Ensemble β-Laguerre et opérateur stochastique de Bessel

d'après Diffusion at the random matrix hard edge, Ramirez et Rider, 2008

Hugo Magaldi, CEREMADE

Journée des doctorants IMT MEGA, 23 Novembre 2020

Plan

Matrices de Wishart

$M_n = X_n X_n^\top$, X_n de taille $n \times p$, $x_{i,j} \sim \mathcal{N}(0,1)$ i.i.d

Mesure spectrale empirique : $\nu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{\lambda_k/n}$

Théorème

(Marchenko-Pastur, '67) Si $p/n \to \gamma \in (0,+\infty)$ alors, p.s, la suite de mesures aléatoires $(\nu_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement :

$$p.s., \forall\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \nu_n(B) \underset{n\to+\infty}{\to} \sigma_{MP,\gamma}(B)$$

où $\sigma_{MP,\gamma}$ a pour densité $\frac{1}{2\pi\gamma x}\sqrt{(\gamma_+ - x)(x-\gamma_-)}\ \mathbf{1}_{x\in[\gamma_-,\gamma_+]}$,

$$\gamma_- = (1-\sqrt{\gamma})^2, \gamma_+ = (1+\sqrt{\gamma})^2$$

Matrices de Wishart

$M_n = X_n X_n^\top$, X_n de taille $n \times p$, $x_{i,j} \sim \mathcal{N}(0,1)$ i.i.d

Mesure spectrale empirique : $\nu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{\lambda_k/n}$

Théorème

(Marchenko-Pastur, '67) Si $p/n \to \gamma \in (0,+\infty)$ alors, p.s, la suite de mesures aléatoires $(\nu_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement :

$$p.s., \forall\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \nu_n(B) \underset{n\to+\infty}{\to} \sigma_{MP,\gamma}(B)$$

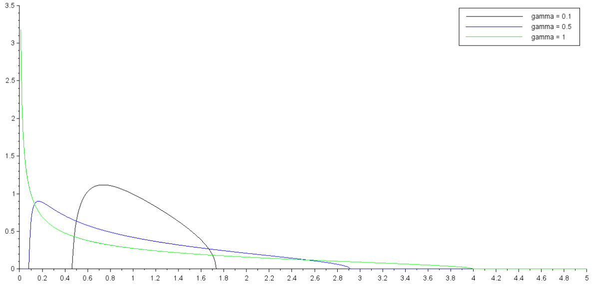
où $\sigma_{MP,\gamma}$ a pour densité $\frac{1}{2\pi\gamma x}\sqrt{(\gamma_+ - x)(x-\gamma_-)}\ \mathbf{1}_{x\in[\gamma_-,\gamma_+]}$,

$$\gamma_- = (1-\sqrt{\gamma})^2, \gamma_+ = (1+\sqrt{\gamma})^2$$

Densité jointe des v.p. $0 \leq \lambda_0^n \leq \ldots \leq \lambda_{n-1}^n$:

$$f_{n,p}(\lambda_0^n,\ldots,\lambda_{n-1}^n) = \frac{1}{Z_{n,p}}\prod_{k=0}^{n-1}\lambda_k^{\frac{1}{2}(p-n+1)-1}e^{-\frac{1}{2}\lambda_k}\prod_{i<j}|\lambda_i-\lambda_j|,$$

Bord dur, bord mou



Densité de la mesure de Marchenko-Pastur pour différentes valeurs du paramètre γ

Ensemble β-Laguerre

(Silverstein '85 puis Dumitriu et Edelman, 2002)

Pour $\beta > 0$ et $a \in \mathbb{N}^*$, on considère :

$$L^n_{\beta,a} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \begin{bmatrix} d_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & d_2 & b_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & d_{n-1} & b_{n-1} & \\ 0 & & & & d_n & \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,n+a}(\mathbb{R})$$

