Inégalité de Poincaré : à l'intersection des probabilités, des équations aux dérivées partielles et de la géometrie

Kevin Tanguy

Université Toulouse Paul Sabatier

04 Mai 2017

Plan de l'exposé

- Inégalité de Poincaré
- Interpolation par semi groupe.
- Γ et Γ_2.
- Un peu de géométrie
- Minoration de Lichnerowicz

Inégalité de Poincaré

Qu'appelle-t-on une inégalité de Poincaré ?

$D \subset \mathbb{R}^n$ domaine convexe borné, f régulière

$D \subset \mathbb{R}^n$ domaine convexe borné, f régulière

$$\kappa_D \left[\int_D f^2 dx - \left(\int_D f dx \right)^2 \right] \leq \int_D |\nabla f|^2 dx$$

$D \subset \mathbb{R}^n$ domaine convexe borné, f régulière

$$\kappa_D \left[\int_D f^2 dx - \left(\int_D f dx \right)^2 \right] \leq \int_D |\nabla f|^2 dx$$

σ mesure uniforme $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, f régulière

$D \subset \mathbb{R}^n$ domaine convexe borné, f régulière

$$\kappa_D \left[\int_D f^2 dx - \left(\int_D f dx \right)^2 \right] \leq \int_D |\nabla f|^2 dx$$

σ mesure uniforme $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, f régulière

$$n \left[\int_{\mathbb{S}^n} f^2 d\sigma - \left(\int_{\mathbb{S}^n} f d\sigma \right)^2 \right] \leq \int_{\mathbb{S}^n} |\nabla f|^2 d\sigma$$

$D \subset \mathbb{R}^n$ domaine convexe borné, f régulière

$$\kappa_D \left[\int_D f^2 dx - \left(\int_D f dx \right)^2 \right] \leq \int_D |\nabla f|^2 dx$$

σ mesure uniforme $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, f régulière

$$n \left[\int_{\mathbb{S}^n} f^2 d\sigma - \left(\int_{\mathbb{S}^n} f d\sigma \right)^2 \right] \leq \int_{\mathbb{S}^n} |\nabla f|^2 d\sigma$$

$d\gamma(x) = \frac{e^{-|x|^2}}{(2\pi)^{n/2}} dx$ mesure Gaussienne $\mathbb{R}^n$, f régulière

$D \subset \mathbb{R}^n$ domaine convexe borné, f régulière

$$\kappa_D \left[\int_D f^2 dx - \left(\int_D f dx \right)^2 \right] \leq \int_D |\nabla f|^2 dx$$

σ mesure uniforme $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, f régulière

$$n \left[\int_{\mathbb{S}^n} f^2 d\sigma - \left(\int_{\mathbb{S}^n} f d\sigma \right)^2 \right] \leq \int_{\mathbb{S}^n} |\nabla f|^2 d\sigma$$

$d\gamma(x) = \frac{e^{-|x|^2}}{(2\pi)^{n/2}} dx$ mesure Gaussienne $\mathbb{R}^n$, f régulière

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\gamma - \left(\int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma \right)^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 \mathrm{d}\gamma$$

Dans la littérature, plusieurs désignations différentes :

Dans la littérature, plusieurs désignations différentes :

1. Inégalité Poincaré + condition au bord : Ω ouvert borné, $v \in H_0^1(\Omega)$ espace de Sobolev (inconnu de Poincaré),

Dans la littérature, plusieurs désignations différentes :

1. Inégalité Poincaré + condition au bord : Ω ouvert borné, $v \in H_0^1(\Omega)$ espace de Sobolev (inconnu de Poincaré),

$$\int_\Omega |v(x)|^2 \mathrm{d}x \leq C \int_\Omega |v'(x)|^2 \mathrm{d}x,$$

$C > 0$.

Dans la littérature, plusieurs désignations différentes :

1. Inégalité Poincaré + condition au bord : Ω ouvert borné, $v \in H^1_0(\Omega)$ espace de Sobolev (inconnu de Poincaré),
$$\int_\Omega |v(x)|^2 \mathrm{d}x \leq C \int_\Omega |v'(x)|^2 \mathrm{d}x,$$
$C > 0$.
2. Inégalité de Poincaré-Wirtinger : Ω ouvert, régulier, convexe, $v \in H^1(\Omega)$

Dans la littérature, plusieurs désignations différentes :

1. Inégalité Poincaré + condition au bord : Ω ouvert borné, $v \in H_0^1(\Omega)$ espace de Sobolev (inconnu de Poincaré),

$$\int_\Omega |v(x)|^2 \mathrm{d}x \leq C \int_\Omega |v'(x)|^2 \mathrm{d}x,$$

$C > 0$.

