forall\, t \in [0, T]\right) = 1.$$

Avant de démontrer ce résultat, notons qu'il existe des généralisations à la dimension supérieure, où B est un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^m$, le processus solution X est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, σ est une fonction à valeurs dans l'ensemble des matrices réelles de taille $d \times m$, et enfin b est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Notons aussi que la condition initiale n'est supposée déterministe que pour simplifier, ceci pouvant être généralisé à une v.a. $\mathcal{F}_0-$mesurable, de carré intégrable et indépendante du mouvement brownien B. Par ailleurs, la conclusion de ce théorème reste valable dans le cadre d'hypothèses affaiblies. Par exemple b et σ peuvent être supposées localement lipschitziennes en espace et satisfaisant une condition de croissance linéaire convenable pour éviter une explosion en temps fini.

Pour attaquer la preuve du théorème, rappelons tout d'abord le lemme de Gronwall.

Lemme 5.2.2. *Soit $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction positive mesurable bornée. Supposons qu'il existe deux constantes $a, b \geq 0$ telles que pour tout $t \in [0,T]$,*

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s)\, ds.$$

Alors on a pour tout $t \in [0,T]$,

$$g(t) \leq a\, e^{bt}.$$

<u>*Démonstration*</u>. En itérant la condition sur g, on trouve que pour tout entier $n \geq 1$,

$$g(t) \leq a \sum_{k=0}^{n} \frac{(bt)^n}{n!} + b^{n+1} \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \cdots \int_0^{s_n} g(s_{n+1})\, ds_{n+1}.$$

Ainsi, g étant majorée par une constante A, on obtient que le reste intégral dans le terme de droite est majoré par $A(bt)^{n+1}/(n+1)!$ et donc tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. ∎

À présent, nous sommes en mesure de démontrer le théorème d'existence et d'unicité.

<u>*Démonstration*</u>. (*ii*) Unicité.
Soient X et Y deux solutions de l'EDS ci-dessus. Alors pour tout $t \in [0,T]$,

$$X_t - Y_t = \int_0^t \left(b(s, X_s) - b(s, Y_s)\right)\, ds + \int_0^t \left(\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)\right)\, dB_s.$$

Notons que les fonctions σ et b étant lipschitziennes et les processus X et Y bornés dans L^2 sur $[0,T]$, l'intégrale stochastique est bien définie, i.e. $\sigma(\cdot, X) - \sigma(\cdot, Y) \in \mathcal{H}^2(B,T)$. Ainsi, en utilisant successivement les inégalités $(u+v)^2 \leq 2\,(u^2+v^2)$ et de Cauchy-Schwarz, l'isométrie d'Itô et enfin l'inégalité (5.2.1), on obtient:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X_t - Y_t)^2\right] &\leq 2\,\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \left(b(s, X_s) - b(s, Y_s)\right)\, ds\right)^2\right] \\
&\quad +2\,\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \left(\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)\right)\, dB_s\right)^2\right] \\
&\leq 2t\,\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(b(s, X_s) - b(s, Y_s)\right)^2\, ds\right] \\
&\quad +2\,\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)\right)^2\, ds\right] \\
&\leq 2K\, \max\{T, 1\} \int_0^t \mathbb{E}\left[(X_s - Y_s)^2\right]\, ds.
\end{aligned}$$

D'où par le lemme de Gronwall appliqué avec $a = 0$, on obtient que $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$ pour tout $t \in [0,T]$. Enfin, comme

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t \quad \forall t \in [0,T] \cap \mathbb{Q}) = 1,$$

on obtient le résultat escompté en utilisant la continuité de ces deux processus.

(i) Existence.
Afin de démontrer l'existence d'une solution à l'EDS, nous allons utiliser une méthode qui est classique en théorie des équations différentielles ordinaires, l'itération de Picard. Ainsi, soit $X^{(0)} := x_0$ et définissons par récurrence la suite de processus $(X^{(n)})_{n\geq 0}$ par

$$X_t^{(n+1)} = x_0 + \int_0^t b(s, X_s^{(n)})\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)})\, dB_s, \quad t \in [0,T]. \tag{5.2.2}$$