$d_1, \dots, d_n \sim \chi_{\beta(a+n+1-k)}$, $b_1, \dots, b_{n-1} \sim \chi_{\beta(n-k)}$ indépendantes

Ensemble β-Laguerre

(Silverstein '85 puis Dumitriu et Edelman, 2002)

Pour $\beta > 0$ et $a \in \mathbb{N}^*$, on considère :

$$L^n_{\beta,a} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \begin{bmatrix} d_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & d_2 & b_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & d_{n-1} & b_{n-1} & \\ 0 & & & & d_n & \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,n+a}(\mathbb{R})$$

$d_1, \dots, d_n \sim \chi_{\beta(a+n+1-k)}$, $b_1, \dots, b_{n-1} \sim \chi_{\beta(n-k)}$ indépendantes

Densité jointe des v.p. $0 \leq \lambda^n_0 \leq \dots \leq \lambda^n_{n-1}$ **de** $L^n_{\beta,a}(L^n_{\beta,a})^T$

$$f_{\beta,a}(\lambda^n_0, \dots, \lambda^n_{n-1}) = \frac{1}{Z_{n,\beta,a}} \prod_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{\frac{\beta}{2}(a+1)-1} e^{-\frac{\beta}{2}\lambda_k} \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta,$$

$\left(L^n_{\beta,a}(L^n_{\beta,a})^T\right)_{n\geq 1, \beta>0, a>-1}$ constitue l'**ensemble β-Laguerre**

Une famille de diffusions

Considérons la **famille de diffusions** $(p_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$:

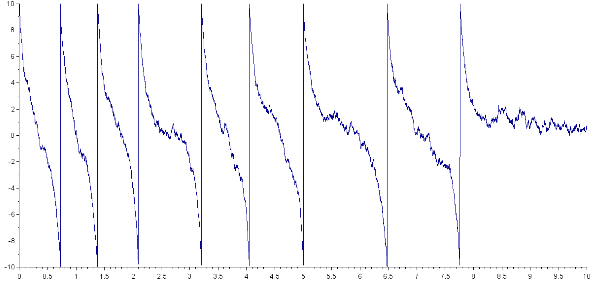
$$\begin{cases} dp_\lambda(x) = \left(x - \lambda - p_\lambda^2(x)\right)dx - \frac{2}{\sqrt{\beta}}db_x \\ p_\lambda(0) = +\infty \end{cases}$$

Une famille de diffusions

Considérons la **famille de diffusions** $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$:

$$\begin{cases} dp_\lambda(x) = \left(x - \lambda - p_\lambda^2(x)\right)dx - \frac{2}{\sqrt{\beta}}db_x \\ p_\lambda(0) = +\infty \end{cases}$$

Simulation de p_{10} pour $\beta = 1$:



La diffusion peut exploser vers $-\infty$ en un temps fini, auquel cas elle repart immédiatement $+\infty$

Une famille de diffusions

On a, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathbb{P}(\lambda_0^n < \lambda) \underset{n \to +\infty}{\to} \mathbb{P}(p_\lambda \text{ explose au moins une fois})}$$

Plus généralement, pour $k \in \mathbb{N}$ fixé :

$$\boxed{\mathbb{P}(\lambda_k^n < \lambda) \underset{n \to +\infty}{\to} \mathbb{P}(p_\lambda \text{ explose au moins } k+1 \text{ fois})}$$

