Partie II : inégalités de Talagrand d'ordre supérieur, application en analyse booléene

Kevin Tanguy

Université de Toulouse

27 avril 2017

Plan de l'exposé

- Représentation de la variance.
- inégalité de Talagrand d'ordre supérieur.
- Rappels analyse booléenne.
- Théorème à la KKL.
- Inégalités de courbure dimension, intégrées, inverses.

Introduction

Différentes représentation variance

- Décomposition $f \in L^2(\gamma_n)$ base polynômes Hermite.

Introduction

Différentes représentation variance

- Décomposition $f \in L^2(\gamma_n)$ base polynômes Hermite.
- Interpolation semi-groupe Ornstein-Uhlenbeck.

Introduction

Différentes représentation variance

- Décomposition $f \in L^2(\gamma_n)$ base polynômes Hermite.
- Interpolation semi-groupe Ornstein-Uhlenbeck.
- Formule type Taylor semi-groupe (Ledoux).

Introduction

Différentes représentation variance

- Décomposition $f \in L^2(\gamma_n)$ base polynômes Hermite.
- Interpolation semi-groupe Ornstein-Uhlenbeck.
- Formule type Taylor semi-groupe (Ledoux).
- $\dots$

Représentation de la variance

Théorème [T.]

$p \geq 1$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) &= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla^k f d\gamma_n \right|^2 \\
&+ \frac{2}{p!} \int_0^\infty e^{-2t}(1-e^{-2t})^p \int_{\mathbb{R}^n} \left| P_t(\nabla^{p+1} f) \right|^2 d\gamma_n dt
\end{aligned}
$$

- mélange développement Hermite + reste par interpolation.

Représentation de la variance

Théorème [T.]

$p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) &= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla^k f d\gamma_n \Big|^2 \\ &+ \frac{2}{p!} \int_0^{\infty} e^{-2t}(1-e^{-2t})^p \int_{\mathbb{R}^n} \big| P_t(\nabla^{p+1} f) \big|^2 d\gamma_n dt \end{aligned}$$

- mélange développement Hermite + reste par interpolation.
- $p \to \infty$ on retrouve développement Hermite.

Preuve

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) = 2\int_0^{\infty} e^{-2t} \int_{\mathbb{R}^n} |P_t \nabla f|^2 d\gamma_n dt$$

Preuve

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) = 2\int_0^\infty e^{-2t}\int_{\mathbb{R}^n} |P_t \nabla f|^2 d\gamma_n dt$$

Rappels

- $\nabla P_u f = e^{-u} P_u \nabla f \quad \forall u \geq 0$
- $\int_{\mathbb{R}^n} f(-Lf) d\gamma_n = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma_n$ avec $L = \Delta - x \cdot \nabla$.
- $P_u(f) \underset{u\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma_n$.

Démonstration au tableau

Ordre 2

$p = 1$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \nabla f d\gamma_n\right|^2 \\ &+ 2\int_0^\infty e^{-2u}(1-e^{-2u})\int_{\mathbb{R}^n} \left|P_u(\nabla^2 f)\right|^2 d\gamma_n du\end{aligned}$$

Ordre 2

$p = 1$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla f d\gamma_n \right|^2 \\ &+ 2\int_0^\infty e^{-2u}(1-e^{-2u}) \int_{\mathbb{R}^n} \left| P_u(\nabla^2 f) \right|^2 d\gamma_n du\end{aligned}$$

- Dans la preuve, s fixé et $t \to 0$ argument article Ledoux.

Ordre 2

$p = 1$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla f d\gamma_n \right|^2 \\ &+ 2\int_0^\infty e^{-2u}(1-e^{-2u}) \int_{\mathbb{R}^n} \left| P_u(\nabla^2 f) \right|^2 d\gamma_n du\end{aligned}$$

- Dans la preuve, s fixé et $t \to 0$ argument article Ledoux.
- Inégalité Poincaré inverse immédiate.

Talagrand ordre 2

Majoration du reste par hypercontractivité

$$R = 2\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^{\infty} e^{-2u}(1-e^{-2u})\int_{\mathbb{R}^n}\left[P_u\big(\partial_{ij}f\big)\right]^2 d\gamma_n du$$

Talagrand ordre 2

Majoration du reste par hypercontractivité

$$R = 2 \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^{\infty} e^{-2u}(1 - e^{-2u}) \int_{\mathbb{R}^n} \Big[P_u\big(\partial_{ij} f\big) \Big]^2 d\gamma_n du$$

Talagrand ordre 2

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) \quad \leq \quad \left| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla f d\gamma_n \right|^2 + C \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\|\partial_{ij} f\|_2^2}{\left[1 + \frac{\|\partial_{ij} f\|_2}{\|\partial_{ij} f\|_1} \right]^2}$$

Démonstration au tableau

Questions ouvertes

- Comparaison inégalités Talagrand d'ordre 1 et 2 ?
- Utilisation superconcentration ?

