Quelques inégalités de superconcentration : théorie et applications

Kevin Tanguy

Université de Toulouse

29 juin 2017

Plan de l'exposé

- Introduction
- Superconcentration pour des suites gaussiennes stationnaires
- Inégalités de Talagrand
- Application en analyse booléenne
- Perspectives

Introduction

Introduction

Théorie de la concentration : outil efficace et polyvalent

- Probabilité en grande dimension
- Probabilité dans des espaces de Banach
- Processus empiriques
- Mécanique statistique
- . . .

Introduction

Théorie de la concentration : outil efficace et polyvalent

- Probabilité en grande dimension
- Probabilité dans des espaces de Banach
- Processus empiriques
- Mécanique statistique
- ...

Manque de précision pour certains cas particuliers ?

Mesure gaussienne standard

γ_n mesure gaussienne standard $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière

Inégalité de Poincaré

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma_n$$

Mesure gaussienne standard

γ_n mesure gaussienne standard $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière

Inégalité de Poincaré

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma_n$$

Conséquence

Si $X \sim \mathcal{N}(0, \Gamma)$ alors

$$\mathrm{Var}(\max_{i=1,\ldots,n} X_i) \leq \max_{i=1,\ldots,n} \mathrm{Var}(X_i)$$

Mesure gaussienne standard

γ_n mesure gaussienne standard $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière

Inégalité de Poincaré

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma_n$$

Conséquence

Si $X \sim \mathcal{N}(0, \Gamma)$ alors

$$\mathrm{Var}(\max_{i=1,\dots,n} X_i) \leq \max_{i=1,\dots,n} \mathrm{Var}(X_i)$$

A ce degré de généralité, cette inégalité est optimale mais ne dépend pas de Γ. problème ?

Exemple simple, $\Gamma = I_d$

$M_n = \max_{i=1,\ldots,n} X_i$.

Exemple simple, $\Gamma = I_d$

$M_n = \max_{i=1,\dots,n} X_i$.

- $\mathrm{Var}(M_n) \leq 1$ (théorie classique).

Exemple simple, $\Gamma = I_d$

$M_n = \max_{i=1,\dots,n} X_i$.

- $\mathrm{Var}(M_n) \leq 1$ (théorie classique). Correct ?

Exemple simple, $\Gamma = I_d$

$M_n = \max_{i=1,\ldots,n} X_i$.

- $\mathrm{Var}(M_n) \leq 1$ (théorie classique). Correct ?
- $\mathrm{Var}(M_n) \leq C/\log n$ (calcul direct).

Exemple simple, $\Gamma = I_d$

$M_n = \max_{i=1,\ldots,n} X_i$.

- $\mathrm{Var}(M_n) \leq 1$ (théorie classique). Correct ?
- $\mathrm{Var}(M_n) \leq C / \log n$ (calcul direct).

Inégalité de Poincaré sous-optimale pour certaines fonctionnelles aléatoires = superconcentration (Chatterjee)

Marche aléatoire branchante

- $\mathcal{T}$ arbre binaire de profondeur n.
- X_e $i.i.d.$ $\mathcal{N}(0,1)$ sur chaque arête e.
- Chemin $\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{T})$ on pose $X_\pi = \sum_{e\in\pi} X_e$.

Marche aléatoire branchante

- $\mathcal{T}$ arbre binaire de profondeur n.
- X_e *i.i.d.* $\mathcal{N}(0,1)$ sur chaque arête e.
- Chemin $\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{T})$ on pose $X_\pi = \sum_{e \in \pi} X_e$.

$$\mathrm{Var}(\max_{\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{T})} X_\pi) \leq ?$$

Marche aléatoire branchante

- $\mathcal{T}$ arbre binaire de profondeur n.
- X_e *i.i.d.* $\mathcal{N}(0,1)$ sur chaque arête e.
- Chemin $\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{T})$ on pose $X_\pi = \sum_{e \in \pi} X_e$.

$$\mathrm{Var}(\max_{\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{T})} X_\pi) \leq ?$$

- Théorie classique : $\mathrm{Var}(\max_{\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{T})} X_\pi) \leq n \quad (X_\pi \sim \mathcal{N}(0,n))$.

Marche aléatoire branchante

- $\mathcal{T}$ arbre binaire de profondeur n.
- X_e $i.i.d.$ $\mathcal{N}(0,1)$ sur chaque arête e.
- Chemin $\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{T})$ on pose $X_\pi = \sum_{e \in \pi} X_e$.

$$\mathrm{Var}(\max_{\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{T})} X_\pi) \leq ?$$

- Théorie classique : $\mathrm{Var}(\max_{\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{T})} X_\pi) \leq n \quad (X_\pi \sim \mathcal{N}(0,n))$.
- En fait, $\mathrm{Var}(\max_{\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{T})} X_\pi) = O(1)$ [Bramson-Ding-Zeitouni].

Marche aléatoire branchante

- $\mathcal{T}$ arbre binaire de profondeur n.
- X_e *i.i.d.* $\mathcal{N}(0,1)$ sur chaque arête e.
- Chemin $\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{T})$ on pose $X_\pi = \sum_{e \in \pi} X_e$.

$$\mathrm{Var}(\max_{\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{T})} X_\pi) \leq ?$$

- Théorie classique : $\mathrm{Var}(\max_{\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{T})} X_\pi) \leq n \quad (X_\pi \sim \mathcal{N}(0,n))$.
- En fait, $\mathrm{Var}(\max_{\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{T})} X_\pi) = O(1)$ [Bramson-Ding-Zeitouni].