Convergence spectrale vers l'opérateur stochastique de Bessel

Opérateur stochastique de Bessel

Definition

L'**Opérateur Stochastique de Bessel** $\mathcal{B}_{\beta,a}$ est défini sur $\{f \in L^2[0,1], f(1) = 0, \mathcal{B}_{\beta,a}(f)(0) = 0\}$ par :

$$\mathcal{B}_{\beta,a} = -\exp[(a+1)x + \frac{2}{\sqrt{\beta}} b_x] \frac{d}{dx} \Big\{ \exp[-ax - \frac{2}{\sqrt{\beta}} b_x] \frac{d}{dx} \Big\}$$

pour $a > -1, \beta > 0$ et avec b_x mouvement brownien

Opérateur stochastique de Bessel

Definition

L'**Opérateur Stochastique de Bessel** $\mathcal{B}_{\beta,a}$ est défini sur $\{f \in L^2[0,1], f(1) = 0, \mathcal{B}_{\beta,a}(f)(0) = 0\}$ par :

$$\mathcal{B}_{\beta,a} = -\exp[(a+1)x + \frac{2}{\sqrt{\beta}} b_x] \frac{d}{dx} \{ \exp[-ax - \frac{2}{\sqrt{\beta}} b_x] \frac{d}{dx} \}$$

pour $a > -1, \beta > 0$ et avec b_x mouvement brownien

Le problème de recherche des valeurs/vecteurs propres peut s'écrire à l'aide de l'opérateur inverse :

$$\mathcal{B}_{\beta,a} f = \lambda f \text{ ssi } f = \lambda \mathcal{B}_{\beta,a}^{-1} f, \text{ où}$$

$$(\mathcal{B}_{\beta,a}^{-1} f)(x) = \lambda \int_0^\infty \left(\int_0^{\min(x,y)} e^{az + \frac{2}{\sqrt{\beta}} b(z)} dz \right) f(y) m(dy)$$

$$m(dy) = e^{-(a+1)y - \frac{2}{\sqrt{\beta}} b(y)} dy$$

Opérateur stochastique de Bessel

Definition

L'**Opérateur Stochastique de Bessel** $\mathcal{B}_{\beta,a}$ est défini sur $\{f \in L^2[0,1], f(1) = 0, \mathcal{B}_{\beta,a}(f)(0) = 0\}$ par :

$$\mathcal{B}_{\beta,a} = -\exp[(a+1)x + \frac{2}{\sqrt{\beta}} b_x] \frac{d}{dx} \{ \exp[-ax - \frac{2}{\sqrt{\beta}} b_x] \frac{d}{dx} \}$$

pour $a > -1, \beta > 0$ et avec b_x mouvement brownien

Le problème de recherche des valeurs/vecteurs propres peut s'écrire à l'aide de l'opérateur inverse :

$$\mathcal{B}_{\beta,a} f = \lambda f \text{ ssi } f = \lambda \mathcal{B}_{\beta,a}^{-1} f, \text{ où}$$

$$(\mathcal{B}_{\beta,a}^{-1} f)(x) = \lambda \int_0^\infty (\int_0^{\min(x,y)} e^{az + \frac{2}{\sqrt{\beta}} b(z)} dz) f(y) m(dy)$$

$$m(dy) = e^{-(a+1)y - \frac{2}{\sqrt{\beta}} b(y)} dy$$

$\mathcal{B}_{\beta,a}^{-1}$ opérateur positif symétrique de $L^2[\mathbb{R}^+, m]$

Théorème de convergence

$0 < \lambda_0^n \leq \ldots \leq \lambda_{k-1}^n$ plus petites valeurs propres de $L_{\beta,a}^n (L_{\beta,a}^n)^T$

Théorème

(Ramirez et Rider, 2009) Presque sûrement, $\mathcal{B}_{\beta,a}$ a un spectre discret composé de valeurs propres simples $0 < \Lambda_0 < \Lambda_1 < \ldots$ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a la convergence jointe en loi :

$$\{n\lambda_0^n, n\lambda_1^n, \ldots, n\lambda_{k-1}^n\} \underset{n \to +\infty}{\Rightarrow} \{\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_{k-1}\}$$

Théorème de convergence

$0 < \lambda_0^n \leq \ldots \leq \lambda_{k-1}^n$ plus petites valeurs propres de $L_{\beta,a}^n (L_{\beta,a}^n)^T$