Comme d'habitude, pour montrer que cette suite de processus converge vers une limite qui satisfait l'énoncé du théorème, on va montrer que p.s. elle est de Cauchy pour la norme uniforme sur $[0,T]$.
Tout d'abord, remarquons que l'itération donnée ci-dessus est bien définie. En effet, si $X^{(n)}$ est un processus continu, adapté et borné dans L^2 sur $[0,T]$, l'inégalité (5.2.1) ainsi que le fait que σ et b soient localement bornées en temps nous donnent facilement que $\sigma(\cdot, X^{(n)})$ et $b(\cdot, X^{(n)})$ sont bornés dans L^2 sur $[0,T]$ (et donc comme ils sont continus et adaptés, ils appartiennent à l'espace $\mathcal{H}^2(B,T)$). Ainsi, on obtient que $X^{(n+1)}$ est un processus continu, adapté et borné dans L^2 sur $[0,T]$. Et comme $X^{(0)} = x_0$ est trivialement continu, adapté et borné dans L^2 sur $[0,T]$, tous les processus $X^{(n)}$ le sont.
À présent, par la même méthode que celle utilisée pour l'unicité, où cette fois l'inégalité de Doob L^2 est invoquée pour contrôler le supremum, il n'est pas difficile de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}_*$ et tout $t \in [0,T]$,

$$g_n(t) \leq C \int_0^t g_{n-1}(s)\, ds,$$

où $C := 8K \max\{T, 1\}$ et

$$g_n(t) := \mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} |X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}|^2\right].$$

Ainsi, comme g_0 est majorée par une constante M sur $[0,T]$, alors en itérant l'inégalité ci-dessus comme dans la preuve du lemme de Gronwall, on obtient la borne

$$0 \leq g_n(T) \leq \frac{M(CT)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En sommant sur n et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{s\in[0,T]} |X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}|\right] \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{g_n(T)} < \infty,$$

donc que p.s.,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{s\in[0,T]} |X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}| < \infty.$$

Il en résulte que la suite de processus $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy p.s. pour la norme uniforme sur $[0,T]$: elle converge alors p.s. uniformément sur $[0,T]$ vers un processus adapté X continu sur $[0,T]$, satisfaisant pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$X_t = X_t^{(n)} + \sum_{k\geq n} (X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)}), \quad t\in[0,T].$$

En particulier, on a par l'inégalité triangulaire que

$$\begin{cases} \| \sup_{t\in[0,T]} |X_t - X_t^{(n)}| \|_{L^2} & \leq & \sum_{k\geq n} \sqrt{g_k(T)} & & \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} & 0; \\ \| \sup_{t\in[0,T]} |X_t| \|_{L^2} & \leq & |x_0| + \sum_{k\in\mathbb{N}} \sqrt{g_k(T)} & < & & \infty, \end{cases}$$

et donc X est borné dans L^2 sur $[0,T]$.
Maintenant, il reste à montrer que X vérifie bien l'EDS donnée ci-dessus. Notons que par ce qui précède et l'inégalité (5.2.1), on a que $b(\cdot,X)$ et $\sigma(\cdot,X)\in\mathcal{H}^2(B,T)$ et de plus,

$$\begin{cases} \|b(\cdot,X) - b(\cdot,X^{(n)})\|_{\mathcal{H}^2(B,T)} & \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} & 0; \\ \|\sigma(\cdot,X) - \sigma(\cdot,X^{(n)})\|_{\mathcal{H}^2(B,T)} & \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} & 0. \end{cases}$$

Ainsi, par l'isométrie d'Itô, on obtient pour tout $t\in[0,T]$:

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \left(\sigma(s,X_s) - \sigma(s,X_s^{(n)}) \right) dB_s \right)^2 \right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La convergence dans L^2 entraînant la convergence p.s. d'une sous-suite, alors pour tout $t\in[0,T]$, on a p.s.,

$$\begin{cases} \int_0^t b(s,X_s^{(n_k)})\, ds & \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} & \int_0^t b(s,X_s)\, ds; \\ \int_0^t \sigma(s,X_s^{(n_k)})\, dB_s & \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} & \int_0^t \sigma(s,X_s)\, dB_s, \end{cases}$$

d'où en remplaçant n par n_k dans l'identité (5.2.2) et en passant à la limite p.s. lorsque $k\to\infty$, on obtient pour tout $t\in[0,T]$, p.s.,

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s,X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)\, dB_s.$$

Enfin, en prenant $t\in[0,T]\cap\mathbb{Q}$ on peut intervertir avec le "p.s." et les deux membres de cette égalité étant continus sur $[0,T]$, on obtient le résultat désiré, à savoir

$$\mathbb{P}\left(X_t = x_0 + \int_0^t b(s,X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)\, dB_s \quad \forall t\in[0,T] \right) = 1.$$

La démonstration est achevée. ■

Annexe A

Examen du 3 février 2011

La durée de l'examen est de 3 heures. Seul le polycopié est autorisé lors de l'épreuve.
Vous pourrez considérer comme acquis tous les résultats démontrés en cours.
Le barème donné ci-dessous est approximatif.

