Correction exercice 11

1 Cacul de I_1

L'erreur faite en cours a été de considérer la fonction $f(z) = \dfrac{z^2\cos(az)}{1+z^2}$ comme on s'en est rendu compte c'est une mauvaise idée. Il faut en faite de considérer la fonction

$$f(z) = \frac{z^2 e^{iaz}}{1+z^4}$$

On garde le contour vu en cours, les valeurs des pôles et des résidus restent inchangées. En appliquant le théorèmes des résidus on obtient

$$\int_{-R}^{R} \frac{x^2 e^{iax}}{1+x^4}dx + \int_0^{\Pi} \frac{R^2 e^{2i\theta} e^{iaRe^{i\theta}}}{1+R^4 e^{4i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta = 2i\pi\left(\mathrm{res}(f,z_1)+\mathrm{res}(f,z_2)\right).$$

La première intégrale se décompose en partie réelle et imaginaire

$$\int_{-R}^{R} \frac{x^2 e^{iax}}{1+x^4}dx = \int_{-R}^{R} \frac{x^2\cos(ax)}{1+x^4}dx + i\int_{-R}^{R} \frac{x^2\sin(ax)}{1+x^4}dx.$$

Pour la seconde intégrale (lorsque $a>0$ [1]

$$\| \int_0^{\Pi} \frac{R^2 e^{2i\theta} e^{iaRe^{i\theta}}}{1+R^4 e^{4i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta| \leqslant= \int_0^{\Pi} \frac{R^3 |e^{iaRe^{i\theta}}|}{|1+R^4 e^{4i\theta}|} d\theta$$

Regardons le terme $|e^{iaRe^{i\theta}}|$

$$|e^{iaRe^{i\theta}}| = e^{-aR\sin\theta}$$

Maintenant ce terme ne pose plus de problème et en procédant comme dans la preuve du lemme de Jordan on obtient que

$$\lim_{R\to\infty} |\int_0^{\Pi} \frac{R^2 e^{2i\theta} e^{iaRe^{i\theta}}}{1+R^4 e^{4i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta| = 0$$

Finalement nous avons

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\cos(ax)}{1+x^4}dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\sin(ax)}{1+x^4}dx = 2i\pi\left(\mathrm{res}(f,z_1)+\mathrm{res}(f,z_2)\right).$$

1. si $a<0$ on fait pareil mais on change de contour, on prend le demi cercle du bas

De plus par un calcul élémentaire

$$2i\pi\left(\mathrm{res}(f,z_1)+\mathrm{res}(f,z_2)\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\cos(a\sqrt{2})-\sin(a\sqrt{2})\right).$$

On en déduit que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\cos(ax)}{1+x^4}dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\cos(a\sqrt{2})-\sin(a\sqrt{2})\right)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\sin(ax)}{1+x^4}dx=0$$

2 Cacul de I_2

L'erreur faite en cours a été de considérer la fonction $f(z)=\dfrac{\sin(z)}{z}$ comme on s'en est rendu compte c'est une mauvaise idée. Il faut en faite de considérer la fonction

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$$

Maintenant f a une vraie singularit 'e en 0. On contourne la singularité et on considère le contour dessiner dans le poly juste au dessus de l'exo 11. Sur ce contour évitent 0 f est holomorphe donc

$$\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz}}{z}dz$$

En a ppliquant Jordan on voit que l'intégrale sur Γ_R tend vers 0. Cependant on ne peut pas appliquer Jordan sur γ_ε lorsque ε tend vers 0. On va donc procéder différement. Quitte à développer e^{iz} en série entière il est facile de voir que

$$f(z)=\frac{1}{z}+h(z)$$

où h est une fonction holomorphe sur C donc

$$\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{1}{z}dz+\int_{\gamma_\varepsilon}h(z)dz$$

L'intégrale en h tend vers 0 lorsque ε tend vers 0 (utiliser la Proposition 4.1.1 page 72). l'opposé du double de l'intégrale $\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{1}{z}dz$ a eté calculé dans l'exemple 3.2.1 et valait $2i\pi$. Finalement en faisant tendre ε vers 0 et R vers $+\infty$ on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx=i\pi=0$$

On en déduit que

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$