Théorème

(Ramirez et Rider, 2009) Presque sûrement, $\mathcal{B}_{\beta,a}$ a un spectre discret composé de valeurs propres simples $0 < \Lambda_0 < \Lambda_1 < \ldots$
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a la convergence jointe en loi :

$$\{n\lambda_0^n, n\lambda_1^n, \ldots, n\lambda_{k-1}^n\} \underset{n \to +\infty}{\Rightarrow} \{\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_{k-1}\}$$

Schéma de la preuve

- injection dans l'ensemble des opérateurs sur $L^2[0,1]$
- convergence de la suite d'opérateurs et des valeurs propres
- identification de l'opérateur stochastique de Bessel

Aparté : théorie des opérateurs

Soit K un opérateur sur l'espace hilbertien $L^2[0,1]$.

- si K est autoadjoint alors $\|K\| = \sup_{\|f\|_{L^2}=1} \langle f, Kf \rangle$
- K est dit Hilbert-Schmidt s'il existe une base hilbertienne $(e_n)_n$ telle que $\sum_n \|Ke_n\|^2$ converge
- Si K est un opérateur intégral de noyau $k \in L^2([0,1] \times [0,1])$ alors K est Hilbert-Schmidt et $\|K\|_{HS} = \|k\|_{L^2}$
- Un opérateur Hilbert-Schmidt est compact
- Si K est compact autoadjoint alors il admet une plus grande valeur propre $|\Lambda_0| = \|K\|$

De la matrice à l'opérateur

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_i = \frac{i}{n}$ pour $i = 0, 1, \dots n$. Pour $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'opérateur $\tilde{A}$ de $L^2[0,1]$:

$$(\tilde{A}f)(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx \text{ pour } x_{i-1} \le x < x_i.$$

De la matrice à l'opérateur

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_i = \frac{i}{n}$ pour $i = 0, 1, \dots n$. Pour $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'opérateur $\tilde{A}$ de $L^2[0,1]$:

$$(\tilde{A}f)(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx \text{ pour } x_{i-1} \leq x < x_i.$$

Si A est bidiagonale inférieure inversible alors A^{-1} est triangulaire inférieure et :

$$(A^{-1})_{i,j} = \frac{(-1)^{i+j}}{a_{i,i}} \prod_{k=j}^{i-1} \frac{a_{k+1,k}}{a_{k,k}} \text{ si } j < i$$

$$(A^{-1})_{i,i} = \frac{1}{a_{i,i}}$$

De la matrice à l'opérateur

Soit $M^n = SL^n_{\beta,a}S^{-1},\ S_{i,j} = (-1)^i\delta_{i+j-n-1}$

$$M^n = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\begin{bmatrix} \chi_{(a+1)\beta} & & & & & \\ -\tilde{\chi}_{\beta} & \chi_{(a+2)\beta} & & & & \\ & -\tilde{\chi}_{2\beta} & \chi_{(a+3)\beta} & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & -\tilde{\chi}_{(n-1)\beta} & \chi_{(a+n)\beta} \end{bmatrix}$$

De la matrice à l'opérateur

Soit $M^n = SL^n_{\beta,a}S^{-1},\ S_{i,j} = (-1)^i\delta_{i+j-n-1}$

$$M^n = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\begin{bmatrix} \chi_{(a+1)\beta} & & & & \\ -\tilde{\chi}_{\beta} & \chi_{(a+2)\beta} & & & \\ & -\tilde{\chi}_{2\beta} & \chi_{(a+3)\beta} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\tilde{\chi}_{(n-1)\beta} & \chi_{(a+n)\beta} \end{bmatrix}$$

$$((\sqrt{n}\tilde{M}^n)^{-1}f)(x) = \sum_{j=1}^{i} \frac{\sqrt{\beta n}}{\chi_{(i+a)\beta}} \prod_{k=j}^{i-1} \frac{\tilde{\chi}_{k\beta}}{\chi_{(k+a)\beta}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx$$

