Partie I : un bref survol de la superconcentration

Kevin Tanguy

Université de Toulouse

27 avril 2017

Plan de l'exposé

- Un exemple simple.
- Quelques modèles.
- Inégalité de Talagrand.
- Inégalité de Chatterjee.
- Extension au niveau exponentiel.

Introduction

Théorie de la concentration : outil efficace et polyvalent

- Probabilité
- Statistique
- Géométrie
- Analyse fonctionnelle
- ...

Introduction

Théorie de la concentration : outil efficace et polyvalent

- Probabilité
- Statistique
- Géométrie
- Analyse fonctionnelle
- ...

Manque précision cas particuliers ?

Mesure gaussienne standard

γ_n mesure gaussienne standard $\mathbb{R}^n$.

Inégalité Poincaré

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma_n$$

Mesure gaussienne standard

γ_n mesure gaussienne standard $\mathbb{R}^n$.

Inégalité Poincaré

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma_n$$

Conséquence

Si $X \sim \mathcal{N}(0, \Gamma)$ alors

$$\mathrm{Var}(\max_{i=1,\dots,n} X_i) \leq \max_{i=1,\dots,n} \mathrm{Var}(X_i)$$

Mesure gaussienne standard

γ_n mesure gaussienne standard $\mathbb{R}^n$.

Inégalité Poincaré

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma_n$$

Conséquence

Si $X \sim \mathcal{N}(0, \Gamma)$ alors

$$\mathrm{Var}(\max_{i=1,\dots,n} X_i) \leq \max_{i=1,\dots,n} \mathrm{Var}(X_i)$$

Inégalité optimale, ne depend pas de Γ. problème ?

Exemple simple, $\Gamma = Id$

$M_n = \max_{i=1,\ldots,n} X_i$.

Exemple simple, $\Gamma = Id$

$M_n = \max_{i=1,\dots,n} X_i$.

- $\mathrm{Var}(M_n) \leq 1$ (théorie classique).

Exemple simple, $\Gamma = Id$

$M_n = \max_{i=1,\dots,n} X_i$.

- $\mathrm{Var}(M_n) \leq 1$ (théorie classique). Correct ?

Exemple simple, $\Gamma = Id$

$M_n = \max_{i=1,\dots,n} X_i$.

- $\mathrm{Var}(M_n) \leq 1$ (théorie classique). Correct ?
- $\mathrm{Var}(M_n) \leq C/\log n$ (calcul direct).

Exemple simple, $\Gamma = Id$

$M_n = \max_{i=1,\dots,n} X_i$.

- $\mathrm{Var}(M_n) \leq 1$ (théorie classique). Correct ?
- $\mathrm{Var}(M_n) \leq C/\log n$ (calcul direct).

Inégalité Poincaré sous-optimale = superconcentration (Chatterjee)

Marche aléatoire branchante

- $\mathcal{T}$ arbre binaire profondeur n.
- X_e $i.i.d.$ $\mathcal{N}(0,1)$ sur chaque branche e.
- Chemin $\pi \in \mathcal{T}$ on pose $X_\pi = \sum_{e\in\pi} X_e$.

Marche aléatoire branchante

- $\mathcal{T}$ arbre binaire profondeur n.
- X_e *i.i.d.* $\mathcal{N}(0,1)$ sur chaque branche e.
- Chemin $\pi \in \mathcal{T}$ on pose $X_\pi = \sum_{e \in \pi} X_e$.

$\mathrm{Var}(\max_{\pi \in \mathcal{T}} X_\pi) \leq ?$

Marche aléatoire branchante

- $\mathcal{T}$ arbre binaire profondeur n.
- X_e *i.i.d.* $\mathcal{N}(0,1)$ sur chaque branche e.
- Chemin $\pi \in \mathcal{T}$ on pose $X_\pi = \sum_{e \in \pi} X_e$.

$\mathrm{Var}(\max_{\pi \in \mathcal{T}} X_\pi) \leq ?$

- Théorie classique : $\mathrm{Var}(\max_\pi X_\pi) \leq n \quad (X_\pi \sim \mathcal{N}(0,n))$.