Rappels analyse booléenne

Historiquement inégalité Talagrand sur $C_n = \{-1, 1\}^n$ pour $\mu^n = (\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1)^{\otimes n}$.

Rappels analyse booléenne

Historiquement inégalité Talagrand sur $C_n = \{-1, 1\}^n$ pour $\mu^n = (\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1)^{\otimes n}$.

- $2D_i f(x) = f(x) - f\big(\tau_i(x)\big)$
  $\tau_i(x) = (x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_n)$, $x \in C_n$.

Rappels analyse booléenne

Historiquement inégalité Talagrand sur $C_n = \{-1,1\}^n$ pour $\mu^n = (\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1)^{\otimes n}$.

- $2D_i f(x) = f(x) - f\big(\tau_i(x)\big)$
  $\tau_i(x) = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n)$, $x \in C_n$.
- $L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n D_i, \qquad Df = (D_1 f, \dots, D_n f)$.

Rappels analyse booléenne

Historiquement inégalité Talagrand sur $C_n = \{-1, 1\}^n$ pour $\mu^n = (\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1)^{\otimes n}$.

- $2D_i f(x) = f(x) - f\big(\tau_i(x)\big)$
  $\tau_i(x) = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n)$, $x \in C_n$.
- $L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n D_i, \qquad Df = (D_1 f, \dots, D_n f)$.
- $\int_{C_n} f(-Lf) d\mu^n = \int_{C_n} |Df|^2 d\mu^n$.

Rappels analyse booléenne

Historiquement inégalité Talagrand sur $C_n = \{-1, 1\}^n$ pour $\mu^n = (\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1)^{\otimes n}$.

- $2D_i f(x) = f(x) - f\big(\tau_i(x)\big)$
  $\tau_i(x) = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n)$, $x \in C_n$.
- $L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n D_i, \qquad Df = (D_1 f, \dots, D_n f)$.
- $\int_{C_n} f(-Lf) d\mu^n = \int_{C_n} |Df|^2 d\mu^n$.

Attention $D_{ii} = D_i \circ D_i = D_i$!

Semi-groupe Bonami-Beckner

- $Q_t f(x) = \int_{C_n} f(y) \prod_{i=1}^n (1 + e^{-t} x_i y_i) d\mu^n(y)$.
- $Q_t(f) \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} \int_{C_n} f d\mu^n$.
- $\mathrm{Var}_{\mu^n}(f) = 2 \int_0^\infty \sum_{i=1}^n \int_{C_n} \left[Q_s(D_i f)\right]^2 d\mu^n ds$ [Bobkov-Götze-Houdré].
- $(Q_t)_{t \geq 0}$ hypercontractif [Bonami-Beckner].

Beaucoup points commun cas gaussien.

Attention $D_i Q_s = Q_s D_i$, pas de e^{-s}.

Influence et Théorème KKL

$f \ : C_n \to \{0,1\}$

Influence

$$I_i(f) = \mathbb{P}\big(f(X) \neq f\left(\tau_i(X)\right)\big), \quad \mathcal{L}(X) = \mu^n$$

Probabilité i pivotal

Influence et Théorème KKL

$f \ : C_n \to \{0,1\}$

Influence

$$I_i(f) = \mathbb{P}\big(f(X) \neq f\big(\tau_i(X)\big)\big), \quad \mathcal{L}(X) = \mu^n$$

Probabilité i pivotal

Théorème Kalai-Kahn-Linial

$$\forall f \ : \ C_n \to \{0,1\}, \, \exists i \in \{1,\ldots,n\} \quad I_i(f) \geq c \mathrm{Var}_{\mu^n}(f) \frac{\log n}{n}$$

Influence et Théorème KKL

$f : C_n \to \{0, 1\}$

Influence

$$I_i(f) = \mathbb{P}\big(f(X) \neq f\big(\tau_i(X)\big)\big), \quad \mathcal{L}(X) = \mu^n$$

Probabilité i pivotal

Théorème Kalai-Kahn-Linial

$$\forall f : C_n \to \{0, 1\}, \exists i \in \{1, \dots, n\} \quad I_i(f) \geq c \mathrm{Var}_{\mu^n}(f) \frac{\log n}{n}$$

optimal fonctions Tribus

Démonstration KKL

$$I_i(f) = \|D_i f\|_1 = \|D_i f\|_p^p \quad p \geq 1$$

(modulo constantes)