De la matrice à l'opérateur

Soit $M^n = SL^n_{\beta,a}S^{-1},\ S_{i,j} = (-1)^i \delta_{i+j-n-1}$

$$M^n = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \begin{bmatrix} \chi_{(a+1)\beta} & & & & \\ -\tilde{\chi}_\beta & \chi_{(a+2)\beta} & & & \\ & -\tilde{\chi}_{2\beta} & \chi_{(a+3)\beta} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\tilde{\chi}_{(n-1)\beta} & \chi_{(a+n)\beta} \end{bmatrix}$$

$$((\sqrt{n}\tilde{M}^n)^{-1}f)(x) = \sum_{j=1}^{i} \frac{\sqrt{\beta n}}{\chi_{(i+a)\beta}} \prod_{k=j}^{i-1} \frac{\tilde{\chi}_{k\beta}}{\chi_{(k+a)\beta}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx$$

M^n s'identifie donc à l'opérateur intégral K^n de noyau :

$$k^n(x,y) = \frac{\sqrt{\beta n}}{\chi_{(i+a)\beta}} \exp\{\sum_{k=j}^{i-1} \log \tilde{\chi}_{k\beta} - \log \chi_{(k+a)\beta}\} \mathbf{1}_{\mathbf{D}}(x,y)$$

où $\mathbf{1}_{\mathbf{D}}(x,y) = \mathbf{1}_{x_{i-1}\le x< x_i} \mathbf{1}_{x_{j-1}\le y< x_j} \mathbf{1}_{j\le i}$

Résultats intermédiaires

Lemme

Il existe un mouvement brownien b tel que, pour tout $x < y$ dans $(0,1]$:

$$\frac{\sqrt{\beta n}}{\chi_{(i+a)\beta}} \underset{n\to+\infty}{\Rightarrow} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\sum_{k=j}^{i-1} \log \tilde{\chi}_{k\beta} - \log \chi_{(k+a)\beta} \underset{n\to+\infty}{\Rightarrow} \frac{a}{2} \log \frac{y}{x} + \int_y^x \frac{db_z}{\sqrt{\beta z}}$$

Résultats intermédiaires

Lemme

Il existe un mouvement brownien b tel que, pour tout $x < y$ dans $(0,1]$:

$$\frac{\sqrt{\beta n}}{\chi_{(i+a)\beta}} \underset{n\to+\infty}{\Rightarrow} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\sum_{k=j}^{i-1} \log \tilde{\chi}_{k\beta} - \log \chi_{(k+a)\beta} \underset{n\to+\infty}{\Rightarrow} \frac{a}{2}\log\frac{y}{x} + \int_y^x \frac{db_z}{\sqrt{\beta z}}$$

Ceci permet d'identifier l'opérateur limite K. Quand $n \to +\infty$, k^n devrait approcher k défini par :

$$k(x,y) = x^{-\frac{1+a}{2}} \exp\Big[\int_y^x \frac{db_z}{\sqrt{\beta z}}\Big] y^{\frac{a}{2}} \mathbf{1}_{y<x}$$

Résultats intermédiaires

Lemme

K est presque-sûrement Hilbert-Schmidt. Il existe un espace de probabilité sur lequel K et tous les $K^n, n \in \mathbb{N}^*$ sont définis. Sur cet espace, toute suite extraite de $(K^n)_n$ admet une sous-suite qui converge vers K en norme Hilbert-Schmidt :

$$\lim_{n' \to \infty} \int_0^1 \int_0^1 |k^{n'}(x,y)(\omega) - k(x,y)(\omega)|^2 dx\ dy = 0 \ p.s$$

Convergence des valeurs propres

$$\begin{aligned} n\lambda_0^n &= \inf_{\|v\|_{l_2}=1} \langle v, nM^n (M^n)^T v\rangle \\ &= \Big(\sup_{\|v\|_{l_2}=1} \langle v, (nM^n(M^n)^T)^{-1} v\rangle \Big)^{-1} \\ &= \Big(\sup_{\|f\|_{L^2}=1} \langle f, (K^n)^T K^n f\rangle \Big)^{-1} \end{aligned}$$