Marche aléatoire branchante

- $\mathcal{T}$ arbre binaire profondeur n.
- X_e *i.i.d.* $\mathcal{N}(0,1)$ sur chaque branche e.
- Chemin $\pi \in \mathcal{T}$ on pose $X_\pi = \sum_{e\in\pi} X_e$.

$\mathrm{Var}(\max_{\pi\in\mathcal{T}} X_\pi) \leq ?$

- Théorie classique : $\mathrm{Var}(\max_\pi X_\pi) \leq n \quad (X_\pi \sim \mathcal{N}(0,n))$.
- En fait, $\mathrm{Var}(\max_\pi X_\pi) = O(1)$ [Bramson-Ding-Zeitouni].

Marche aléatoire branchante

- $\mathcal{T}$ arbre binaire profondeur n.
- X_e *i.i.d.* $\mathcal{N}(0,1)$ sur chaque branche e.
- Chemin $\pi \in \mathcal{T}$ on pose $X_\pi = \sum_{e \in \pi} X_e$.

$\mathrm{Var}(\max_{\pi \in \mathcal{T}} X_\pi) \leq ?$

- Théorie classique : $\mathrm{Var}(\max_\pi X_\pi) \leq n \quad (X_\pi \sim \mathcal{N}(0,n))$.
- En fait, $\mathrm{Var}(\max_\pi X_\pi) = O(1)$ [Bramson-Ding-Zeitouni].

Outils : méthode second moment modifié (très technique).

Matrice aléatoire

$X = (X_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ matrice aléatoire GUE.

Matrice aléatoire

$X = (X_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ matrice aléatoire GUE.

- $X_{ij} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma^2)$, $i < j$ i.i.d.
- $X_{ii} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, \sigma^2/2)$ i.i.d.
- X hermitienne (${}^t\overline{X} = X$)

Matrice aléatoire

$X = (X_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ matrice aléatoire GUE.

- $X_{ij} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma^2)$, $i < j$ i.i.d.
- $X_{ii} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, \sigma^2/2)$ i.i.d.
- X hermitienne (${}^t\overline{X} = X$)

Plus grande valeur propre

$$\lambda_{\max} = \sup_{|u|=1} \sum_{i,j=1}^{n} X_{ij} u_i \overline{u_j}$$

Régime pertinent : $\sigma^2 \sim 1/n$.

Matrices aléatoires

$\mathrm{Var}(\lambda_{\mathsf{max}}) \leq ?$

Matrices aléatoires

$\mathrm{Var}(\lambda_{\mathsf{max}}) \leq ?$

- $\mathrm{Var}(\lambda_{\mathsf{max}}) \leq C/n$ (théorie classique)

Matrices aléatoires

$\mathrm{Var}(\lambda_{\mathsf{max}}) \leq ?$

- $\mathrm{Var}(\lambda_{\mathsf{max}}) \leq C/n$ (théorie classique)
- $\mathrm{Var}(\lambda_{\mathsf{max}}) \leq C/n^{4/3}$.

Matrices aléatoires

Théorème Tracy-Widom

$$n^{2/3}(\lambda_{\mathrm{max}} - 1) \xrightarrow{\mathcal{L}} TW$$

Théorème Tracy-Widom

$$n^{2/3}(\lambda_{\max} - 1) \xrightarrow{\mathcal{L}} TW$$

$\mathbb{P}(n^{2/3}\left|\lambda_{\max} - 1\right| \geq t) \leq ? \quad t \geq 0$

Matrices aléatoires

Exemple $X_1, \ldots, X_n$ Rademacher

- $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$
- $\mathbb{P}(\left|\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1} X_i\right| \geq t) \leq 2e^{-t^2/2}$.

Matrices aléatoires

Exemple $X_1, \dots, X_n$ Rademacher

- $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$
- $\mathbb{P}(\left|\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1} X_i\right| \geq t) \leq 2e^{-t^2/2}$.

Objectif : $\mathbb{P}(n^{2/3}\left|\lambda_{\max} - 1\right| \geq t) \leq \psi(t)$

Matrices aléatoires

Exemple $X_1, \dots, X_n$ Rademacher

- $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$
- $\mathbb{P}(\left|\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1} X_i\right| \geq t) \leq 2e^{-t^2/2}$.