Outils : méthode (modifiée) du second moment combinée à des arguments de comparaison (démonstrations très techniques).

Matrice aléatoire

$X = (X_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ matrice aléatoire GUE.

Matrice aléatoire

$X = (X_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ matrice aléatoire GUE.

- $X_{ij} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma^2)$, $i < j$ i.i.d.
- $X_{ii} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, \sigma^2/2)$ i.i.d.
- X hermitienne (${}^t\overline{X} = X$)

Matrice aléatoire

$X = (X_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ matrice aléatoire GUE.

- $X_{ij} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,\sigma^2)$, $i<j$ i.i.d.
- $X_{ii} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,\sigma^2/2)$ i.i.d.
- X hermitienne (${}^t\overline{X} = X$)

Plus grande valeur propre

$$\lambda_{\max} = \sup_{|u|=1} \sum_{i,j=1}^{n} X_{ij} u_i \overline{u_j}$$

Régime pertinent : $\sigma^2 \sim 1/n$.

Matrices aléatoires

$$\mathrm{Var}(\lambda_{\mathsf{max}}) \leq ?$$

Matrices aléatoires

$$\mathrm{Var}(\lambda_{\mathsf{max}}) \leq ?$$

- $\mathrm{Var}(\lambda_{\mathsf{max}}) \leq C/n$ (théorie classique)

Matrices aléatoires

$$\mathrm{Var}(\lambda_{\mathsf{max}}) \leq ?$$

- $\mathrm{Var}(\lambda_{\mathsf{max}}) \leq C/n$ (théorie classique)
- $\mathrm{Var}(\lambda_{\mathsf{max}}) \leq C/n^{4/3}$.

$$\mathrm{Var}(\lambda_{\mathsf{max}}) \leq ?$$

- $\mathrm{Var}(\lambda_{\mathsf{max}}) \leq C/n$ (théorie classique)
- $\mathrm{Var}(\lambda_{\mathsf{max}}) \leq C/n^{4/3}$.

convergence en loi ?

Matrices aléatoires

$$\mathrm{Var}(\lambda_{\max}) \leq ?$$

- $\mathrm{Var}(\lambda_{\max}) \leq C/n$ (théorie classique)
- $\mathrm{Var}(\lambda_{\max}) \leq C/n^{4/3}$.

convergence en loi ?

Théorème [Tracy-Widom]

$$n^{2/3}(\lambda_{\max} - 1) \xrightarrow{\mathcal{L}} TW$$

Autres exemples

- Premier temps de passage en percolation dirigée.
- Energie libre modèles verres de spins (REM, GREM, SK, ...).
- Champ libre gaussien discret sur $\mathbb{Z}^2$.
- Statistiques d'ordre d'un échantillon (maximum, médiane,...).
- ...

Autres exemples

- Premier temps de passage en percolation dirigée.
- Energie libre modèles verres de spins (REM, GREM, SK, ...).
- Champ libre gaussien discret sur $\mathbb{Z}^2$.
- Statistiques d'ordre d'un échantillon (maximum, médiane,...).
- ...

- Chaque modèle, méthode ad-hoc, parfois très technique

Autres exemples

- Premier temps de passage en percolation dirigée.
- Energie libre modèles verres de spins (REM, GREM, SK, ...).
- Champ libre gaussien discret sur $\mathbb{Z}^2$.
- Statistiques d'ordre d'un échantillon (maximum, médiane,...).
- ...

- Chaque modèle, méthode ad-hoc, parfois très technique
- Propriétés communes ? Peut-on dégager un cadre général permettant d'obtenir de la sous-linéarité ?

Autres exemples

- Premier temps de passage en percolation dirigée.
- Energie libre modèles verres de spins (REM, GREM, SK, ...).
- Champ libre gaussien discret sur $\mathbb{Z}^2$.
- Statistiques d'ordre d'un échantillon (maximum, médiane,...).
- ...

- Chaque modèle, méthode ad-hoc, parfois très technique
- Propriétés communes ? Peut-on dégager un cadre général permettant d'obtenir de la sous-linéarité ?

Approche de la thèse : interpolation par semi-groupe et hypercontractivité.

Autres exemples

- Premier temps de passage en percolation dirigée.
- Energie libre modèles verres de spins (REM, GREM, SK, . . .).
- Champ libre gaussien discret sur $\mathbb{Z}^2$.
- Statistiques d'ordre d'un échantillon (maximum, médiane,. . .).
- . . .

- Chaque modèle, méthode ad-hoc, parfois très technique
- Propriétés communes ? Peut-on dégager un cadre général permettant d'obtenir de la sous-linéarité ?

Approche de la thèse : interpolation par semi-groupe et hypercontractivité.
Attention : Hypercontractivité = gain logarithmique (sous-linéarité)

Superconcentration pour des suites gaussiennes stationnaires

Suite gaussienne stationnaire

$(X_n)_{n\geq 0}$ suite gaussienne centrée stationnaire, de fonction de covariance $\mathbb{E}[X_i X_j] = \phi(|i-j|)$ où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$.

Suite gaussienne stationnaire

$(X_n)_{n\geq 0}$ suite gaussienne centrée stationnaire, de fonction de covariance $\mathbb{E}[X_i X_j] = \phi(|i-j|)$ où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$.