Démonstration KKL

$$I_i(f) = \|D_i f\|_1 = \|D_i f\|_p^p \quad p \geq 1$$

(modulo constantes)

Talagrand

$$\mathrm{Var}_{\mu^n}(f) \leq C \sum_{i=1}^{n} \frac{\|D_i f\|_2^2}{1 + \frac{\|D_i f\|_2}{\|D_i f\|_1}}.$$

démonstration (KKL) au tableau

Influence double

Influence double

$$I_{(i,j)}(f) = \mathbb{P}\big((i,j)\,\mathrm{pivotal}\big)$$

Influence double

Influence double

$$I_{(i,j)}(f) = \mathbb{P}\big((i,j)\,\mathrm{pivotal}\big)$$

Similairement (modulo constantes)

$$I_{(i,j)}(f) = \|D_{ij}f\|_2^2 = \|D_i f\|_1$$

Influence double

Influence double

$$I_{(i,j)}(f) = \mathbb{P}\big((i,j)\,\mathrm{pivotal}\big)$$

Similairement (modulo constantes)

$$I_{(i,j)}(f) = \|D_{ij}f\|_2^2 = \|D_i f\|_1$$

Attention $I_{(i,i)}(f) = I_i(f)$!

KKL d'ordre 2

$f : C_n \to \{0,1\}$

KKL d'ordre 2

Soit $\exists i \in \{1,\ldots,n\}$

$$I_i(f) \geq c\mathrm{Var}_{\mu^n}(f)\left(\frac{1}{n}\right)^{1/1+\eta} \quad 0 < \eta < 1$$

KKL d'ordre 2

$f\ :\ C_n \to \{0,1\}$

KKL d'ordre 2

Soit $\exists i \in \{1,\ldots,n\}$

$$I_i(f) \geq c\mathrm{Var}_{\mu^n}(f)\left(\frac{1}{n}\right)^{1/1+\eta} \qquad 0 < \eta < 1$$

soit $\exists i \neq j \in \{1,\ldots,n\}$

$$I_{(i,j)}(f) \geq c\mathrm{Var}_{\mu^n}(f)\left(\frac{\log n}{n}\right)^2$$

2ième alternative optimale pour fonctions tribus

Démonstration

Inégalité Talagrand ordre 2

$$\mathrm{Var}_{\mu^n}(f) \quad \leq \quad C\sum_{i=1}^{n} \|D_i f\|^2_{1+e^{-s_0}} + C\sum_{i\neq j=1}^{n} \frac{\|D_{ij}f\|_2^2}{\left[1+\frac{\|D_{ij}f\|_2}{\|D_{ij}f\|_1}\right]^2}$$

Démonstration

Inégalité Talagrand ordre 2

$$\mathrm{Var}_{\mu^n}(f) \quad \leq \quad C\sum_{i=1}^{n} \|D_i f\|_{1+e^{-s_0}}^2 + C\sum_{i\neq j=1}^{n} \frac{\|D_{ij}f\|_2^2}{\left[1+\frac{\|D_{ij}f\|_2}{\|D_{ij}f\|_1}\right]^2}$$

Remarque

- $2\int_{C_n} D_i f d\mu^n = \int_{C_n} f(x)d\mu^n(x) - \int_{C_n} f(\tau_i x)d\mu^n(x) = 0.$

Démonstration

Inégalité Talagrand ordre 2

$$\mathrm{Var}_{\mu^n}(f) \quad \leq \quad C \sum_{i=1}^{n} \|D_i f\|_{1+e^{-s_0}}^2 + C \sum_{i \neq j = 1}^{n} \frac{\|D_{ij} f\|_2^2}{\left[1 + \frac{\|D_{ij} f\|_2}{\|D_{ij} f\|_1}\right]^2}$$

Remarque

- $2 \int_{C_n} D_i f d\mu^n = \int_{C_n} f(x) d\mu^n(x) - \int_{C_n} f(\tau_i x) d\mu^n(x) = 0.$
- $\|Q_u(D_i f)\|_2^2 \leq e^{-2u} \|D_i f\|_2^2 \quad \forall u \geq 0$ (Poincaré)

Démonstration

Inégalité Talagrand ordre 2

$$\mathrm{Var}_{\mu^n}(f) \leq C\sum_{i=1}^{n}\|D_i f\|_{1+e^{-s_0}}^2 + C\sum_{i\neq j=1}^{n}\frac{\|D_{ij}f\|_2^2}{\left[1+\frac{\|D_{ij}f\|_2}{\|D_{ij}f\|_1}\right]^2}$$