Tout au long de cet examen, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité sur lequel est défini un mouvement brownien B sur $\mathbb{R}_+$, muni de sa filtration naturelle standard $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Exercice 1 - Temps d'atteinte du mouvement brownien (8 pts)

Dans cet exercice, on considère le temps d'arrêt suivant: pour tous $a, b > 0$,

$$T_{(-a,b)} := \inf\{t \geq 0 : B_t = -a \text{ ou } B_t = b\}.$$

1 - En faisant apparaître des accroissements browniens bien choisis, déterminez une constante $\varepsilon \in]0,1[$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}_*$,

$$\mathbb{P}(T_{(-a,b)} > n) \leq \varepsilon^n,$$

et déduisez-en que $T_{(-a,b)}$ est presque sûrement fini.
2 - Montrez que $\mathbb{E}[(T_{(-a,b)})^p] < \infty$ pour tout $p \in \mathbb{N}_*$.
3 - En utilisant une martingale arrêtée convenable, dont vous montrerez qu'elle est uniformément intégrable, vérifiez que

$$b\,\mathbb{P}(B_{T_{(-a,b)}} = b) = a\,\mathbb{P}(B_{T_{(-a,b)}} = -a).$$

4 - Déterminez les valeurs des deux probabilités précédentes.
5 - Montrez que le processus arrêté $(B^2_{t\wedge T_{(-a,b)}} - t \wedge T_{(-a,b)})_{t\geq 0}$ est une martingale uniformément intégrable, et déduisez-en l'espérance de $T_{(-a,b)}$.
6 - Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, considérons la fonction $f_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f_\theta(x) := \left(e^{\theta b} - e^{-\theta a}\right) e^{-\theta x} + \left(e^{\theta a} - e^{-\theta b}\right) e^{\theta x},$$

et introduisons le processus $M_t^{(\theta)} := f_\theta(B_t)\, e^{-\frac{\theta^2 t}{2}}$, $t \geq 0$. Montrez que le processus arrêté $(M^{(\theta)}_{t\wedge T_{(-a,b)}})_{t\geq 0}$ est une martingale uniformément intégrable.
7 - Montrez que la transformée de Laplace de $T_{(-a,b)}$ est donnée pour tout $\lambda > 0$ par

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda T_{(-a,b)}}\right] = \frac{\sinh(a\sqrt{2\lambda}) + \sinh(b\sqrt{2\lambda})}{\sinh((a+b)\sqrt{2\lambda})}.$$

8 - On considère dans cette dernière partie le temps d'arrêt unilatère (qui est fini presque sûrement d'après le cours):

$$T_a := \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}, \quad a \in \mathbb{R}_*.$$

Adaptez la méthode précédente pour montrer que sa transformée de Laplace est donnée pour tout $\lambda > 0$ par

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda T_a}\right] = e^{-|a|\sqrt{2\lambda}}.$$

Exercice 2 - Loi du supremum du mouvement brownien translaté (5 pts)

Étant donné un paramètre $\mu > 0$, on considère le processus X donné par

$$X_t := B_t - \mu t, \quad t \geq 0.$$

Il s'agit d'un mouvement brownien translaté ("drifté" selon la terminologie du cours). Le but de cet exercice est de déterminer la loi de

$$Z := \sup_{t\geq 0} X_t.$$

Pour un niveau a strictement positif, notons T_a^X le temps d'atteinte de a par X, i.e.