2. Inégalité de Poincaré-Wirtinger : Ω ouvert, régulier, convexe, $v \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega |v(x)|^2 \mathrm{d}x - \Big(\int_\Omega v(x) \mathrm{d}x \Big)^2 \leq C \int_\Omega |v'(x)|^2 \mathrm{d}x,$$

$C > 0$.

Historiquement démonstration polynômes orthogonaux.
$D = [0,1]$ f périodique ($f(0) = f(1)$) et $\int_{[0,1]} f dx = 0$

Historiquement démonstration polynômes orthogonaux.
$D = [0,1]$ f périodique ($f(0) = f(1)$) et $\int_{[0,1]} f dx = 0$

$$f(x) = \sum_{m \geq 1} a_m \cos(2\pi m x) + b_m \sin(2\pi m x)$$

Historiquement démonstration polynômes orthogonaux.
$D = [0,1]$ f périodique ($f(0) = f(1)$) et $\int_{[0,1]} f dx = 0$

$$f(x) = \sum_{m \geq 1} a_m \cos(2\pi m x) + b_m \sin(2\pi m x)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[0,1]} f^2 dx = \sum_{m \geq 1} (a_m^2 + b_m^2)$$

Historiquement démonstration polynômes orthogonaux.
$D = [0,1]$ f périodique ($f(0) = f(1)$) et $\int_{[0,1]} f dx = 0$

$$f(x) = \sum_{m \geq 1} a_m \cos(2\pi mx) + b_m \sin(2\pi mx)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[0,1]} f^2 dx = \sum_{m \geq 1} (a_m^2 + b_m^2)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[0,1]} f'^2 dx = \sum_{m \geq 1} 4\pi^2 m(a_m^2 + b_m^2)$$

Historiquement démonstration polynômes orthogonaux.
$D = [0,1]$ f périodique ($f(0) = f(1)$) et $\int_{[0,1]} f dx = 0$

$$f(x) = \sum_{m \geq 1} a_m \cos(2\pi m x) + b_m \sin(2\pi m x)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[0,1]} f^2 dx = \sum_{m \geq 1} (a_m^2 + b_m^2)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[0,1]} f'^2 dx = \sum_{m \geq 1} 4\pi^2 m (a_m^2 + b_m^2)$$

$$4\pi^2 \int_{[0,1]} f^2 dx \leq \int_{[0,1]} f'^2 dx$$

Historiquement démonstration polynômes orthogonaux.
$D = [0,1]$ f périodique ($f(0) = f(1)$) et $\int_{[0,1]} f dx = 0$

$$f(x) = \sum_{m \geq 1} a_m \cos(2\pi m x) + b_m \sin(2\pi m x)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[0,1]} f^2 dx = \sum_{m \geq 1} (a_m^2 + b_m^2)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[0,1]} f'^2 dx = \sum_{m \geq 1} 4\pi^2 m (a_m^2 + b_m^2)$$

$$4\pi^2 \int_{[0,1]} f^2 dx \leq \int_{[0,1]} f'^2 dx$$

Remarque : démonstration ok pour sphère (harmoniques sphériques),

Historiquement démonstration polynômes orthogonaux.
$D = [0,1]$ f périodique ($f(0) = f(1)$) et $\int_{[0,1]} f dx = 0$

$$f(x) = \sum_{m \geq 1} a_m \cos(2\pi m x) + b_m \sin(2\pi m x)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[0,1]} f^2 dx = \sum_{m \geq 1} (a_m^2 + b_m^2)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[0,1]} f'^2 dx = \sum_{m \geq 1} 4\pi^2 m (a_m^2 + b_m^2)$$

$$4\pi^2 \int_{[0,1]} f^2 dx \leq \int_{[0,1]} f'^2 dx$$

Remarque : démonstration ok pour sphère (harmoniques sphériques),ok pour Gaussienne (polynômes Hermite).

- Lien problème isopérimétrique dans $\mathbb{R}^2$

- Lien problème isopérimétrique dans $\mathbb{R}^2$
- Vitesse de convergence de processus ergodique.

- Lien problème isopérimétrique dans $\mathbb{R}^2$
- Vitesse de convergence de processus ergodique.
- Existence, unicité solution variationelle.

- Lien problème isopérimétrique dans $\mathbb{R}^2$
- Vitesse de convergence de processus ergodique.
- Existence, unicité solution variationelle.
- ...

- Approche dynamique : démonstrations unifiées ?

- Approche dynamique : démonstrations unifiées ?

- Outils géométriques/analytiques ?

Exemple Gaussien

Equation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = f \end{cases}$$

Exemple Gaussien

Equation de la chaleur

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u = \Delta u & \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = f & \end{array} \right.$$

Solutions :

$$\begin{aligned} P_t f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-|x-t|^2/4t} \frac{dy}{(4\pi)^{n/2}} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x + \sqrt{2t} y) d\gamma(y) \\ &= \mathbb{E}[f(x + B_t)] \end{aligned}$$

$(B_t)_{t \geq 0}$ mouvement brownien.