Convergence des valeurs propres

$$
\begin{aligned}
n\lambda_0^n &= \inf_{\|v\|_{l_2}=1} \langle v, nM^n (M^n)^T v \rangle \\
&= \Big(\sup_{\|v\|_{l_2}=1} \langle v, (nM^n (M^n)^T)^{-1} v \rangle \Big)^{-1} \\
&= \Big(\sup_{\|f\|_{L^2}=1} \langle f, (K^n)^T K^n f \rangle \Big)^{-1}
\end{aligned}
$$

On rappelle que :

$$
(\tilde{A}f)(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx \text{ pour } x_{i-1} \leq x < x_i .
$$

Convergence des valeurs propres

$$\begin{aligned} n\lambda_0^n &= \inf_{\|v\|_{l_2}=1} \langle v, nM^n(M^n)^T v\rangle \\ &= \Big(\sup_{\|v\|_{l_2}=1} \langle v, (nM^n(M^n)^T)^{-1} v\rangle\Big)^{-1} \\ &= \Big(\sup_{\|f\|_{L^2}=1} \langle f, (K^n)^T K^n f\rangle\Big)^{-1} \end{aligned}$$

On rappelle que :

$$(\tilde{A}f)(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx \text{ pour } x_{i-1} \le x < x_i.$$

Ainsi $n\lambda_0^n = \|(K^n)^T K^n\|^{-1}$.

Convergence des valeurs propres

K (resp. K^n) est autoadjoint compact positif dont admet une plus grande valeur propre $1/\Lambda_0$ (resp. $1/\Lambda_0^n$).

Convergence des valeurs propres

K (resp. K^n) est autoadjoint compact positif dont admet une plus grande valeur propre $1/\Lambda_0$ (resp. $1/\Lambda_0^n$).

Pour toute suite $n \uparrow \infty$, le Lemme 2 montre l'existence d'une suite extraite n' telle que $(K^{n'})^T K^{n'}$ converge fortement vers $K^T K$.

Convergence des valeurs propres

K (resp. K^n) est autoadjoint compact positif dont admet une plus grande valeur propre $1/\Lambda_0$ (resp. $1/\Lambda_0^n$).

Pour toute suite $n \uparrow \infty$, le Lemme 2 montre l'existence d'une suite extraite n' telle que $(K^{n'})^T K^{n'}$ converge fortement vers $K^T K$.

Ainsi $\Lambda_0^{n'} \underset{n \to +\infty}{\to} \Lambda_0$ i.e $n' \lambda_0^{n'} \underset{n \to +\infty}{\to} \Lambda_0$.

Convergence des valeurs propres

K (resp. K^n) est autoadjoint compact positif dont admet une plus grande valeur propre $1/\Lambda_0$ (resp. $1/\Lambda_0^n$).

Pour toute suite $n \uparrow \infty$, le Lemme 2 montre l'existence d'une suite extraite n' telle que $(K^{n'})^T K^{n'}$ converge fortement vers $K^T K$.

Ainsi $\Lambda_0^{n'} \underset{n\to+\infty}{\to} \Lambda_0$ i.e $n'\lambda_0^{n'} \underset{n\to+\infty}{\to} \Lambda_0$.

La suite $(n\lambda_0^n)_{n\geq 1}$ converge vers son unique v.a Λ_0.

Convergence des valeurs propres

K (resp. K^n) est autoadjoint compact positif dont admet une plus grande valeur propre $1/\Lambda_0$ (resp. $1/\Lambda_0^n$).

Pour toute suite $n \uparrow \infty$, le Lemme 2 montre l'existence d'une suite extraite n' telle que $(K^{n'})^T K^{n'}$ converge fortement vers $K^T K$.