$$T_a^X := \inf\{t \geq 0 : X_t = a\}.$$

1 - Montrez que Z est presque sûrement fini.
2 - Soit $T > 0$ un horizon fini, fixé. Déterminez $\mathbb{Q}$ une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T$ et un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien $\widetilde{B}$ sur $[0,T]$ tels que pour tout $t \in [0,T]$,

$$\mathbb{P}\left(T_a^X \leq t\right) = \int_{\{T_a \leq t\}} \exp\left(-\mu \widetilde{B}_T - \frac{\mu^2 T}{2}\right) d\mathbb{Q},$$

où T_a désigne le temps d'atteinte de a par le mouvement brownien $\widetilde{B}$.
3 - Montrez que pour tout $t \in [0,T]$,

$$\mathbb{P}\left(T_a^X \leq t\right) = e^{-\mu a} \int_{\{T_a \leq t\}} \exp\left(-\frac{\mu^2 T_a}{2}\right) d\mathbb{Q}.$$

4 - En utilisant la question 8 de l'exercice 1, déterminez la loi de Z.

Exercice 3 - Convergence en loi du processus d'Ornstein-Uhlenbeck (7 pts)

Considérons l'équation différentielle stochastique réelle suivante:

$$\begin{cases} dX_t = \sqrt{2\alpha}\, dB_t - \alpha\, X_t\, dt, \quad t > 0; \\ X_0 = x \in \mathbb{R}; \end{cases}$$

où $\alpha > 0$. On reconnaît le processus d'Ornstein-Uhlenbeck vu en cours. Dans la suite, on notera X^x ce processus lorsqu'il est issu de x. On souhaite non seulement montrer qu'il converge en loi lorsque $t \to \infty$ vers une variable aléatoire à identifier, mais aussi connaître la vitesse de convergence (lorsque l'on se restreint à une certaine classe de fonctions).
1 - Pourquoi s'attend-on à ce que le processus "ne parte pas à l'infini" en temps long? 2 - Déterminez la loi de la variable aléatoire X_t^x pour tout $t > 0$ fixé.
3 - Montrez que ce processus converge en loi lorsque $t \to \infty$ vers une variable aléatoire Y dont on précisera la loi, notée μ.
4 - Pour un nombre $K > 0$, notons Lip_K l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornées et K-lipschitziennes sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire telles que pour tous $u, v \in \mathbb{R}$,

$$|f(u) - f(v)| \leq K\, |u - v|.$$

Pour tout $t \geq 0$ fixé, si $f \in \mathrm{Lip}_K$, montrez que la fonction $x \mapsto \mathbb{E}\left[f(X_t^x)\right]$ est dans un espace Lip_{K_t}, où K_t est une constante dépendant de t, que vous déterminerez.
5 - Montrez que l'identité suivante est satisfaite:

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[f(X_t^x)\right]\, \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mu(dx).$$

On dit alors que μ est une mesure invariante pour le processus.
6 - Établissez l'inégalité suivante:

$$\sup_{f \in \mathrm{Lip}_K} \left|\mathbb{E}\left[f(X_t^x)\right] - \mathbb{E}\left[f(Y)\right]\right| \leq K\, e^{-\alpha t}\, \mathbb{E}\left[|Y - x|\right], \quad t \geq 0.$$

Quelle est votre interprétation de ce résultat ?

Annexe B

Examen du 6 janvier 2012

La durée de l'examen est de 4 heures. Seul le polycopié est autorisé lors de l'épreuve.
Vous pourrez considérer comme acquis tous les résultats vus en cours.
Le barème donné ci-dessous est approximatif.

Tout au long de cet examen, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité sur lequel seront définis les processus, tous supposés adaptés par rapport à une filtration standard générique $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Exercice 1 - Récurrence/transience du mouvement brownien multidimensionnel (7,5 pts)

Considérons un mouvement brownien B à valeurs dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}^d, |\cdot|)$. Il est dit issu d'un point $x \in \mathbb{R}^d$ lorsqu'il s'agit d'un mouvement brownien standard translaté de x. On note alors $\mathbb{P}_x$ la probabilité sachant $B_0 = x$ et $\mathbb{E}_x$ l'espérance par rapport à $\mathbb{P}_x$. Étant donné $\alpha > 0$, le temps d'atteinte de α est le temps d'arrêt τ_α défini par

$$\tau_\alpha := \inf\{t \geq 0 : |B_t| = \alpha\} \quad \text{(avec la convention } \inf \emptyset = \infty).$$

On dit que le mouvement brownien est:
- récurrent si pour tout $r > 0$ et tout point initial $x \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant $|x| \geq r$, la probabilité $\mathbb{P}_x(\tau_r < \infty)$ vaut 1;
- transitoire sinon.