Exemple Gaussien

Equation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = f \end{cases}$$

Solutions :

$$\begin{aligned} P_t f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-|x-t|^2/4t} \frac{dy}{(4\pi)^{n/2}} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+\sqrt{2t}y)d\gamma(y) \\ &= \mathbb{E}[f(x+B_t)] \end{aligned}$$

$(B_t)_{t\geq 0}$ mouvement brownien.

Rappels : $P_0 = Id$ et $P_{t+s} = P_t \circ P_s$.

Interpolation

$$P_t(f^2) - (P_t f)^2 \quad = \quad \int_0^t \frac{d}{ds} P_s\big((P_{t-s} f)^2\big)\, ds$$

Interpolation

$$\begin{aligned} P_t(f^2) - (P_t f)^2 &= \int_0^t \frac{d}{ds} P_s\big((P_{t-s}f)^2\big)\,ds \\ &= 2\int_0^t P_s\big(|\nabla\ P_{t-s}f|^2\big)\,ds \end{aligned}$$

Interpolation

$$P_t(f^2) - (P_t f)^2 = \int_0^t \frac{d}{ds} P_s\big((P_{t-s} f)^2\big)\, ds$$
$$= 2\int_0^t P_s\big(|\nabla\ P_{t-s} f|^2\big)\, ds$$

$$\nabla P_u f = P_u \nabla f, \quad u \geq 0$$

Interpolation

$$
\begin{aligned}
P_t(f^2) - (P_t f)^2 &= \int_0^t \frac{d}{ds} P_s\big((P_{t-s} f)^2\big)\, ds \\
&= 2 \int_0^t P_s\big(|\nabla\, P_{t-s} f|^2\big)\, ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla P_u f &= P_u \nabla f, \quad u \geq 0 \\
|\nabla P_u f|^2 &\leq P_u\big(|\nabla f|^2\big), \quad u \geq 0 \quad \text{(Jensen)}
\end{aligned}
$$

Interpolation

$$\begin{aligned} P_t(f^2) - (P_t f)^2 &= \int_0^t \frac{d}{ds} P_s\big((P_{t-s} f)^2\big)\,ds \\ &= 2\int_0^t P_s\big(|\nabla\ P_{t-s} f|^2\big)\,ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla P_u f &= P_u \nabla f, \quad u \geq 0 \\ |\nabla P_u f|^2 &\leq P_u\big(|\nabla f|^2\big), \quad u \geq 0 \quad \text{(Jensen)} \end{aligned}$$

$$P_t(f^2) - (P_t f)^2 \leq 2\int_0^t P_s(P_{t-s}(|\nabla f|^2))\,ds$$

Interpolation

$$P_t(f^2) - (P_t f)^2 = \int_0^t \frac{d}{ds} P_s\big((P_{t-s} f)^2\big)\, ds$$
$$= 2 \int_0^t P_s\big(|\nabla\, P_{t-s} f|^2\big)\, ds$$

$$\nabla P_u f = P_u \nabla f, \quad u \geq 0$$
$$|\nabla P_u f|^2 \leq P_u\big(|\nabla f|^2\big), \quad u \geq 0 \quad \text{(Jensen)}$$

$$P_t(f^2) - (P_t f)^2 \leq 2 \int_0^t P_s(P_{t-s}(|\nabla f|^2))ds = 2 \int_0^t P_t(|\nabla f|^2) ds$$

Interpolation

$$
\begin{aligned}
P_t(f^2) - (P_t f)^2 &= \int_0^t \frac{d}{ds} P_s\big((P_{t-s} f)^2\big)\, ds \\
&= 2\int_0^t P_s\big(|\nabla\ P_{t-s} f|^2\big)\, ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla P_u f &= P_u \nabla f, \quad u \geq 0 \\
|\nabla P_u f|^2 &\leq P_u\big(|\nabla f|^2\big), \quad u \geq 0 \quad \text{(Jensen)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_t(f^2) - (P_t f)^2 &\leq 2\int_0^t P_s(P_{t-s}(|\nabla f|^2))ds = 2\int_0^t P_t(|\nabla f|^2)ds \\
&\leq 2t P_t(|\nabla f|^2)
\end{aligned}
$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$

$$P_t(f^2) - (P_t f)^2 \leq 2t P_t(|\nabla f|^2)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$

$$P_t(f^2) - (P_t f)^2 \leq 2tP_t(|\nabla f|^2)$$

$t = 1/2$ et $x = 0$ donne

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\gamma - \left(\int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma \right)^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma$$

Rappel :

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x + \sqrt{2t} y) d\gamma(y)$$

Autre EDP ?

Autre EDP ?