Théorie des extrêmes [Berman]

Si $\phi(n)\log n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ alors

$$\sqrt{2\log n}\big(M_n - b_n\big) \xrightarrow{\mathcal{L}} \Lambda_0$$

avec $M_n = \max_{i=1,\dots,n} X_i$.

Suite gaussienne stationnaire

$(X_n)_{n\geq 0}$ suite gaussienne centrée stationnaire, de fonction de covariance $\mathbb{E}[X_i X_j] = \phi(|i-j|)$ où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$.

Théorie des extrêmes [Berman]

Si $\phi(n) \log n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ alors

$$\sqrt{2\log n}\big(M_n - b_n\big) \xrightarrow{\mathcal{L}} \Lambda_0$$

avec $M_n = \max_{i=1,\ldots,n} X_i$.

Loi de Gumbel : $\mathbb{P}(\Lambda_0 \geq t) = 1 - e^{-e^{-t}}$ $\quad$ ($\sim e^{-t}$ pour t grand)

Suite gaussienne stationnaire

Variance

- $\mathrm{Var}(M_n) \leq 1$ (théorie classique).
- $\mathrm{Var}(M_n) \leq C / \log n$ [Chatterjee].

Suite gaussienne stationnaire

Variance

- $\mathrm{Var}(M_n) \leq 1$ (théorie classique).
- $\mathrm{Var}(M_n) \leq C / \log n$ [Chatterjee].

Outils : représentation de la variance par semi-groupe et hypercontractivité.

Inégalité de Talagrand

γ_n mesure gaussienne standard sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème [Talagrand]

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sufisamment régulière

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) \leq C \sum_{i=1}^{n} \frac{\|\partial_i f\|_2^2}{1 + \log \frac{\|\partial_i f\|_2}{\|\partial_i f\|_1}}$$

Amélioration de l'inégalité de Poincaré.
Démonstration ?

Semi-groupe

Semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck

$$P_t(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y)d\gamma_n(y) \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$$

Semi-groupe

Semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck

$$P_t(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)d\gamma_n(y) \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$$

Hypercontractivité

$$\|P_t f\|_q \leq \|f\|_{p(t)}, \quad p(t) = (q-1)e^{-2t} + 1, t > 0$$

Note : $p(t) < q$ (améliore la borne obtenue par l'inégalité de Jensen).

Formule de représentation

Interpolation par semi-groupe

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) \quad = \quad 2\int_0^{\infty} e^{-2t} \int_{\mathbb{R}^n} |P_t \nabla f|^2 d\gamma_n dt$$

Formule de représentation

Interpolation par semi-groupe

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) &= 2\int_0^{\infty} e^{-2t} \int_{\mathbb{R}^n} |P_t \nabla f|^2 d\gamma_n dt \\
&= 2\int_0^{\infty} e^{-2t} \sum_{i=1}^{n} \|P_t(\partial_i f)\|_2^2 dt
\end{aligned}
$$

Formule de représentation

Interpolation par semi-groupe

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) &= 2\int_0^\infty e^{-2t}\int_{\mathbb{R}^n}|P_t\nabla f|^2 d\gamma_n dt\\ &= 2\int_0^\infty e^{-2t}\sum_{i=1}^n \|P_t(\partial_i f)\|_2^2 dt\end{aligned}$$

Hypercontractivité

Pour $i = 1, \ldots, n$

$$\|P_t(\partial_i f)\|_2 \leq \|\partial_i f\|_{p(t)} \quad p(t) = 1 + e^{-2t},\ t > 0.$$

Permet d'obtenir l'inégalité de Talagrand (après quelques arguments d'interpolation utilisant l'inégalité de Hölder)

Application

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$, $M_n = \max_{i=1,\ldots,n} X_i$

Application

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$, $M_n = \max_{i=1,\ldots,n} X_i$

Superconcentration

$$\mathrm{Var}(M_n) \leq \frac{C}{\log n}$$

Application

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$, $M_n = \max_{i=1,\ldots,n} X_i$

Superconcentration

$$\mathrm{Var}(M_n) \leq \frac{C}{\log n}$$

Démonstration :

$$f(x) = \max_{i=1,\ldots,n} x_i =$$

Application

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$, $M_n = \max_{i=1,\ldots,n} X_i$

Superconcentration

$$\mathrm{Var}(M_n) \leq \frac{C}{\log n}$$

Démonstration :

$$f(x) = \max_{i=1,\ldots,n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i 1_{A_i}, \quad A_i = \{x_i \geq x_j \,\forall j\}$$

Application

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$, $M_n = \max_{i=1,\ldots,n} X_i$

Superconcentration

$$\mathrm{Var}(M_n) \leq \frac{C}{\log n}$$

Démonstration :

$$f(x) = \max_{i=1,\ldots,n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i 1_{A_i}, \quad A_i = \{x_i \geq x_j \, \forall j\}$$

Appliquons l'inégalité de Talagrand

Application

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$, $M_n = \max_{i=1,\ldots,n} X_i$

Superconcentration

$$\mathrm{Var}(M_n) \leq \frac{C}{\log n}$$

Démonstration :

$$f(x) = \max_{i=1,\ldots,n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i 1_{A_i}, \quad A_i = \{x_i \geq x_j \, \forall j\}$$

Appliquons l'inégalité de Talagrand

$$\partial_i(f) = 1_{A_i}$$

Application

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$, $M_n = \max_{i=1,\ldots,n} X_i$