Objectif : $\mathbb{P}(n^{2/3}\left|\lambda_{\max} - 1\right| \geq t) \leq \psi(t)$

ψ même comportement asymptotique TW

$$\mathbb{P}(TW \leq -t) \sim Ce^{-t^3/C} \quad \mathbb{P}(TW \geq t) \sim Ce^{-t^{3/2}/C}$$

Matrices aléatoires

[Johansson]

$$\mathbb{P}(n^{2/3}(\lambda_{\max} - 1) \geq t) \leq Ce^{-t^{3/2}/C}, \quad t \geq 0$$

Matrices aléatoires

[Johansson]

$$\mathbb{P}(n^{2/3}(\lambda_{\max} - 1) \geq t) \leq Ce^{-t^{3/2}/C}, \quad t \geq 0$$

[Ledoux-Rider]

$$\mathbb{P}(n^{2/3}(\lambda_{\max} - 1) \leq -t) \leq Ce^{-t^{3}/C}, \quad t \geq 0$$

Matrices aléatoires

[Johansson]

$$\mathbb{P}(n^{2/3}(\lambda_{\max} - 1) \geq t) \leq Ce^{-t^{3/2}/C}, \quad t \geq 0$$

[Ledoux-Rider]

$$\mathbb{P}(n^{2/3}(\lambda_{\max} - 1) \leq -t) \leq Ce^{-t^{3}/C}, \quad t \geq 0$$

- démonstration valable β-ensemble, contient travaux Johansson.

Matrices aléatoires

[Johansson]

$$\mathbb{P}(n^{2/3}(\lambda_{\max} - 1) \geq t) \leq Ce^{-t^{3/2}/C}, \quad t \geq 0$$

[Ledoux-Rider]

$$\mathbb{P}(n^{2/3}(\lambda_{\max} - 1) \leq -t) \leq Ce^{-t^{3}/C}, \quad t \geq 0$$

- démonstration valable β-ensemble, contient travaux Johansson.
- Redonne borne optimale variance $\lambda_{\max}$.

Autres exemples

- Premier temps de passage en percolation dirigée.
- Energie libre modèles verres de spins (REM, GREM, SK, ...).
- Champ libre gaussien discret sur $\mathbb{Z}^2$.
- Statistiques d'ordre d'un échantillon (maximum, médiane,...).
- ...

Autres exemples

- Premier temps de passage en percolation dirigée.
- Energie libre modèles verres de spins (REM, GREM, SK, . . .).
- Champ libre gaussien discret sur $\mathbb{Z}^2$.
- Statistiques d'ordre d'un échantillon (maximum, médiane,. . .).
- . . .

- Chaque modèle, méthode ad-hoc, parfois très technique

Autres exemples

- Premier temps de passage en percolation dirigée.
- Energie libre modèles verres de spins (REM, GREM, SK, . . .).
- Champ libre gaussien discret sur $\mathbb{Z}^2$.
- Statistiques d'ordre d'un échantillon (maximum, médiane,. . .).
- . . .

- Chaque modèle, méthode ad-hoc, parfois très technique
- Méthode plus souple ? Piste : semi-groupe et hypercontractivité ?

Hypercontractivité = gain logarithmique

Suite gaussienne stationnaire

$(X_n)_{n\geq 0}$ suite gaussienne stationnaire, $\quad \mathbb{E}[X_i X_j] = \phi(|i-j|)$

Suite gaussienne stationnaire

$(X_n)_{n\geq 0}$ suite gaussienne stationnaire, $\mathbb{E}[X_iX_j] = \phi(|i-j|)$

Théorie des extrêmes

Si $\phi(n)\log n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ alors

$$\sqrt{2\log n}\big(M_n - b_n\big) \xrightarrow{\mathcal{L}} \Lambda_0$$

Suite gaussienne stationnaire

$(X_n)_{n\geq 0}$ suite gaussienne stationnaire, $\quad \mathbb{E}[X_i X_j] = \phi(|i-j|)$

Théorie des extrêmes

Si $\phi(n)\log n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ alors

$$\sqrt{2\log n}\big(M_n - b_n\big) \xrightarrow{\mathcal{L}} \Lambda_0$$

Gumbel : $\mathbb{P}(\Lambda_0 \geq t) = 1 - e^{-e^{-t}} \quad$ ($\sim e^{-t}$ pour t grand)

Suite gaussienne stationnaire

Variance

- $\mathrm{Var}(M_n) \leq 1$ (théorie classique).
- $\mathrm{Var}(M_n) \leq C / \log n$ [Chatterjee].

