Ejercicios y simulación I

Ejercicio 1. *Sean* $\mathcal{X} = (X_1, X_2, X_3)$ *variables aleatorias independientes con distribución* $\mathcal{N}(0,1)$ *y cuatro numéros reales* a_1, a_2, a_3, a_4*. Definimos la funcion* G

$$G(X_1, X_2, X_3) = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_1X_2.$$

1. *Parte teórica*

   (a) *Caso* $a_3 = a_4 = 0$.
   Hacer la demostración que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G(\mathcal{X})|X_1) &= a_1X_1, \\
\mathbb{E}(G(\mathcal{X})|X_2) &= a_2X_2 \\
\mathbb{E}(G(\mathcal{X})|X_3) &= 0, \\
\mathbb{E}(G(\mathcal{X})|X_1, X_2) &= a_1X_1 + a_2X_2, \\
\mathbb{E}(G(\mathcal{X})|X_1, X_3) &= a_1X_1 \\
\mathbb{E}(G(\mathcal{X})|X_2, X_3) &= a_2X_2
\end{aligned}$$

   y calcular $S^1,\ S^2,\ S^3,\ S^{1,2},\ S^{1,3},\ S^{2,3},\ S^{1,2,3}$

   (b) *Demostrar que en el caso general*

$$\begin{aligned}
S^1 &= \frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}, \\
S^2 &= \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}, \\
S^3 &= \frac{a_3^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}, \\
S^{1,2} &= \frac{a_1^2 + a^2 + a_4^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}.
\end{aligned}$$

2. *Parte práctica:*

   (a) *Utilizando el metodo Pick-freeze construir un programa (python) que permite obtener un estimador de los diferentes índices.*

   (b) *Comparar numéricamente los dos estimadores construidos con el métode pick freeze*

   (c) *Ilustrar la convergencia débil de los estimadores y calculra una estimación de la varianza límite para los dos estimadores.*

Ejercicio 2 (La funcion de Ishigami)**.** *El modelo de Ishigami es definido por*

$$Y = G(X_1, X_2, X_3) = \sin X_1 + 7\sin^2 X_2 + 0.1X_3^4 \sin X_1 \tag{1}$$

donde $(X_j)_{j=1,2,3}$ *son variables aleatorias independientes de ley uniforme sobre* $[-\pi; \pi]$.

1. *Demostrar que*

$$S^1 = 0.3139, \quad S^2 = 0.4424, \quad S^3 = 0.$$

2. *Supongamos que no sabemos calcular el valor teórica de* $S^{1,2}$ *y de* S^3*. Pero queremos saber si* $S^{1,2} > S^3$.

   (a) *Utilizando el método Pick-freeze construir un programa (python) que permite obtener los estimadores* $\left(S_n^{1,2}, S_n^3\right)$ *de* $\left(S^{1,2}, S^3\right)$.

   (b) *Utilizando el teorema del método delta sabemos que*

   $$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix} S_n^{1,2} \\ S_n^3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S^{1,2} \\ S^3 \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\Gamma).$$

   ¿Cual es la matriz de covarianza Γ*?*

   (c) *Construir un programa que da un estimadore de* Γ

   (d) *Construir una prueba de hipótesis estadística con nivel de significancia* $\alpha = 5/100$ *de* $H_0 : S^{1,2} \leqslant S^3$ *contra* $H_1 : S^{1,2 >} S^3$.

Ejercicio 3 (Sobol G-funcion (**))**.** *Sea* $X_1, \ldots, X_d$ *variables aleatorias independiente con distribución uniforme sobre* $[0,1]$*. Considera los números reales* $a_1, \ldots, a_d$*, la función* G *de Sobol está definida por*

$$Y = g_{sobol}(X_1, \ldots, X_d) = \prod_{k=1}^{d} g_k(X_k) \tag{2}$$

con $g_k(X_k) = \frac{|4X_k - 2| + a_k}{1 + a_k}$.
Calcula y estima S^i *para* $i \in \{1, \ldots, d\}$*. Ilustrar la convergencia débil de los estimadores y calculra una estimación de la varianza límite para los dos estimadores.*

Ejercicio 4. *Mostrar que el estimador* S_N^u *de un índice de Sobol es invariante si reemplazamos los* Y *por* $Y - c$ *donde* c *es una constante.*

Ejercicio 5. *La fórmula de Bréguet permite de calcular el consumo de combustible de un avión en función de differentes variables:*

$$M_{fuel} = M\left(e^{\frac{SFC \cdot g \cdot Ra}{V \cdot F}10^{-3}} - 1\right). \tag{3}$$

Variables fijas

- M *: = peso del avión*
- g *: la constante de gravitación universal,*
- Ra *: Range = distancia recorrida*

Entradas incertas

- V *: Cruise speed = velocidad del avión*
- F *: Lift-to-drag ratio = coeficiente aerodinámico*
- SFC *: Specific Fuel Consumption = calidad del motor*

Elegimos las distribuciones de V*,* F *y* SFC *con la ayuda de los ingenieros*

variable	distribucion	parámetro
V	*Uniforme*	(V_{min}, V_{max})
F	*Beta*	$(7, 2, F_{min}, F_{max})$
SFC	$\theta_2\, e^{-\theta_2(u-\theta_1)}\, \mathbb{1}_{[\theta_1,+\infty[}$	$\theta_1 = 17.23, \theta_2 = 3.45$

El fabricante de aviones quiere saber si él necesita mejorar la geometría de su avión o el motor. Por eso se pregunta si $S^{SFC} \geqslant S^F$*. Construir una prueba de hipótesis estadística con nivel de significancia* $\alpha = 5/100$ *de* $H_0 :\ S^{SFC} \geqslant S^F$ *contra* $H_1 :\ S^{SFC} \leq S^F$.

variable	valor nominal	min	max
V	**231**	226	234
F	**19**	18.7	19.05

Ejercicio 6. *Sea* $Y = X_1 + X_2$ *con* X_1 *y* X_2 *independientes de distribución uniforme sobre* $[0, 1]$. *Calcula* S^1 *y la desigualdad de concentración de typo Bennett.*

Ejercicio 7. *(**)*
Sea

$$Y = \exp\{X_1 + 2X_2\}, \tag{4}$$

donde X_1 *y* X_2 *independientes con distribúcion* $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. *Mostrar que*

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{10\pi y}} e^{-(\ln y)^2/10} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y) \quad \textit{and} \quad F_Y(y) = \Phi\left(\frac{\ln y}{\sqrt{5}}\right),$$

   donde

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt/\sqrt{2\pi}.$$

2. *Mostrar que los índices de Cramér-von Mises* $S^1_{2,CVM}$ *y* $S^2_{2,CVM}$ *valen*

$$S^1_{2,CVM} = \frac{6}{\pi} \arctan 2 - 2 \approx 0.1145$$
$$S^2_{2,CVM} = \frac{6}{\pi} \arctan \sqrt{19} - 2 \approx 0.5693.$$

3. *Escribe un programa que estima* $S^1_{2,CVM}$ *y* $S^2_{2,CVM}$.