Superconcentration

$$\mathrm{Var}(M_n) \leq \frac{C}{\log n}$$

Démonstration :

$$f(x) = \max_{i=1,\ldots,n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i 1_{A_i}, \quad A_i = \{x_i \geq x_j \, \forall j\}$$

Appliquons l'inégalité de Talagrand

$$\partial_i(f) = 1_{A_i} \quad \|\partial_i f\|_2^2 = \|\partial_i f\|_1 = \mathbb{P}(X_i \geq X_j \, \forall j)$$

Application

$X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$, $M_n = \max_{i=1,\dots,n} X_i$

Superconcentration

$$\mathrm{Var}(M_n) \leq \frac{C}{\log n}$$

Démonstration :

$$f(x) = \max_{i=1,\dots,n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i 1_{A_i}, \quad A_i = \{x_i \geq x_j \,\forall j\}$$

Appliquons l'inégalité de Talagrand

$$\partial_i(f) = 1_{A_i} \quad \|\partial_i f\|_2^2 = \|\partial_i f\|_1 = \mathbb{P}(X_i \geq X_j \,\forall j) = \frac{1}{n}$$

Au niveau de la variance

Inégalité Talagrand se comporte mal vis à vis des corrélations !

Au niveau de la variance

Inégalité Talagrand se comporte mal vis à vis des corrélations !

Soit $X \sim \mathcal{N}(0, \Gamma)$

Théorème [Chatterjee]

$\exists r_0 \geq 0$ et $\exists \mathcal{C}$ recouvrement de $\{1, \ldots, n\}$ tel que $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$

Au niveau de la variance

Inégalité Talagrand se comporte mal vis à vis des corrélations !

Soit $X \sim \mathcal{N}(0, \Gamma)$

Théorème [Chatterjee]

$\exists r_0 \geq 0$ et $\exists \mathcal{C}$ recouvrement de $\{1, \ldots, n\}$ tel que $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$
si $\mathbb{E}[X_i X_j] = \Gamma_{ij} \geq r_0$ alors $\exists D \in \mathcal{C}, \quad i, j \in D$

Au niveau de la variance

Inégalité Talagrand se comporte mal vis à vis des corrélations !

Soit $X \sim \mathcal{N}(0, \Gamma)$

Théorème [Chatterjee]

$\exists r_0 \geq 0$ et $\exists \mathcal{C}$ recouvrement de $\{1, \ldots, n\}$ tel que $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$ si $\mathbb{E}[X_i X_j] = \Gamma_{ij} \geq r_0$ alors $\exists D \in \mathcal{C}, \quad i, j \in D$

$I = \mathrm{argmax_i} X_i$ et $\rho(r_0) = \max_{D \in \mathcal{C}} \mathbb{P}(I \in D)$.

Inégalité Talagrand se comporte mal vis à vis des corrélations !

Soit $X \sim \mathcal{N}(0, \Gamma)$

Théorème [Chatterjee]

$\exists r_0 \geq 0$ et $\exists \mathcal{C}$ recouvrement de $\{1, \ldots, n\}$ tel que $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$
si $\mathbb{E}[X_i X_j] = \Gamma_{ij} \geq r_0$ alors $\exists D \in \mathcal{C}, \quad i, j \in D$

$I = \mathrm{argmax_i} X_i$ et $\rho(r_0) = \max_{D \in \mathcal{C}} \mathbb{P}(I \in D)$.
Alors

$$\mathrm{Var}(M_n) \leq C \left(r_0 + \frac{1}{\log 1/\rho(r_0)} \right)$$

Idée de preuve du théorème de Chatterjee

$X \sim \mathcal{N}(0,\Gamma)$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière

Représentation de la variance

$$\mathrm{Var}\big(f(X)\big) = 2\int_0^\infty e^{-2t} \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}\mathbb{E}[\partial_j f(X) P_t(\partial_i f)(X)]dt.$$

$(P_t)_{t\geq 0}$ semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck.

Idée de preuve du théorème de Chatterjee

$X \sim \mathcal{N}(0,\Gamma)$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière

Représentation de la variance

$$\mathrm{Var}\big(f(X)\big) = 2\int_0^\infty e^{-2t} \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}\mathbb{E}[\partial_j f(X) P_t(\partial_i f)(X)]dt.$$

$(P_t)_{t\geq 0}$ semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck.

On choisit $f(x) = \max_{i=1,\dots,n} x_i$

Idée de preuve du théorème de Chatterjee

$X \sim \mathcal{N}(0,\Gamma)$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière

Représentation de la variance

$$\operatorname{Var}\big(f(X)\big) = 2\int_0^\infty e^{-2t} \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}\mathbb{E}[\partial_j f(X) P_t(\partial_i f)(X)]dt.$$

$(P_t)_{t\geq 0}$ semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck.

On choisit $f(x) = \max_{i=1,\dots,n} x_i$

Idée de preuve

- Γ vérifie une propriété de « recouvrement »(permet de regrouper les Γ_{ij} par paquet de même « taille »).

Idée de preuve du théorème de Chatterjee

$X \sim \mathcal{N}(0, \Gamma)$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière

Représentation de la variance

$$\mathrm{Var}\big(f(X)\big) = 2\int_0^\infty e^{-2t} \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}\mathbb{E}[\partial_j f(X) P_t(\partial_i f)(X)]dt.$$

$(P_t)_{t\geq 0}$ semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck.