Suite gaussienne stationnaire

Variance

- $\mathrm{Var}(M_n) \leq 1$ (théorie classique).
- $\mathrm{Var}(M_n) \leq C / \log n$ [Chatterjee].

$f(x) = \max_{i=1,\dots,n} x_i$ 1-Lipschitzienne ! inégalité concentration ?

Inégalité concentration

- $\mathbb{P}\left(\sqrt{2\log n}|M_n - \mathbb{E}[M_n]| \geq t\right) \leq 2e^{-t^2/4\log n}$ (théorie classique)

Suite gaussienne stationnaire

Variance

- $\mathrm{Var}(M_n) \leq 1$ (théorie classique).
- $\mathrm{Var}(M_n) \leq C / \log n$ [Chatterjee].

$f(x) = \max_{i=1,\dots,n} x_i$ 1-Lipschitzienne ! inégalité concentration ?

Inégalité concentration

- $\mathbb{P}\big(\sqrt{2\log n}|M_n - \mathbb{E}[M_n]| \geq t\big) \leq 2e^{-t^2/4\log n}$ (théorie classique)
- $\mathbb{P}\big(\sqrt{2\log n}|M_n - \mathbb{E}[M_n]| \geq t\big) \leq e^{-ct}$ [T.]

Suite gaussienne stationnaire

Variance

- $\mathrm{Var}(M_n) \leq 1$ (théorie classique).
- $\mathrm{Var}(M_n) \leq C / \log n$ [Chatterjee].

$f(x) = \max_{i=1,\dots,n} x_i$ 1-Lipschitzienne ! inégalité concentration ?

Inégalité concentration

- $\mathbb{P}\left(\sqrt{2\log n}|M_n - \mathbb{E}[M_n]| \geq t\right) \leq 2e^{-t^2/4\log n}$ (théorie classique)
- $\mathbb{P}\left(\sqrt{2\log n}|M_n - \mathbb{E}[M_n]| \geq t\right) \leq e^{-ct}$ [T.]

Asymptotique Gumbel (t grand),

Suite gaussienne stationnaire

Variance

- $\mathrm{Var}(M_n) \leq 1$ (théorie classique).
- $\mathrm{Var}(M_n) \leq C/\log n$ [Chatterjee].

$f(x) = \max_{i=1,\dots,n} x_i$ 1-Lipschitzienne ! inégalité concentration ?

Inégalité concentration

- $\mathbb{P}\left(\sqrt{2\log n}|M_n - \mathbb{E}[M_n]| \geq t\right) \leq 2e^{-t^2/4\log n}$ (théorie classique)
- $\mathbb{P}\left(\sqrt{2\log n}|M_n - \mathbb{E}[M_n]| \geq t\right) \leq e^{-ct}$ [T.]

Asymptotique Gumbel (t grand),redonne borne optimale variance.

Au niveau de la variance

Talagrand

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) \leq C \sum_{i=1}^{n} \frac{\|\partial_i f\|_2^2}{1 + \log \frac{\|\partial_i f\|_2}{\|\partial_i f\|_1}}$$

Renforcement inégalité Poincaré si $\|\partial_i f\|_2 / \|\partial_i f\|_1$ grand

Au niveau de la variance

Talagrand

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) \leq C \sum_{i=1}^{n} \frac{\|\partial_i f\|_2^2}{1 + \log \frac{\|\partial_i f\|_2}{\|\partial_i f\|_1}}$$

Renforcement inégalité Poincaré si $\|\partial_i f\|_2 / \|\partial_i f\|_1$ grand

Cas i.i.d.

Test : $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$.

Cas i.i.d.

Test : $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$.

$f(x) = \max_{i=1,\ldots,n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i 1_{A_i}$ avec $A_i = \{x_i = \max\}$

Cas i.i.d.

Test : $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$.