Ainsi $\Lambda_0^{n'} \underset{n \to +\infty}{\to} \Lambda_0$ i.e $n' \lambda_0^{n'} \underset{n \to +\infty}{\to} \Lambda_0$.

La suite $(n\lambda_0^n)_{n \geq 1}$ converge vers son unique v.a Λ_0.

Soit f_n (resp. f) v.p unitaire associé à $1/\Lambda_0^n$ (resp. $1/\Lambda_0$).

La projection de $(K^{n'})^T K^{n'}$ sur le complémentaire orthogonal de $f_{n'}$ converge vers fortement vers celle de $K^T K$ sur le complémentaire orthogonal de f.

La suite $(n\lambda_1^n)_{n \geq 1}$ converge vers son unique v.a Λ_1.

Transformée de Riccati

Transformée de Riccati

Le problème aux valeurs propres $\psi_\lambda = \lambda \mathcal{B}_{\beta,a}^{-1} \psi_\lambda$ s'écrit sous forme intégrale :

$$\psi_\lambda(x) = \lambda \int_0^\infty \int_0^{\min(x,y)} s(dz) \psi_\lambda(y) m(dy)$$

$$\text{i.e } \psi_\lambda(x) = \lambda \int_0^\infty \Big(\int_0^{\min(x,y)} \exp[az + \frac{2}{\sqrt{\beta}} b(z)] dz \Big) \psi_\lambda(y) \exp[-(a+1)y - \frac{2}{\sqrt{\beta}} b(y)] dy$$

Transformée de Riccati

Le problème aux valeurs propres $\psi_\lambda = \lambda \mathcal{B}_{\beta,a}^{-1} \psi_\lambda$ s'écrit sous forme intégrale :

$$\psi_\lambda(x) = \lambda \int_0^\infty \int_0^{\min(x,y)} s(dz)\psi_\lambda(y)m(dy)$$

$$\text{i.e } \psi_\lambda(x) = \lambda \int_0^\infty \Big(\int_0^{\min(x,y)} \exp[az + \frac{2}{\sqrt{\beta}} b(z)]dz \Big) \psi_\lambda(y) \exp[-(a+1)y - \frac{2}{\sqrt{\beta}} b(y)]dy$$

ψ_λ est $\mathcal{C}^{\frac{3}{2}-}$ et vérifie le système différentiel :

$$d\psi_\lambda^{'}(x) = \frac{2}{\sqrt{\beta}} \psi_\lambda^{'}(x) db(x) + \Big((a + \frac{2}{\beta}) \psi_\lambda^{'}(x) - \lambda e^{-x} \psi_\lambda(x) \Big) dx$$

$$d\psi_\lambda(x) = \psi_\lambda^{'}(x) dx$$

$\rightarrow$ unique processus de Markov pour toute paire $(\psi_\lambda(0), \psi_\lambda^{'}(0))$

Transformée de Riccati

Transformée de Riccati : $p_\lambda(x) = \frac{\psi'_\lambda(x)}{\psi_\lambda(x)}$ sur $\{\psi_\lambda \neq 0\}$

$$dp_\lambda(x) = \frac{2}{\sqrt{\beta}} p(x) db(x) + ((a + \frac{2}{\beta}) p(x) - p^2(x) - \lambda e^{-x}) dx$$

Transformée de Riccati

Transformée de Riccati : $p_\lambda(x) = \frac{\psi_\lambda'(x)}{\psi_\lambda(x)}$ sur $\{\psi_\lambda \neq 0\}$

$$dp_\lambda(x) = \frac{2}{\sqrt{\beta}} p(x) db(x) + ((a + \frac{2}{\beta}) p(x) - p^2(x) - \lambda e^{-x}) dx$$

Diffusion initialisée en $p_\lambda(0) = +\infty$ et recommencée en $+\infty$ après chaque explosion en $-\infty$