On choisit $f(x) = \max_{i=1,\ldots,n} x_i$

Idée de preuve

- Γ vérifie une propriété de « recouvrement »(permet de regrouper les Γ_{ij} par paquet de même « taille »).
- $(P_t)_{t\geq 0}$ est hypercontractif, cela permet de contrôler la taille de chacun de ces paquets.

Suite gaussienne stationnaire

$M_n = \max_{i=1,\dots,n} X_i$

Rappel

$$\sqrt{2\log n}\big(M_n - b_n\big) \xrightarrow{\mathcal{L}} \Lambda_0$$

avec $\mathbb{P}(\Lambda_0 \geq t) = 1 - e^{-e^{-t}}$.

Inégalité de concentration non asymptotique ?

Suite gaussienne stationnaire

$M_n = \max_{i=1,\dots,n} X_i$

Rappel

$$\sqrt{2\log n}\big(M_n - b_n\big) \xrightarrow{\mathcal{L}} \Lambda_0$$

avec $\mathbb{P}(\Lambda_0 \geq t) = 1 - e^{-e^{-t}}$.

Inégalité de concentration non asymptotique ?

Objectif

- $\mathbb{P}(\sqrt{2\log n}(M_n - b_n) \geq t) \leq \psi_1(t), \quad t \geq 0$
- $\mathbb{P}(\sqrt{2\log n}(M_n - b_n) \leq -t) \leq \psi_2(t), \quad t \geq 0$

avec ψ_i, $i = 1, 2$ reflétant les asymptotiques de la loi de Gumbel.

Concentration gaussienne

Soit $f \; : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ L-lipschitzienne et $X \sim \mathcal{N}(0, I_d)$ alors

Théorème [Borell, Sudakov-Tsirel'son]

$$\mathbb{P}\Big(|f(X) - \mathbb{E}\big[f(X)\big]| \geq t \Big) \leq 2e^{-t^2/2L}$$

$f(x) = \max_{i=1,\dots,n} x_i$ est 1-lipschitzienne.

Concentration gaussienne

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ L-lipschitzienne et $X \sim \mathcal{N}(0, I_d)$ alors

Théorème [Borell, Sudakov-Tsirel'son]

$$\mathbb{P}\Big(|f(X) - \mathbb{E}[f(X)]| \geq t \Big) \leq 2e^{-t^2/2L}$$

$f(x) = \max_{i=1,\dots,n} x_i$ est 1-lipschitzienne.

$\mathbb{P}(\sqrt{2\log n}|M_n - \mathbb{E}[M_n]| \geq t) \leq 2e^{-t^2/4\log n}$ (théorie classique)

- La décroissance gaussienne ne correspond pas au comportement de la loi limite.

Concentration gaussienne

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ L-lipschitzienne et $X \sim \mathcal{N}(0, I_d)$ alors

Théorème [Borell, Sudakov-Tsirel'son]

$$\mathbb{P}\Big(|f(X) - \mathbb{E}[f(X)]| \geq t\Big) \leq 2e^{-t^2/2L}$$

$f(x) = \max_{i=1,\dots,n} x_i$ est 1-lipschitzienne.

$\mathbb{P}(\sqrt{2\log n}|M_n - \mathbb{E}[M_n]| \geq t) \leq 2e^{-t^2/4\log n}$ (théorie classique)

- La décroissance gaussienne ne correspond pas au comportement de la loi limite.
- la dépendance en n est très mauvaise.

Concentration gaussienne

Soit $f\ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ L-lipschitzienne et $X \sim \mathcal{N}(0, I_d)$ alors

Théorème [Borell, Sudakov-Tsirel'son]

$$\mathbb{P}\Big(|f(X) - \mathbb{E}\big[f(X)\big]| \geq t\Big) \leq 2e^{-t^2/2L}$$

$f(x) = \max_{i=1,\dots,n} x_i$ est 1-lipschitzienne.

$\mathbb{P}(\sqrt{2\log n}|M_n - \mathbb{E}[M_n]| \geq t) \leq 2e^{-t^2/4\log n}$ (théorie classique)

- La décroissance gaussienne ne correspond pas au comportement de la loi limite.
- la dépendance en n est très mauvaise.

Inégalité de superconcentration ?

Suite gaussienne stationnaire

Inégalité de superconcentration [T.]

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{2\log n}|M_n - \mathbb{E}[M_n]| \geq t\right) \leq 3e^{-ct}$$

Inégalité de superconcentration [T.]

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{2\log n}|M_n - \mathbb{E}[M_n]| \geq t\right) \leq 3e^{-ct}$$

- Modulo une constante multiplicative, on a le même résultat avec b_n à la place de $\mathbb{E}[M_n]$.

Suite gaussienne stationnaire

Inégalité de superconcentration [T.]

$$\mathbb{P}\big(\sqrt{2\log n}|M_n - \mathbb{E}[M_n]| \geq t\big) \leq 3e^{-ct}$$

- Modulo une constante multiplicative, on a le même résultat avec b_n à la place de $\mathbb{E}[M_n]$.
- Corresponds à l'asymptotique de la loi de Gumbel (t grand),

Suite gaussienne stationnaire

Inégalité de superconcentration [T.]

$$\mathbb{P}\big(\sqrt{2\log n}|M_n - \mathbb{E}[M_n]| \geq t\big) \leq 3e^{-ct}$$

- Modulo une constante multiplicative, on a le même résultat avec b_n à la place de $\mathbb{E}[M_n]$.
- Corresponds à l'asymptotique de la loi de Gumbel (t grand),
- Redonne la borne optimale sur la variance,

Suite gaussienne stationnaire

Inégalité de superconcentration [T.]