$f(x) = \max_{i=1,\ldots,n} x_i = \sum_{i=1}^n x_i 1_{A_i} \quad$ avec $A_i = \{x_i = \max\}$

$\partial_i f = 1_{A_i}$

Cas i.i.d.

Test : $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$.

$f(x) = \max_{i=1,\ldots,n} x_i = \sum_{i=1}^n x_i 1_{A_i}$ avec $A_i = \{x_i = \max\}$

$\partial_i f = 1_{A_i} \quad \|\partial_i f\|_2^2 = \|\partial_i f\|_1 = \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(X_i \geq X_j \, \forall j) = 1/n$

Cas i.i.d.

Test : $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$.

$f(x) = \max_{i=1,\dots,n} x_i = \sum_{i=1}^n x_i 1_{A_i}$ avec $A_i = \{x_i = \max\}$

$\partial_i f = 1_{A_i} \quad \|\partial_i f\|_2^2 = \|\partial_i f\|_1 = \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(X_i \geq X_j \, \forall j) = 1/n$

$$\mathrm{Var}(M_n) \leq C / \log n.$$

Au niveau de la variance

Inégalité Talagrand se comporte mal vis à vis des corrélations !

Au niveau de la variance

Inégalité Talagrand se comporte mal vis à vis des corrélations !

$X \sim \mathcal{N}(0, \Gamma)$

Chatterjee

$\exists r_0 \geq 0$ et $\exists \mathcal{C}(r_0)$ recouvrement de $\{1, \ldots, n\}$ tq.

Au niveau de la variance

Inégalité Talagrand se comporte mal vis à vis des corrélations !

$X \sim \mathcal{N}(0, \Gamma)$

Chatterjee

$\exists r_0 \geq 0$ et $\exists \mathcal{C}(r_0)$ recouvrement de $\{1, \ldots, n\}$ tq.
Si $\mathbb{E}[X_i X_j] = \Gamma_{ij} \geq r_0$ alors $\exists D \in \mathcal{C}(r_0), \quad i, j \in D$

Au niveau de la variance

Inégalité Talagrand se comporte mal vis à vis des corrélations !

$X \sim \mathcal{N}(0, \Gamma)$

Chatterjee

$\exists r_0 \geq 0$ et $\exists \mathcal{C}(r_0)$ recouvrement de $\{1, \ldots, n\}$ tq.
Si $\mathbb{E}[X_i X_j] = \Gamma_{ij} \geq r_0$ alors $\exists D \in \mathcal{C}(r_0), \quad i, j \in D$

$I = \mathrm{argmax_i} X_i$ et $\rho(r_0) = \max_{D \in \mathcal{C}(r_0)} \mathbb{P}(I \in D)$.

Au niveau de la variance

Inégalité Talagrand se comporte mal vis à vis des corrélations !

$X \sim \mathcal{N}(0, \Gamma)$

Chatterjee

$\exists r_0 \geq 0$ et $\exists \mathcal{C}(r_0)$ recouvrement de $\{1, \ldots, n\}$ tq.
Si $\mathbb{E}[X_i X_j] = \Gamma_{ij} \geq r_0$ alors $\exists D \in \mathcal{C}(r_0), \quad i, j \in D$

$I = \mathrm{argmax_i} X_i$ et $\rho(r_0) = \max_{D \in \mathcal{C}(r_0)} \mathbb{P}(I \in D)$.
Alors
$$\mathrm{Var}(M_n) \leq C\left(r_0 + \frac{1}{\log 1/\rho(r_0)}\right)$$

Test cas i.i.d.

$$\Gamma = Id, \quad r_0 > 0$$

Test cas i.i.d.

$$\Gamma = Id, \quad r_0 > 0$$

$$\mathcal{C}(r_0) = \big\{\{1\}, \dots, \{n\}\big\}.$$

Test cas i.i.d.

$$\Gamma = Id, \quad r_0 > 0$$

$$\mathcal{C}(r_0) = \big\{\{1\}, \ldots, \{n\}\big\}.$$

$\Gamma_{ij} \geq r_0 > 0$ alors $i = j$

Test cas i.i.d.

$$\Gamma = Id, \quad r_0 > 0$$

$$\mathcal{C}(r_0) = \{\{1\}, \ldots, \{n\}\}.$$

$\Gamma_{ij} \geq r_0 > 0$ alors $i = j$ i.e. $i, j \in \{1\}$ ou $\{2\}$ ou $\ldots$

Test cas i.i.d.