Equation de Fokker-Planck (probabiliste)

$$\begin{cases} \partial_t u = Lu & \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = f & \end{cases}$$

avec $L = \Delta - x \cdot \nabla$

Autre EDP ?

Equation de Fokker-Planck (probabiliste)

$$\begin{cases} \partial_t u = Lu & \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = f \end{cases}$$

avec $L = \Delta - x \cdot \nabla$

Solutions :

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y) d\gamma(y)$$

(Ornstein-Uhlenbeck)

Autre EDP ?

Equation de Fokker-Planck (probabiliste)

$$\begin{cases} \partial_t u = Lu & \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = f \end{cases}$$

avec $L = \Delta - x \cdot \nabla$

Solutions :

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y) d\gamma(y)$$

(Ornstein-Uhlenbeck)

$$\begin{aligned} \nabla P_u &= e^{-u} P_u \nabla \quad \forall u > 0 \\ |\nabla P_u f|^2 &\leq e^{-2u} P_u\big(|\nabla f|^2\big) \quad \text{(Jensen)} \end{aligned}$$

Même démonstration.

Même démonstration.

$$\begin{aligned} P_t(f^2) - (P_t f)^2 &\leq 2\int_0^t e^{-2(t-s)} P_t(|\nabla f|^2) ds \\ &= (1 - e^{-2t}) P_t(|\nabla f^2|) \end{aligned}$$

Même démonstration.

$$\begin{aligned} P_t(f^2) - (P_t f)^2 &\leq 2\int_0^t e^{-2(t-s)} P_t(|\nabla f|^2) ds \\ &= (1 - e^{-2t}) P_t(|\nabla f^2|) \end{aligned}$$

$t \to \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\gamma - \left(\int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma \right)^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma$$

Rappel : $P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y) d\gamma(y)$.

Γ et Γ_2

$\mathcal{L}$ opérateur différentiel,

Γ et Γ_2

$\mathcal{L}$ opérateur différentiel, semi-groupe $P_t = e^{t\mathcal{L}}$

$$\partial_t u = \mathcal{L}u.$$

Γ et Γ_2

$\mathcal{L}$ opérateur différentiel, semi-groupe $P_t = e^{t\mathcal{L}}$

$$\partial_t u = \mathcal{L}u.$$

$$2\Gamma(f,g) = \mathcal{L}fg - f\mathcal{L}f - g\mathcal{L}f$$

Γ et Γ_2

$\mathcal{L}$ opérateur différentiel, semi-groupe $P_t = e^{t\mathcal{L}}$

$$\partial_t u = \mathcal{L}u.$$

$$2\Gamma(f,g) = \mathcal{L}fg - f\mathcal{L}f - g\mathcal{L}f$$

$$2\Gamma_2(f,g) = \mathcal{L}\Gamma(f,g) - \Gamma(f,\mathcal{L}) - \Gamma(g,\mathcal{L}f)$$

Γ et Γ_2

$\mathcal{L}$ opérateur différentiel, semi-groupe $P_t = e^{t\mathcal{L}}$

$$\partial_t u = \mathcal{L}u.$$

$$2\Gamma(f,g) = \mathcal{L}fg - f\mathcal{L}f - g\mathcal{L}f$$

$$2\Gamma_2(f,g) = \mathcal{L}\Gamma(f,g) - \Gamma(f,\mathcal{L}) - \Gamma(g,\mathcal{L}f)$$

Notations : $\Gamma(f) = \Gamma(f,f)$ et $\Gamma_2(f) = \Gamma_2(f,f)$

Exemples

Exemples $\mathcal{L} = \Delta$ ou $\mathcal{L} = L = \Delta - x \cdot \nabla$.

Exemples $\mathcal{L} = \Delta$ ou $\mathcal{L} = L = \Delta - x \cdot \nabla$.

$$\Gamma(f) = |\nabla f|^2$$

Exemples $\mathcal{L} = \Delta$ ou $\mathcal{L} = L = \Delta - x \cdot \nabla$.

$$\Gamma(f) = |\nabla f|^2$$

$$\Gamma_2^{\Delta}(f) = \|\mathrm{Hess} f\|_2^2$$

Exemples $\mathcal{L} = \Delta$ ou $\mathcal{L} = L = \Delta - x \cdot \nabla$.

$$\Gamma(f) = |\nabla f|^2$$

$$\Gamma_2^{\Delta}(f) = \|\mathrm{Hess} f\|_2^2 + (0|\nabla f|^2)$$

Exemples $\mathcal{L} = \Delta$ ou $\mathcal{L} = L = \Delta - x \cdot \nabla$.

$$\Gamma(f) = |\nabla f|^2$$

$$\Gamma_2^{\Delta}(f) = \|\mathrm{Hess} f\|_2^2 + (0|\nabla f|^2)$$

$$\Gamma_2^{L}(f) = \|\mathrm{Hess} f\|_2^2 + |\nabla f|^2$$

Exemples $\mathcal{L} = \Delta$ ou $\mathcal{L} = L = \Delta - x \cdot \nabla$.