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{2\log n}|M_n - \mathbb{E}[M_n]| \geq t\right) \leq 3e^{-ct}$$

- Modulo une constante multiplicative, on a le même résultat avec b_n à la place de $\mathbb{E}[M_n]$.
- Corresponds à l'asymptotique de la loi de Gumbel (t grand),
- Redonne la borne optimale sur la variance,
- Découle d'un théorème plus général, valable pour une large classe de champs gaussiens stationnaires.

Idée de preuve

Objectif : $\mathbb{P}\Big(\sqrt{2\log n}|M_n - \mathbb{E}[M_n]| \geq t\Big) \leq 3e^{-ct}$

Idée de preuve

Objectif : $\mathbb{P}\left(\sqrt{2\log n}|M_n - \mathbb{E}[M_n]| \geq t\right) \leq 3e^{-ct}$

Lemme

$$\text{Si } \mathrm{Var}(e^{\theta Z/2}) \leq \frac{\theta^2}{4} K \mathbb{E}[e^{\theta Z}] \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Idée de preuve

Objectif : $\mathbb{P}\big(\sqrt{2\log n}|M_n - \mathbb{E}[M_n]| \geq t\big) \leq 3e^{-ct}$

Lemme

Si $\mathrm{Var}(e^{\theta Z/2}) \leq \frac{\theta^2}{4} K \mathbb{E}[e^{\theta Z}] \quad \theta \in \mathbb{R}$ alors

$$\mathbb{P}\big(\sqrt{K^{-1}}|Z - \mathbb{E}[Z]| \geq t\big) \leq 6e^{-ct}, \quad t \geq 0 \tag{1}$$

On veut obtenir (1) pour $Z = M_n = \max_{i=1,\dots,n} X_i$ avec $K \sim \mathrm{Var}(M_n) \sim C/\log n$.

Idée de preuve

Objectif : $\mathbb{P}\big(\sqrt{2\log n}|M_n - \mathbb{E}[M_n]| \geq t\big) \leq 3e^{-ct}$

Lemme

$$\text{Si } \mathrm{Var}(e^{\theta Z/2}) \leq \frac{\theta^2}{4} K \mathbb{E}[e^{\theta Z}] \qquad \theta \in \mathbb{R} \text{ alors}$$

$$\mathbb{P}\big(\sqrt{K^{-1}}|Z - \mathbb{E}[Z]| \geq t\big) \leq 6e^{-ct}, \qquad t \geq 0 \tag{1}$$

On veut obtenir (1) pour $Z = M_n = \max_{i=1,\dots,n} X_i$ avec $K \sim \mathrm{Var}(M_n) \sim C/\log n$.

Preuve : Extension du théorème de Chatterjee au niveau exponentiel.

Inégalités de Talagrand d'ordre supérieur

Inégalité de Talagrand

Rappel : γ_n mesure gaussienne standard sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème [Talagrand]

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sufisamment régulière

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) \leq C \sum_{i=1}^{n} \frac{\|\partial_i f\|_2^2}{1 + \log \frac{\|\partial_i f\|_2}{\|\partial_i f\|_1}}$$

Découle d'une formule de représentation de la variance et d'une propriété d'hypercontractivité.

Inégalité de Talagrand d'ordre supérieur

Question :

Formule de représentation alternative

$$\Downarrow$$

Inégalité de Talagrand d'ordre 2 ?

Formule de représentation

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière, $|\cdot|$ norme euclidienne.

Développement de la variance

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla f \, d\gamma_n \right|^2 \\ &+ 2 \int_0^\infty e^{-2u}(1 - e^{-2u}) \int_{\mathbb{R}^n} \left| P_u(\nabla^2 f) \right|^2 d\gamma_n du \end{aligned}$$

Formule de représentation

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière, $|\cdot|$ norme euclidienne.

Développement de la variance

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla f \, d\gamma_n \right|^2 \\ &+ 2 \int_0^\infty e^{-2u}(1-e^{-2u}) \int_{\mathbb{R}^n} \left| P_u(\nabla^2 f) \right|^2 d\gamma_n du\end{aligned}$$

- Décomposition L^2 (polynômes d'Hermite) + reste intégral

Formule de représentation

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière, $|\cdot|$ norme euclidienne.

Développement de la variance

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla f \, d\gamma_n \right|^2 \\ &+ 2 \int_0^{\infty} e^{-2u}(1 - e^{-2u}) \int_{\mathbb{R}^n} \left| P_u(\nabla^2 f) \right|^2 d\gamma_n du\end{aligned}$$

- Décomposition L^2 (polynômes d'Hermite) + reste intégral
- Mélange des travaux de Houdré, Kagan, Perez-Abreu, Ledoux, ...

Formule de représentation

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière, $|\cdot|$ norme euclidienne.

Développement de la variance

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla f \, d\gamma_n \right|^2 \\ &+ 2 \int_0^\infty e^{-2u}(1 - e^{-2u}) \int_{\mathbb{R}^n} \left| P_u(\nabla^2 f) \right|^2 d\gamma_n du\end{aligned}$$

- Décomposition L^2 (polynômes d'Hermite) + reste intégral
- Mélange des travaux de Houdré, Kagan, Perez-Abreu, Ledoux, ...
- Inégalité Poincaré inverse immédiate.