$\Gamma = Id, \quad r_0 > 0$

$\mathcal{C}(r_0) = \big\{\{1\}, \ldots, \{n\}\big\}.$

$\Gamma_{ij} \geq r_0 > 0$ alors $i = j$ i.e. $i, j \in \{1\}$ ou $\{2\}$ ou ...

$\rho(r_0) = \max_{D \in \mathcal{C}(r_0)} \mathbb{P}(I \in D) = \max_{i=1,\ldots,n} \mathbb{P}(I = i) = 1/n$

Test cas i.i.d.

$\Gamma = Id, \quad r_0 > 0$

$\mathcal{C}(r_0) = \{\{1\}, \ldots, \{n\}\}.$

$\Gamma_{ij} \geq r_0 > 0$ alors $i = j$ i.e. $i, j \in \{1\}$ ou $\{2\}$ ou ...

$\rho(r_0) = \max_{D \in \mathcal{C}(r_0)} \mathbb{P}(I \in D) = \max_{i=1,\ldots,n} \mathbb{P}(I = i) = 1/n$

$$\mathrm{Var}(M_n) \leq C\left(r_0 + \frac{1}{\log n}\right)$$

$r_0 \to 0$

Test 2 cas stationnaire

On suppose ϕ (fonction covariance) décroissante,
$r_0 = \phi(n^\alpha), \quad 0 < \alpha < 1.$

Test 2 cas stationnaire

On suppose ϕ (fonction covariance) décroissante,
$r_0 = \phi(n^\alpha), \quad 0 < \alpha < 1.$

$$\mathcal{C}(r_0) = \left\{ \{1, \ldots, 2n^\alpha\}, \{n^\alpha, \ldots, 3n^\alpha\}, \{2n^\alpha, \ldots, 4n^\alpha\}, \ldots \right\}$$

Test 2 cas stationnaire

On suppose ϕ (fonction covariance) décroissante,
$r_0 = \phi(n^\alpha), \quad 0 < \alpha < 1.$

$$\mathcal{C}(r_0) = \left\{ \{1, \ldots, 2n^\alpha\}, \{n^\alpha, \ldots, 3n^\alpha\}, \{2n^\alpha, \ldots, 4n^\alpha\}, \ldots \right\}$$

Si $\Gamma_{ij} = \phi(|i-j|) \geq r_0 = \phi(n^\alpha)$

Test 2 cas stationnaire

On suppose ϕ (fonction covariance) décroissante,
$r_0 = \phi(n^\alpha), \quad 0 < \alpha < 1.$

$$\mathcal{C}(r_0) = \left\{ \{1, \dots, 2n^\alpha\}, \{n^\alpha, \dots, 3n^\alpha\}, \{2n^\alpha, \dots, 4n^\alpha\}, \dots \right\}$$

Si $\Gamma_{ij} = \phi(|i-j|) \geq r_0 = \phi(n^\alpha) \quad$ alors $|i-j| \leq n^\alpha$.

Test 2 cas stationnaire

On suppose ϕ (fonction covariance) décroissante,
$r_0 = \phi(n^\alpha), \quad 0 < \alpha < 1.$

$$\mathcal{C}(r_0) = \Big\{ \{1, \dots, 2n^\alpha\}, \{n^\alpha, \dots, 3n^\alpha\}, \{2n^\alpha, \dots, 4n^\alpha\}, \dots \Big\}$$

Si $\Gamma_{ij} = \phi(|i-j|) \geq r_0 = \phi(n^\alpha)$ alors $|i-j| \leq n^\alpha$. Donc
$i, j \in \{1, \dots, 2n^\alpha\}$ ou ...