$$\Gamma(f) = |\nabla f|^2$$

$$\Gamma_2^{\Delta}(f) = \|\mathrm{Hess} f\|_2^2 + (0|\nabla f|^2)$$

$$\Gamma_2^{L}(f) = \|\mathrm{Hess} f\|_2^2 + |\nabla f|^2 = \|\mathrm{Hess} f\|_2^2 + < \mathrm{Id}\nabla f, \nabla f >$$

Plus généralement, V potentiel convexe

Plus généralement, V potentiel convexe ($\mathrm{Hess}\, V \geq \rho \geq 0$)

Plus généralement, V potentiel convexe ($\mathrm{Hess}\, V \geq \rho \geq 0$)

$$L_V = \Delta - \nabla V \cdot \nabla \quad \text{et} \quad d\mu = e^{-V(x)} \frac{dx}{Z}$$

Plus généralement, V potentiel convexe ($\mathrm{Hess}\, V \geq \rho \geq 0$)

$$L_V = \Delta - \nabla V \cdot \nabla \quad \text{et} \quad d\mu = e^{-V(x)} \frac{dx}{Z}$$

$$\Gamma(f) = |\nabla f|^2$$

Plus généralement, V potentiel convexe ($\mathrm{Hess} V \geq \rho \geq 0$)

$$L_V = \Delta - \nabla V \cdot \nabla \quad \text{et} \quad d\mu = e^{-V(x)} \frac{dx}{Z}$$

$$\Gamma(f) = |\nabla f|^2$$

$$\Gamma_2^V(f) = \|\mathrm{Hess} f\|_2^2 + < \mathrm{Hess} V \nabla f, \nabla f >$$

Plus généralement, V potentiel convexe ($\mathrm{Hess} V \geq \rho \geq 0$)

$$L_V = \Delta - \nabla V \cdot \nabla \quad \text{et} \quad d\mu = e^{-V(x)} \frac{dx}{Z}$$

$$\Gamma(f) = |\nabla f|^2$$

$$\Gamma_2^V(f) = \|\mathrm{Hess} f\|_2^2 + < \mathrm{Hess} V \nabla f, \nabla f >$$

Remarque : semi-groupe non explicite !

Mimétisme ?

$$
\begin{aligned}
P_t(f^2) - (P_t f)^2 &= \int_0^t \frac{d}{ds} P_s\big((P_{t-s} f)^2\big)\, ds \\
&= 2 \int_0^t P_s\big(|\nabla\ P_{t-s} f|^2\big)\, ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla P_u f &= P_u \nabla f, \quad u > 0 \\
|\nabla P_u f|^2 &\leq P_u\big(|\nabla f|^2\big), \quad u > 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_t(f^2) - (P_t f)^2 &\leq 2 \int_0^t P_s(P_{t-s}(|\nabla f|^2))ds = 2\int_0^t P_t(|\nabla f|^2)ds \\
&\leq 2t P_t(|\nabla f|^2)
\end{aligned}
$$

Liens avec l'interpolation

Notons $\psi(s) = P_s\big((P_{t-s}f)^2\big)$

Liens avec l'interpolation

Notons $\psi(s) = P_s\big((P_{t-s}f)^2\big)$

Interpolation

$$\psi(t) - \psi(0) = P_t(f^2) - (P_t f)^2 = \int_0^t \psi'(s)ds$$

Liens avec l'interpolation

Notons $\psi(s) = P_s\big((P_{t-s}f)^2\big)$

Interpolation

$$\psi(t) - \psi(0) = P_t(f^2) - (P_t f)^2 = \int_0^t \psi'(s)ds$$

Γ calculus

$$\psi'(s) = 2P_s\big(\Gamma(P_{t-s}f)\big)$$

Liens avec l'interpolation

Notons $\psi(s) = P_s\big((P_{t-s}f)^2\big)$

Interpolation

$$\psi(t) - \psi(0) = P_t(f^2) - (P_t f)^2 = \int_0^t \psi'(s)ds$$

Γ calculus

$$\psi'(s) = 2P_s\big(\Gamma(P_{t-s}f)\big)$$

$$\Gamma(P_u f) \leq c(u)P_u\big(\Gamma(f)\big)? \quad u > 0$$

$s \mapsto \psi'(s)$ croissante ?

$$\psi''(s) = 2P_s\big(\Gamma_2(P_{t-s}f)\big)$$

$$\psi''(s) = 2P_s\big(\Gamma_2(P_{t-s}f)\big)$$

$$\Gamma_2 \geq 0? \quad (\Rightarrow \psi'' \geq 0)$$

$$\psi''(s) = 2P_s\big(\Gamma_2(P_{t-s}f)\big)$$

$$\Gamma_2 \geq 0? \quad (\Rightarrow \psi'' \geq 0)$$

Plus précisement, on a

Commutation [Bakry-Émery]

$$\Gamma(P_u f) \leq e^{-2\rho u} P_u(\Gamma f) \iff \Gamma_2 \geq \rho\Gamma, \quad \rho \in \mathbb{R}$$

$\mathcal{L} = \Delta$, mouvement Brownien

Observons le directement.