Preuve

Formule de représentation

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) = 2\int_0^{\infty} e^{-2t} \int_{\mathbb{R}^n} |P_t \nabla f|^2 d\gamma_n dt$$

Preuve

Formule de représentation

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) = 2\int_0^{\infty} e^{-2t}\int_{\mathbb{R}^n} |P_t\nabla f|^2 d\gamma_n dt$$

On pose $K(t) = \int_{\mathbb{R}^n} |P_t\nabla f|^2 d\gamma_n, \quad t \geq 0$

Preuve

Formule de représentation

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) = 2\int_0^{\infty} e^{-2t}\int_{\mathbb{R}^n} |P_t \nabla f|^2 d\gamma_n dt$$

On pose $K(t) = \int_{\mathbb{R}^n} |P_t \nabla f|^2 d\gamma_n, \quad t \geq 0$

$$K(s) - K(t) = \int_t^s K'(u) du$$

Preuve

Formule de représentation

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) = 2\int_0^\infty e^{-2t}\int_{\mathbb{R}^n} |P_t \nabla f|^2 d\gamma_n dt$$

On pose $K(t) = \int_{\mathbb{R}^n} |P_t \nabla f|^2 d\gamma_n, \quad t \geq 0$

$$K(s) - K(t) = \int_t^s K'(u)du$$

$s \to \infty$ par ergodicité $K(\infty) = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla f \, d\gamma_n \right|^2.$

Par intégration par partie ($\int_{\mathbb{R}^n} f(-Lf) d\gamma_n = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma_n$)

et propriété de commutation ($\nabla P_t = e^{-t} P_t \nabla$)

$$K'(u) = \frac{d}{du} \int_{\mathbb{R}^n} |P_u \nabla f|^2 d\gamma_n =$$

Par intégration par partie ($\int_{\mathbb{R}^n} f(-Lf)d\gamma_n = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma_n$)

et propriété de commutation ($\nabla P_t = e^{-t} P_t \nabla$)

$$K'(u) = \frac{d}{du} \int_{\mathbb{R}^n} |P_u \nabla f|^2 d\gamma_n = -2 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2u} |P_u \nabla^2 f|^2 d\gamma_n$$

Par intégration par partie ($\int_{\mathbb{R}^n} f(-Lf)d\gamma_n = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma_n$)

et propriété de commutation ($\nabla P_t = e^{-t} P_t \nabla$)

$$K'(u) = \frac{d}{du}\int_{\mathbb{R}^n} |P_u \nabla f|^2 d\gamma_n = -2\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2u} |P_u \nabla^2 f|^2 d\gamma_n$$

Finalement

$$K(t) = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \nabla f \, d\gamma_n\right|^2 + 2\int_t^{\infty} e^{-2u} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2u} |P_u \nabla^2 f|^2 d\gamma_n du$$

Il suffit de substituer l'expression de $K(t)$ dans la formule de représentation pour conclure.

1ère itération

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla f \, d\gamma_n \right|^2 \\ &+ 2\int_0^\infty e^{-2u}(1-e^{-2u}) \int_{\mathbb{R}^n} \left| P_u(\nabla^2 f) \right|^2 d\gamma_n du\end{aligned}$$

1ère itération

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \nabla f \, d\gamma_n\right|^2 \\ &+ 2\int_0^\infty e^{-2u}(1-e^{-2u}) \int_{\mathbb{R}^n} \left|P_u(\nabla^2 f)\right|^2 d\gamma_n du\end{aligned}$$

En itérant schéma de preuve (on pose $K_2(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left|P_u(\nabla^2 f)\right|^2 d\gamma_n \dots$)

1ère itération

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \nabla f \, d\gamma_n\right|^2 \\ &+ 2\int_0^{\infty} e^{-2u}(1-e^{-2u}) \int_{\mathbb{R}^n} \left|P_u(\nabla^2 f)\right|^2 d\gamma_n du\end{aligned}$$

En itérant schéma de preuve (on pose $K_2(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left|P_u(\nabla^2 f)\right|^2 d\gamma_n \ldots$)

Itération à l'ordre p

$p \geq 1$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) &= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!}\left|\int_{\mathbb{R}^n} \nabla^k f \, d\gamma_n\right|^2 \\ &+ \frac{2}{p!}\int_0^{\infty} e^{-2t}(1-e^{-2t})^p \int_{\mathbb{R}^n} \left|P_t(\nabla^{p+1} f)\right|^2 d\gamma_n dt\end{aligned}$$

Inégalité Talagrand d'ordre 2

Contrôlons le reste avec la propriété d'hypercontractivité de $(P_t)_{t\geq 0}$.

$$
\begin{aligned}
R &= 2\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^{\infty} e^{-2u}(1-e^{-2u})\int_{\mathbb{R}^n}\Big[P_u\big(\partial_{ij}f\big)\Big]^2 d\gamma_n du \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^{\infty} e^{-2u}(1-e^{-2u})\|P_u\big(\partial_{ij}f\big)\|_2^2 du
\end{aligned}
$$

Inégalité Talagrand d'ordre 2

Contrôlons le reste avec la propriété d'hypercontractivité de $(P_t)_{t\geq 0}$.

$$
\begin{aligned}
R &= 2\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^{\infty} e^{-2u}(1-e^{-2u})\int_{\mathbb{R}^n}\Big[P_u\big(\partial_{ij}f\big)\Big]^2 d\gamma_n du \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^{\infty} e^{-2u}(1-e^{-2u})\|P_u\big(\partial_{ij}f\big)\|_2^2 du
\end{aligned}
$$

On poursuit la preuve de l'inégalité de Talagrand avec une amélioration grâce au facteur $1-e^{-2u}$

Inégalités Talagrand d'ordre 2

Théorème [T.]