On peut montrer que $\rho(r_0) \leq 1/n^{\eta}, \quad 0 < \eta < 1$

On peut montrer que $\rho(r_0) \leq 1/n^\eta, \quad 0 < \eta < 1$

Application Théorème Chatterjee

$$\mathrm{Var}(M_n) \leq C\left(\phi(n^\alpha) + \frac{1}{\log n}\right)$$

On peut montrer que $\rho(r_0) \leq 1/n^\eta, \quad 0 < \eta < 1$

Application Théorème Chatterjee

$$\mathrm{Var}(M_n) \leq C\left(\phi(n^\alpha) + \frac{1}{\log n}\right)$$

Si $\phi(n)\log n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \mathrm{Var}(M_n) \leq C/\log n$.

On peut montrer que $\rho(r_0) \leq 1/n^\eta, \quad 0 < \eta < 1$

Application Théorème Chatterjee

$$\mathrm{Var}(M_n) \leq C\left(\phi(n^\alpha) + \frac{1}{\log n}\right)$$

Si $\phi(n)\log n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \mathrm{Var}(M_n) \leq C/\log n$.

Rappel

Si Si $\phi(n)\log n \underset{n\to\infty}{\to} 0$

$$\sqrt{2\log n}\,(M_n - b_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} \Lambda_0$$

Idée de preuve

$X \sim \mathcal{N}(0, Id)$, $\quad (P_t)_{t \geq 0}$ semi-groupe Ornstein-Uhlenbeck

Representation variance

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) = 2 \int_0^\infty e^{-2t} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\gamma_n}[\partial_i f P_t(\partial_i f)] dt.$$

Idée de preuve

$X \sim \mathcal{N}(0, Id)$, $\quad (P_t)_{t \geq 0}$ semi-groupe Ornstein-Uhlenbeck

Representation variance

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) = 2 \int_0^\infty e^{-2t} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\gamma_n}[\partial_i f P_t(\partial_i f)] dt.$$

$X \sim \mathcal{N}(0, \Gamma)$

Representation variance

$$\mathrm{Var}(f) = 2 \int_0^\infty e^{-2t} \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij} \mathbb{E}[\partial_j f P_t(\partial_i f)] dt.$$

Idée de preuve

$f(x) = \max_{i=1,\dots,n} x_i \qquad I^t = \mathrm{argmax}_i X_i^t$

Idée de preuve

$f(x) = \max_{i=1,\dots,n} x_i \qquad I^t = \mathrm{argmax}_i X_i^t$

$$\mathrm{Var}(M_n) = 2\int_0^\infty e^{-2t} \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}\mathbb{E}[1_{I=j}1_{I^t=i}]dt.$$

Idée de preuve

$f(x) = \max_{i=1,\ldots,n} x_i \qquad I^t = \mathrm{argmax}_i X_i^t$

$$\mathrm{Var}(M_n) = 2\int_0^\infty e^{-2t} \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}\mathbb{E}[1_{I=j}1_{I^t=i}]dt.$$

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}\mathbb{E}[1_{I=j}1_{I^t=i}] &= \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}\mathbb{P}(I=i,\ I^t=j) \\ &= \end{aligned}$$

Idée de preuve

$f(x) = \max_{i=1,\dots,n} x_i \qquad I^t = \mathrm{argmax}_i X_i^t$

$$\mathrm{Var}(M_n) = 2\int_0^\infty e^{-2t} \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij} \mathbb{E}[1_{I=j} 1_{I^t=i}] dt.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij} \mathbb{E}[1_{I=j} 1_{I^t=i}] &= \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij} \mathbb{P}(I = i,\ I^t = j) \\
&= \mathbb{E}[\Gamma_{II^t}]
\end{aligned}$$

Idée de preuve

$f(x) = \max_{i=1,\ldots,n} x_i \qquad I^t = \mathrm{argmax}_i X_i^t$

$$\mathrm{Var}(M_n) = 2\int_0^\infty e^{-2t} \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}\mathbb{E}[1_{I=j}1_{I^t=i}]dt.$$

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}\mathbb{E}[1_{I=j}1_{I^t=i}] &= \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}\mathbb{P}(I=i,\, I^t=j)\\ &= \mathbb{E}[\Gamma_{II^t}]\\ &= \int_0^1 \mathbb{P}(\Gamma_{II^t} \geq r)dr\end{aligned}$$

Hypothèse recouvrement pour contrôler $\mathbb{P}(\Gamma_{II^t} \geq r)$ par $\sum_{D \in \mathcal{C}(r_0)} \mathbb{P}(I, I^t \in D)$.