$\mathcal{L} = \Delta$, mouvement Brownien

Observons le directement.

$$\Gamma_2^{\Delta}(f) = \|\mathrm{Hess} f\|_2^2 + 0|\nabla f|^2$$

$\mathcal{L} = \Delta$, mouvement Brownien

Observons le directement.

$$\Gamma_2^{\Delta}(f) = \|\mathrm{Hess} f\|_2^2 + 0|\nabla f|^2 \geq 0|\nabla f|^2$$

$\mathcal{L} = \Delta$, mouvement Brownien

Observons le directement.

$$\Gamma_2^{\Delta}(f) = \|\mathrm{Hess} f\|_2^2 + 0|\nabla f|^2 \geq 0|\nabla f|^2$$

$$\Gamma(P_t f) \leq e^0 P_t(\Gamma f)$$

$\mathcal{L} = \Delta$, mouvement Brownien

Observons le directement.

$$\Gamma_2^{\Delta}(f) = \|\mathrm{Hess} f\|_2^2 + 0|\nabla f|^2 \geq 0|\nabla f|^2$$

$$\Gamma(P_t f) \leq e^0 P_t(\Gamma f) \quad \iff |\nabla P_t f|^2 \leq P_t\big(|\nabla f|^2\big)$$

$\mathcal{L} = L$, Ornstein-Uhlenbeck

$$\Gamma_2^L(f) = \|\mathrm{Hess} f\|_2^2 + |\nabla f|^2$$

$\mathcal{L} = L$, Ornstein-Uhlenbeck

$$\Gamma_2^L(f) = \|\mathrm{Hess} f\|_2^2 + |\nabla f|^2 \geq |\nabla f|^2$$

$\mathcal{L} = L$, Ornstein-Uhlenbeck

$$\Gamma_2^L(f) = \|\mathrm{Hess} f\|_2^2 + |\nabla f|^2 \geq |\nabla f|^2$$

$\Gamma(P_t f) \leq e^{-2t} P_t(\Gamma f)$

$\mathcal{L} = L$, Ornstein-Uhlenbeck

$$\Gamma_2^L(f) = \|\mathrm{Hess} f\|_2^2 + |\nabla f|^2 \geq |\nabla f|^2$$

$$\Gamma(P_t f) \leq e^{-2t} P_t(\Gamma f) \quad \iff |\nabla P_t f|^2 \leq e^{-2t} P_t\big(|\nabla f|^2\big)$$

$\mathcal{L} = L^V$, log-concave

$$\Gamma_2^{L_V}(f)$$

$\mathcal{L} = L^V$, log-concave

$$\Gamma_2^{L_V}(f) \geq \rho|\nabla f|^2,$$

$$\Gamma(P_t f) \leq e^{-2\rho t} P_t(\Gamma f)$$

$\mathcal{L} = L^V$, log-concave

$$\Gamma_2^{L_V}(f) \geq \rho |\nabla f|^2,$$

$$\Gamma(P_t f) \leq e^{-2\rho t} P_t(\Gamma f) \quad \iff \quad |\nabla P_t f|^2 \leq e^{-2\rho t} P_t\big(|\nabla f|^2\big)$$

lorsque $\mathrm{Hess}\, V \geq \rho, \quad \rho > 0$.

$\mathcal{L} = L^V$, log-concave

$$\Gamma_2^{L_V}(f) \geq \rho |\nabla f|^2,$$

$$\Gamma(P_t f) \leq e^{-2\rho t} P_t(\Gamma f) \quad \iff \quad |\nabla P_t f|^2 \leq e^{-2\rho t} P_t\big(|\nabla f|^2\big)$$

lorsque $\mathrm{Hess}\, V \geq \rho, \quad \rho > 0.$

Semi-groupe non explicite, calcul direct impossible

Exemples précédents dans $\mathbb{R}^n$ (géométrie euclidienne).

Exemples précédents dans $\mathbb{R}^n$ (géométrie euclidienne).

Que se passe-t-il sur la sphère (géométrie différente, Laplacien différent) ?

Interpretation géométrique

$(\mathcal{M}, g)$ variété Riemannienne, Δ opérateur Laplace-Beltrami.

Interpretation géométrique

$(\mathcal{M}, g)$ variété Riemannienne, Δ opérateur Laplace-Beltrami.