Pour étudier ces propriétés, nous allons considérer la couronne

$$A_{r,R} := \{x \in \mathbb{R}^d : r \leq |x| \leq R\}, \quad 0 < r < R,$$

ainsi que le temps d'arrêt $\tau := \tau_r \wedge \tau_R = \min\{\tau_r, \tau_R\}$.

Partie 1 - Le cas $d = 2$

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ la fonction définie par

$$f(x) := \log(|x|) = \log\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

1 - Dessinez sur l'intervalle $[0, \tau]$ une trajectoire typique du mouvement brownien bidimensionnel, partant d'un point x appartenant à l'intérieur de la couronne $A_{r,R}$.

2 - En comparant τ avec un temps d'atteinte bien choisi d'un mouvement brownien réel, montrez que $\mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1$ pour tout $x \in A_{r,R}$.

3 - Montrez que $\Delta f = 0$ sur $A_{r,R}$, où Δ est le laplacien sur $\mathbb{R}^2$: $\Delta := \partial^2_{x_1} + \partial^2_{x_2}$. On dit alors que f est harmonique sur la couronne $A_{r,R}$.

4 - Établissez l'égalité suivante: pour tout $x \in A_{r,R}$,

$$\mathbb{E}_x\left[f(B_\tau)\right] = \log(R) + (\log(r) - \log(R))\; \mathbb{P}_x\left(\tau_r < \tau_R\right).$$

5 - En utilisant la formule d'Itô, montrez que le processus M donné par

$$M_t = f(B_{t\wedge\tau}) - f(B_0), \quad t \geq 0,$$

est une martingale uniformément intégrable, et déduisez-en que

$$\mathbb{E}_x\left[f(B_\tau)\right] = f(x), \quad x \in A_{r,R}.$$

6 - Si l'on note $\tau_\infty := \lim_{R\to\infty} \tau_R$, vérifiez que $\mathbb{P}_x\left(\tau_\infty = \infty\right) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.

7 - Concluez sur la récurrence/transience du mouvement brownien bidimensionnel.

Partie 2 - Le cas $d \geq 3$

1 - En utilisant la même procédure que dans la partie 1, montrez que

$$\mathbb{P}_x\left(\tau_r < \infty\right) = \left(\frac{r}{|x|}\right)^{d-2}, \quad |x| \geq r.$$

Indication: considérez la fonction $f \in C^2(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ définie par $f(x) := |x|^{2-d}$.

2 - Que vous inspire la phrase suivante de Pólya: "a drunken man will always find his way home, but a drunken bird may not" ?

Exercice 2 - Déviation d'une fonctionnelle brownienne (5,5 pts)

Étant donnés un mouvement brownien réel standard B et f une fonction suffisamment régulière, l'objectif est contrôler la décroissance de la queue de la fonctionnelle brownienne centrée $f(B_T) - \mathbb{E}[f(B_T)]$, où $T > 0$ est un horizon fini.

1 - Soit H un processus adapté et borné par une constante $\kappa > 0$, i.e. $|H_t| \leq \kappa$ pour tout $t \geq 0$. Rappelez brièvement pourquoi le processus $M^{(\lambda)}$ défini pour tout $\lambda \geq 0$ par

$$M_t^{(\lambda)} := \exp\left(\lambda \int_0^t H_s\, dB_s - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t |H_s|^2\, ds\right), \quad t \geq 0,$$

est une surmartingale.

2 - En utilisant ce qui précède, montrez que pour tous réels positifs r, λ, t,

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t H_s \, dB_s > r\right) \leq \exp\left(-\lambda r + \frac{\lambda^2 \kappa^2 t}{2}\right).$$

3 - À présent, soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction bornée et dont les dérivées successives sont bornées. Soit $T > 0$ un horizon fini et notons $g : \mathbb{R} \times [0, T] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x,t) := \mathbb{E}\left[f(B_T) \mid B_t = x\right]$ (on rappelle qu'il ne s'agit là que d'une notation, le conditionnement par rapport à un événement de probabilité 0 étant interdit).
Montrez que la fonction g peut s'écrire sous la forme

$$g(x,t) = \int_{\mathbb{R}} f(u+x) \, \gamma_{t,T}(u) \, du,$$

où $\gamma_{t,T}$ est une certaine densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ à déterminer.
4 - En utilisant la formule d'Itô, établissez la relation suivante:

$$g(B_T, T) = g(0,0) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} f'(u + B_s) \, \gamma_{s,T}(u) \, du \, dB_s.$$