Hypothèse recouvrement pour contrôler $\mathbb{P}(\Gamma_{II^t} \geq r)$ par $\sum_{D \in \mathcal{C}(r_0)} \mathbb{P}(I, I^t \in D)$.

$\mathbb{P}(I, I^t \in D) = \mathbb{E}[hP_t h] = \|P_{t/2} h\|_2^2$ + hypercontractivité.

Au niveau exponentiel

Objectif : $\mathbb{P}\Big(\sqrt{2\log n}|M_n - \mathbb{E}[M_n]| \geq t\Big) \leq e^{-ct}$

Au niveau exponentiel

Objectif : $\mathbb{P}\big(\sqrt{2\log n}|M_n - \mathbb{E}[M_n]| \geq t\big) \leq e^{-ct}$

Z variable aléatoire

Lemme

Si $\mathrm{Var}(e^{\theta Z/2}) \leq \frac{\theta^2}{4} K \mathbb{E}[e^{\theta Z}] \quad \theta \in \mathbb{R}$

Au niveau exponentiel

Objectif : $\mathbb{P}\big(\sqrt{2\log n}|M_n - \mathbb{E}[M_n]| \geq t\big) \leq e^{-ct}$

Z variable aléatoire

Lemme

Si $\mathrm{Var}(e^{\theta Z/2}) \leq \frac{\theta^2}{4} K\mathbb{E}[e^{\theta Z}] \quad \theta \in \mathbb{R}$ alors

$$\mathbb{P}\big(\sqrt{K^{-1}}|Z - \mathbb{E}[Z]| \geq t\big) \leq 6e^{-ct}, \quad t \geq 0 \tag{1}$$

Au niveau exponentiel

Objectif : $\mathbb{P}\big(\sqrt{2\log n}|M_n - \mathbb{E}[M_n]| \geq t\big) \leq e^{-ct}$

Z variable aléatoire

Lemme

Si $\mathrm{Var}(e^{\theta Z/2}) \leq \frac{\theta^2}{4} K \mathbb{E}[e^{\theta Z}] \quad \theta \in \mathbb{R}$ alors

$$\mathbb{P}\big(\sqrt{K^{-1}}|Z - \mathbb{E}[Z]| \geq t\big) \leq 6e^{-ct}, \quad t \geq 0 \tag{1}$$

Extension théorème de Chatterjee au niveau exponentiel

Au niveau exponentiel

Objectif : $\mathbb{P}\big(\sqrt{2\log n}|M_n - \mathbb{E}[M_n]| \geq t\big) \leq e^{-ct}$

Z variable aléatoire

Lemme

Si $\mathrm{Var}(e^{\theta Z/2}) \leq \frac{\theta^2}{4} K \mathbb{E}[e^{\theta Z}] \quad \theta \in \mathbb{R}$ alors

$$\mathbb{P}\big(\sqrt{K^{-1}}|Z - \mathbb{E}[Z]| \geq t\big) \leq 6e^{-ct}, \quad t \geq 0 \tag{1}$$

Extension théorème de Chatterjee au niveau exponentiel : obtenir (1) pour $Z = M_n$ avec $K \sim \mathrm{Var}(M_n)$.

$\theta \in \mathbb{R}, \quad M_n^t = \max_{i=1}^n X_i^t.$

$$\mathrm{Var}(e^{\theta M_n/2}) = \frac{\theta^2}{2} \int_0^\infty e^{-2t} \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij} \mathbb{E}\left[1_{\{I=i\}} e^{\theta M_n/2} e^{\theta M_n^t/2} 1_{\{I^t=j\}} \right] dt$$

$\theta \in \mathbb{R}, \quad M_n^t = \max_{i=1}^n X_i^t.$

$$\mathrm{Var}(e^{\theta M_n/2}) = \frac{\theta^2}{2} \int_0^\infty e^{-2t} \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij} \mathbb{E}\left[1_{\{I=i\}} e^{\theta M_n/2} e^{\theta M_n^t/2} 1_{\{I^t=j\}} \right] dt$$

- Décomposition dyadique.
- Utilisation recouvrement.
- Hölder + hypercontractivité.

Fin partie I

Merci pour votre attention