Formule Bochner

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) - \Delta f \nabla(\Delta f) = \|\mathrm{Hess} f\|_2^2 + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f)$$

Interpretation géométrique

$(\mathcal{M}, g)$ variété Riemannienne, Δ opérateur Laplace-Beltrami.

Formule Bochner

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) - \Delta f \nabla(\Delta f) = \|\mathrm{Hess} f\|_2^2 + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f)$$

i.e.

$$\Gamma_2^{\Delta}(f) = \|\mathrm{Hess} f\|_2^2 + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f)$$

Interpretation géométrique

$(\mathcal{M}, g)$ variété Riemannienne, Δ opérateur Laplace-Beltrami.

Formule Bochner

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) - \Delta f \nabla(\Delta f) = \|\mathrm{Hess} f\|_2^2 + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f)$$

i.e.

$$\Gamma_2^{\Delta}(f) = \|\mathrm{Hess} f\|_2^2 + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f)$$

Si $\mathrm{Ric} \geq \rho$

Interpretation géométrique

$(\mathcal{M}, g)$ variété Riemannienne, Δ opérateur Laplace-Beltrami.

Formule Bochner

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) - \Delta f \nabla(\Delta f) = \|\mathrm{Hess} f\|_2^2 + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f)$$

i.e.

$$\Gamma_2^{\Delta}(f) = \|\mathrm{Hess} f\|_2^2 + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f)$$

Si $\mathrm{Ric} \geq \rho$ alors $\Gamma_2^{\Delta}(f) \geq \rho |\nabla f|^2 = \rho \Gamma(f)$

Interprétation géometrique

Analogie : $\Gamma_2 \geq \rho\Gamma$ minoration de la courbure.

Interprétation géometrique

Analogie : $\Gamma_2 \geq \rho\Gamma$ minoration de la courbure.

Pour $\mathcal{L}$ opérateur diffusion, Γ_2 substitut fonctionnel minoration courbure.

Interprétation géometrique

Analogie : $\Gamma_2 \geq \rho\Gamma$ minoration de la courbure.

Pour $\mathcal{L}$ opérateur diffusion, Γ_2 substitut fonctionnel minoration courbure.

Idée de comparaison modèles références :

$$\rho = 0, \quad \left(\mathbb{R}^n, dx, |\nabla f|^2\right)$$

Interprétation géometrique

Analogie : $\Gamma_2 \geq \rho\Gamma$ minoration de la courbure.

Pour $\mathcal{L}$ opérateur diffusion, Γ_2 substitut fonctionnel minoration courbure.

Idée de comparaison modèles références :

$$\rho = 0, \quad \left(\mathbb{R}^n, dx, |\nabla f|^2\right)$$

$$\rho = n-1, \quad \left(\mathbb{S}^n, d\sigma, |\nabla f|^2_{\mathbb{S}^n}\right)$$

Interprétation géometrique

Analogie : $\Gamma_2 \geq \rho\Gamma$ minoration de la courbure.

Pour $\mathcal{L}$ opérateur diffusion, Γ_2 substitut fonctionnel minoration courbure.

Idée de comparaison modèles références :

$$\rho = 0, \quad \left(\mathbb{R}^n, dx, |\nabla f|^2\right)$$

$$\rho = n - 1, \quad \left(\mathbb{S}^n, d\sigma, |\nabla f|^2_{\mathbb{S}^n}\right)$$

$$\rho = 1, \quad \left(\mathbb{R}^n, d\gamma, |\nabla f|^2\right)$$

Pour aller plus loin

Critère $CD(\rho, \infty) \iff \Gamma_2 \geq \rho\Gamma$

Pour aller plus loin

Critère $CD(\rho, \infty) \iff \Gamma_2 \geq \rho\Gamma$

$CD(\rho, n)$ avec la dimension de $(\mathcal{M}, g)$?

Pour aller plus loin

Critère $CD(\rho, \infty) \iff \Gamma_2 \geq \rho\Gamma$

$CD(\rho, n)$ avec la dimension de $(\mathcal{M}, g)$?

Pour Δ sur $\mathbb{R}^n$,

$$\Gamma_2(f) = \|\mathrm{Hess} f\|_2^2$$

Pour aller plus loin

Critère $CD(\rho, \infty) \iff \Gamma_2 \geq \rho\Gamma$

$CD(\rho, n)$ avec la dimension de $(\mathcal{M}, g)$?

Pour Δ sur $\mathbb{R}^n$,

$$\Gamma_2(f) = \|\mathrm{Hess} f\|_2^2 \geq \frac{1}{n}(\Delta f)^2 + 0|\nabla f|^2$$

Pour aller plus loin

Critère $CD(\rho,\infty) \iff \Gamma_2 \geq \rho\Gamma$

$CD(\rho, n)$ avec la dimension de $(\mathcal{M}, g)$?