5 - Déduisez de tout ce qui précède que l'on a l'inégalité suivante, dite de déviation gaussienne (par rapport à la moyenne):

$$\mathbb{P}\left(f(B_T) - \mathbb{E}[f(B_T)] > r\right) \leq \exp\left(-\frac{r^2}{2(\kappa_f)^2 T}\right),$$

où $\kappa_f > 0$ est une constante à déterminer, qui dépend de la fonction f.

Exercice 3 - Temps d'atteinte de diffusions (7 pts)

Soit B un mouvement brownien réel standard et b et σ deux fonctions (localement) lipschitziennes sur $\mathbb{R}$. On considère le processus X solution de l'équation différentielle stochastique réelle

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s) \, dB_s + \int_0^t b(X_s) \, ds, \quad t \geq 0.$$

On note $\mathcal{L}$ l'opérateur différentiel du second ordre agissant sur les fonctions $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de la manière suivante:

$$\mathcal{L}f(x) := \frac{1}{2} \sigma(x)^2 \, \partial_x^2 f(x) + b(x) \, \partial_x f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Enfin, étant donnés deux réels $\alpha < \beta$ et $x \in [\alpha, \beta]$, on note le temps d'arrêt $\tau := \tau_\alpha \wedge \tau_\beta$ où $\tau_r := \inf\{t \geq 0 : X_t = r\}$, $\mathbb{P}_x$ la probabilité sachant $X_0 = x$ et enfin $\mathbb{E}_x$ l'espérance sous $\mathbb{P}_x$.

1 - Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $M^{(f)}$ le processus défini par

$$M_t^{(f)} := f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathcal{L}f(X_s)\, ds, \quad t \geq 0.$$

Montrez que $M^{(f)}$ est une martingale locale et donnez son expression sous la forme d'une intégrale stochastique.

2 - Déduisez-en pour tout $t \geq 0$ la formule suivante, dite formule de Dynkin:

$$\mathbb{E}_x \left[f(X_{t \wedge \tau}) \right] = f(x) + \mathbb{E}_x \left[\int_0^{t \wedge \tau} \mathcal{L}f(X_s)\, ds \right].$$

3 - Supposons qu'il existe une fonction $u \in C^2([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ telle que $\mathcal{L}u \leq -1$. Montrez que $\mathbb{E}_x[\tau] < \infty$.

4 - Dans la suite, on suppose qu'il existe une fonction $u \in C^2([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ telle que $\mathcal{L}u = -1$ et $u(\alpha) = u(\beta) = 0$. Montrez que $u(x) = \mathbb{E}_x[\tau]$.

5 - Si σ ne s'annule pas et si la dérive b est identiquement nulle, donnez l'expression de $\mathbb{E}_x[\tau]$ en fonction de σ.

6 - Sous les mêmes conditions, montrez que l'on a

$$\mathbb{P}_x \left(X_\tau = \alpha \right) = \frac{\beta - x}{\beta - \alpha} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_x \left(X_\tau = \beta \right) = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}.$$

7 - Dans le cas où $\sigma = 1$ et $b = 0$, c'est-à-dire lorsque X est le mouvement brownien issu de x, appliquez ce qui précède pour établir l'expression suivante:

$$\mathbb{E}_x[\tau] = (x - \alpha)(\beta - x).$$

8 - Comment procéderiez-vous pour déterminer les valeurs de $\mathbb{P}_x \left(X_\tau = \alpha \right)$ et $\mathbb{P}_x \left(X_\tau = \beta \right)$ lorsque σ et b sont quelconques ?

Bibliographie

[1] J. Jacod. Mouvement brownien et calcul stochastique. Cours de M2R, 2007-2008.

[2] I. Karatzas, S. Shreve. Brownian motion and stochastic calculus. Springer, 1987.

[3] J.F. Le Gall. Calcul stochastique et processus de Markov. Cours de M2R, 2010-2011.

[4] D. Revuz et M. Yor. Continuous martingales and Brownian motion. Springer, 1999.

[5] J.M. Steele. Stochastic calculus and financial applications. Springer, 2001.