Remarque

- $2\int_{C_n} D_i f d\mu^n = \int_{C_n} f(x)d\mu^n(x) - \int_{C_n} f(\tau_i x)d\mu^n(x) = 0.$
- $\|Q_u(D_i f)\|_2^2 \leq e^{-2u}\|D_i f\|_2^2 \quad \forall u \geq 0$ (Poincaré)

Démonstration au tableau

Critère courbure dimension intégré

Théorie Bakry-Emery (cas gaussien)

$$\mathbb{E}_{\gamma_n}[\Gamma_2(f)] \geq \rho \mathbb{E}_{\gamma_n}[\Gamma_1(f)] \Leftrightarrow \mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) \leq \frac{1}{\rho} \mathbb{E}_{\gamma_n}[\Gamma_1(f)] \quad \forall f \in \mathcal{A}$$

Critère courbure dimension intégré

Théorie Bakry-Emery (cas gaussien)

$$\mathbb{E}_{\gamma_n}[\Gamma_2(f)] \geq \rho \mathbb{E}_{\gamma_n}[\Gamma_1(f)] \Leftrightarrow \mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) \leq \frac{1}{\rho} \mathbb{E}_{\gamma_n}[\Gamma_1(f)] \quad \forall f \in \mathcal{A}$$

$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) = 2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1(P_s f) d\gamma_n ds$

Critère courbure dimension intégré

Théorie Bakry-Emery (cas gaussien)

$$\mathbb{E}_{\gamma_n}[\Gamma_2(f)] \geq \rho \mathbb{E}_{\gamma_n}[\Gamma_1(f)] \Leftrightarrow \mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) \leq \frac{1}{\rho}\mathbb{E}_{\gamma_n}[\Gamma_1(f)] \quad \forall f \in \mathcal{A}$$

$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) = 2\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1(P_s f) d\gamma_n ds$

$I(s) = \mathbb{E}_{\gamma_n}[\Gamma_1(P_s f)]$

Critère courbure dimension intégré

Théorie Bakry-Emery (cas gaussien)

$$\mathbb{E}_{\gamma_n}[\Gamma_2(f)] \geq \rho \mathbb{E}_{\gamma_n}[\Gamma_1(f)] \Leftrightarrow \mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) \leq \frac{1}{\rho} \mathbb{E}_{\gamma_n}[\Gamma_1(f)] \quad \forall f \in \mathcal{A}$$

$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) = 2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1(P_s f) d\gamma_n ds$

$I(s) = \mathbb{E}_{\gamma_n}[\Gamma_1(P_s f)] \quad I'(s) \leq -2\rho I(s)$

Gronwall : $I(s) \leq e^{-2\rho} I(0)$ (intégration entre 0 et s).

Critère courbure dimension intégré

f fixée, inégalité inverse, intégration entre s et ∞ ?

Critère courbure dimension intégré

f fixée, inégalité inverse, intégration entre s et ∞ ?

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_2(P_s f) d\gamma_n \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1(P_s f) d\gamma_n + \psi_n(s) \quad s \geq 0$$

Formulation équivalente

$$I'(s) \geq -2(I(s) + \psi_n(s)) \quad s \geq 0$$

Critère courbure dimension intégré

f fixée, inégalité inverse, intégration entre s et ∞ ?

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_2(P_s f) d\gamma_n \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1(P_s f) d\gamma_n + \psi_n(s) \quad s \geq 0$$

Formulation équivalente

$$I'(s) \geq -2(I(s) + \psi_n(s)) \quad s \geq 0$$

Exemple : $f_\beta(x) = \frac{1}{\beta} \log\left(\sum_{i=1}^n e^{\beta x_i}\right), \quad \beta > 0$ (énergie libre) avec

$\psi(s) = 2\beta^2 e^{-2s} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1(P_s f_\beta) d\gamma_n$

Application superconcentration

REM

$$\mathrm{Var}(f_\beta) \leq \frac{e^{-n(\log 2 - 2\beta^2)}}{\beta^2}, \quad \beta \in]0, \sqrt{(\log 2)/2}]$$

Application superconcentration

REM

$$\mathrm{Var}(f_\beta) \leq \frac{e^{-n(\log 2 - 2\beta^2)}}{\beta^2}, \quad \beta \in]0, \sqrt{(\log 2)/2}]$$

SK

- $\mathrm{Var}(f_\beta) \leq C_\beta n/\log n, \quad \beta > 0$ [Chatterjee]
- $\mathrm{Var}(f_\beta) \leq C, \quad 0 < \beta < 1/2.$

Autres exemples ?

Merci de votre attention.