Pour Δ sur $\mathbb{R}^n$,

$$\Gamma_2(f) = \|\mathrm{Hess} f\|_2^2 \geq \frac{1}{n}(\Delta f)^2 + 0|\nabla f|^2$$

Permet d'obtenir inegalités Sobolev, $1 \leq p \leq 2n/(n-2)$,

$$\frac{c(\rho,n)}{p-2}\left[\left(\int |f|^p d\mu\right)^{2/p} - \int f^2 d\mu\right] \leq \int \Gamma(f) d\mu$$

Minoration de Lichnerowicz

Application

$$\mathrm{CD}(\rho, n), \quad \rho > 0, n > 1 \iff \Gamma_2(f) \geq \rho\Gamma(f) + \frac{1}{n}(\mathcal{L}f)^2$$

Minoration de Lichnerowicz

Application

$$\mathrm{CD}(\rho, n), \quad \rho > 0, n > 1 \iff \Gamma_2(f) \geq \rho\Gamma(f) + \frac{1}{n}(\mathcal{L}f)^2$$

IPP

$$\int \Gamma(f)\mathrm{d}\mu = \int f(-\mathcal{L}f)\mathrm{d}\mu,$$

Minoration de Lichnerowicz

Application

$$\mathrm{CD}(\rho, n), \quad \rho > 0, n > 1 \iff \Gamma_2(f) \geq \rho\Gamma(f) + \frac{1}{n}(\mathcal{L}f)^2$$

IPP

$$\int \Gamma(f)\mathrm{d}\mu = \int f(-\mathcal{L}f)\mathrm{d}\mu, \quad \int \Gamma_2(f)\mathrm{d}\mu = \int (\mathcal{L}f)^2\mathrm{d}\mu$$

Minoration de Lichnerowicz

Application

$$\mathrm{CD}(\rho, n), \quad \rho > 0, n > 1 \iff \Gamma_2(f) \geq \rho\Gamma(f) + \frac{1}{n}(\mathcal{L}f)^2$$

IPP

$$\int \Gamma(f)\mathrm{d}\mu = \int f(-\mathcal{L}f)\mathrm{d}\mu, \quad \int \Gamma_2(f)\mathrm{d}\mu = \int (\mathcal{L}f)^2\mathrm{d}\mu$$

Donc

$$\int (\mathcal{L}f)^2\mathrm{d}\mu \geq \frac{\rho n}{n-1}\int f(-\mathcal{L}f)\mathrm{d}\mu$$

Minoration de Lichnerowicz

Si $-\mathcal{L}f = \lambda f, \quad \lambda \geq 0$

Minoration de Lichnerowicz

Si $-\mathcal{L}f = \lambda f, \quad \lambda \geq 0$ alors

$$\int (\mathcal{L}f)^2 \mathrm{d}\mu \geq \frac{\rho n}{n-1} \int f(-\mathcal{L}f) \mathrm{d}\mu$$

Minoration de Lichnerowicz

Si $-\mathcal{L}f = \lambda f, \quad \lambda \geq 0$ alors

$$\int (\mathcal{L}f)^2 \mathrm{d}\mu \geq \frac{\rho n}{n-1} \int f(-\mathcal{L}f)\mathrm{d}\mu$$

implique

$$\lambda\left(\lambda - \frac{\rho n}{n-1}\right) \geq 0$$

Minoration de Lichnerowicz

Si $-\mathcal{L}f = \lambda f, \quad \lambda > 0$

Minoration de Lichnerowicz

Si $-\mathcal{L}f = \lambda f, \quad \lambda > 0$ alors

Lichnerowicz, $\mathcal{L} = \Delta$

$(\mathcal{M}, g)$ dimension $n > 1$ et $\mathrm{Ric} \geq \rho > 0$

$$\lambda_1 \geq \frac{\rho n}{n-1}$$

Minoration de Lichnerowicz

Si $-\mathcal{L}f = \lambda f, \quad \lambda > 0$ alors

Lichnerowicz, $\mathcal{L} = \Delta$

$(\mathcal{M}, g)$ dimension $n > 1$ et $\mathrm{Ric} \geq \rho > 0$

$$\lambda_1 \geq \frac{\rho n}{n-1}$$

Comparaison λ_1 de $\mathcal{M}$ avec λ_1 de sphère.

Minoration de Lichnerowicz

Si $-\mathcal{L}f = \lambda f, \quad \lambda > 0$ alors

Lichnerowicz, $\mathcal{L} = \Delta$

$(\mathcal{M}, g)$ dimension $n > 1$ et $\mathrm{Ric} \geq \rho > 0$

$$\lambda_1 \geq \frac{\rho n}{n-1}$$

Comparaison λ_1 de $\mathcal{M}$ avec λ_1 de sphère.

$CD(\rho, n)$ donne constante Poincaré n pour $\mathbb{S}^n$.

Merci de votre attention.