Transformée de Riccati

Transformée de Riccati : $p_\lambda(x) = \frac{\psi_\lambda'(x)}{\psi_\lambda(x)}$ sur $\{\psi_\lambda \neq 0\}$

$$dp_\lambda(x) = \frac{2}{\sqrt{\beta}} p(x) db(x) + ((a + \frac{2}{\beta}) p(x) - p^2(x) - \lambda e^{-x}) dx$$

Diffusion initialisée en $p_\lambda(0) = +\infty$ et recommencée en $+\infty$ après chaque explosion en $-\infty$

Théorème

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, on a l'égalité des événements :

$$\{\Lambda_0 > \lambda\} = \{p_\lambda \textit{ n'explose pas sur } \mathbb{R}^+\}$$
$$\{\Lambda_k > \lambda\} = \{p_\lambda \textit{ explose au plus } k \textit{ fois sur } \mathbb{R}^+\}$$

Transformée de Riccati

$\mathcal{B}_{\beta,a}^{L}$ opérateur restreint à $[0, L]$ avec conditions de Dirichlet.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\psi_\lambda^0(x)$ solution du système différentiel avec $\psi_\lambda^0(0) = 0$ et $(\psi_\lambda^0)'(0) = 1$.

$\tilde{\Lambda}$ est valeur propre de $\mathcal{B}_{\beta,a}^{L}$ si et seulement si $\psi_{\tilde{\Lambda}}^0(L) = 0$.

Transformée de Riccati

$\mathcal{B}^L_{\beta,a}$ opérateur restreint à $[0, L]$ avec conditions de Dirichlet.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\psi^0_\lambda(x)$ solution du système différentiel avec $\psi^0_\lambda(0) = 0$ et $(\psi^0_\lambda)'(0) = 1$.

$\tilde{\Lambda}$ est valeur propre de $\mathcal{B}^L_{\beta,a}$ si et seulement si $\psi^0_{\tilde{\Lambda}}(L) = 0$.

$$\boxed{\text{Si } \psi^0_\lambda(x) > 0 \text{ pour } 0 < x \leq L \text{ alors } \Lambda^L_0 > \lambda.}$$

Transformée de Riccati

$\mathcal{B}^L_{\beta,a}$ opérateur restreint à $[0, L]$ avec conditions de Dirichlet.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\psi^0_\lambda(x)$ solution du système différentiel avec $\psi^0_\lambda(0) = 0$ et $(\psi^0_\lambda)'(0) = 1$.

$\tilde{\Lambda}$ est valeur propre de $\mathcal{B}^L_{\beta,a}$ si et seulement si $\psi^0_{\tilde{\Lambda}}(L) = 0$.

$$\boxed{\text{Si } \psi^0_\lambda(x) > 0 \text{ pour } 0 < x \leq L \text{ alors } \Lambda^L_0 > \lambda.}$$

D'où l'égalité :

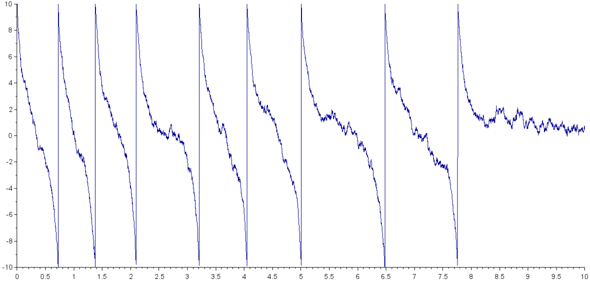
$$\{\Lambda^L_0 > \lambda\} = \{\psi^0_\lambda \text{ ne s'annule pas sur }]0, L]\}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\{\Lambda^L_k > \lambda\} = \{\psi^0_\lambda \text{ s'annule au plus k fois sur }]0, L]\}$$

Transformée de Riccati

Simulation de p_{10} pour $\beta = 1$:



Sur cet événement, on a $\Lambda_7 \leq 10 < \Lambda_8$.

Merci !