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) \quad \leq \quad \left| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla f \, d\gamma_n \right|^2 + C \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\|\partial_{ij} f\|_2^2}{\left[1 + \log \frac{\|\partial_{ij} f\|_2}{\|\partial_{ij} f\|_1}\right]^2}$$

Inégalités Talagrand d'ordre 2

Théorème [T.]

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) \leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla f \, d\gamma_n \right|^2 + C \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\|\partial_{ij} f\|_2^2}{\left[1 + \log \frac{\|\partial_{ij} f\|_2}{\|\partial_{ij} f\|_1}\right]^2}$$

Remarque : cette inégalité peut s'obtenir à n'importe quel ordre $p \geq 1$.

Analyse booléenne

Analyse booléenne

Historiquement, l'inégalité de Talagrand a été obtenue sur $C_n = \{-1, 1\}^n$ avec $\mu^n = (\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1)^{\otimes n}$.

Analyse booléenne

Historiquement, l'inégalité de Talagrand a été obtenue sur $C_n = \{-1, 1\}^n$ avec $\mu^n = (\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1)^{\otimes n}$.

Théorème [Talagrand]

$f \ : \ C_n \to \{0, 1\}$

$$\mathrm{Var}_{\mu^n}(f) \leq C \sum_{i=1}^{n} \frac{\|D_i f\|_2^2}{1 + \log \frac{\|D_i f\|_2}{\|D_i f\|_1}}$$

avec $D_i f(x) = \frac{f(x) - f\left(\tau_i(x)\right)}{2}$ $\quad \tau_i(x) = (x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_n)$, $x \in C_n$.

Influence et théorème de KKL

$f\ : C_n \to \{0,1\}, \quad \mu^n = (\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1)^{\otimes n}$

Influence

$$I_i(f) = \mathbb{P}\big(f(X) \neq f\big(\tau_i(X)\big)\big), \quad \mathcal{L}(X) = \mu^n$$

Probabilité que i-ème coordonnée soit pivotale pour l'entrée X

Influence et théorème de KKL

$$f \; : C_n \to \{0,1\}, \quad \mu^n = (\tfrac{1}{2}\delta_{-1} + \tfrac{1}{2}\delta_1)^{\otimes n}$$

Influence

$$I_i(f) = \mathbb{P}\big(f(X) \neq f\big(\tau_i(X)\big)\big), \quad \mathcal{L}(X) = \mu^n$$

Probabilité que i-ème coordonnée soit pivotale pour l'entrée X

Théorème [Kalai-Kahn-Linial]

$$\forall f \; : \; C_n \to \{0,1\}, \, \exists i \in \{1, \dots, n\} \quad I_i(f) \geq c\frac{\log n}{n}$$

(optimalité sur les fonctions tribus)

Influence et théorème de KKL

$$f : C_n \to \{0,1\}, \quad \mu^n = (\tfrac{1}{2}\delta_{-1} + \tfrac{1}{2}\delta_1)^{\otimes n}$$

Influence

$$I_i(f) = \mathbb{P}\big(f(X) \neq f\big(\tau_i(X)\big)\big), \quad \mathcal{L}(X) = \mu^n$$

Probabilité que i-ème coordonnée soit pivotale pour l'entrée X

Théorème [Kalai-Kahn-Linial]

$$\forall f : C_n \to \{0,1\}, \exists i \in \{1,\ldots,n\} \quad I_i(f) \geq c\frac{\log n}{n}$$

(optimalité sur les fonctions tribus)

théorème KKL peut-être prouvé via l'inégalité de Talagrand

Inégalité de Talagrand

$f \ : \ C_n \to \{0, 1\}$

$$I_i(f) = \|D_i f\|_1 = \|D_i f\|_2^2, \quad i = 1, \dots, n$$

(modulo constantes numériques)

Inégalité de Talagrand

$f \ : \ C_n \to \{0,1\}$

$$I_i(f) = \|D_i f\|_1 = \|D_i f\|_2^2, \quad i = 1, \ldots, n$$

(modulo constantes numériques)

Inegalité de Talagrand en terme d'influences

$$\mathrm{Var}_{\mu^n}(f) \leq C \sum_{i=1}^{n} \frac{I_i(f)}{1 + \log \frac{1}{1/\sqrt{I_i(f)}}}.$$

Application : théorème de Kahn-Kalai-Linial

S'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $I_i(f) \geq \frac{C}{\sqrt{n}}$ alors $I_i(f) \geq C \frac{\log n}{n}$.

Application : théorème de Kahn-Kalai-Linial

S'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $I_i(f) \geq \frac{C}{\sqrt{n}}$ alors $I_i(f) \geq C\frac{\log n}{n}$.

$$\text{Sinon } \forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad I_i(f) \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \qquad (1)$$

Application : théorème de Kahn-Kalai-Linial

S'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $I_i(f) \geq \frac{C}{\sqrt{n}}$ alors $I_i(f) \geq C \frac{\log n}{n}$.

$$\text{Sinon } \forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad I_i(f) \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \qquad (1)$$

l'inégalité de Talagrand implique alors

$$\exists i \in \{1, \ldots, n\} \quad \text{tel que} \quad \frac{C}{n} \leq \frac{I_i(f)}{1 + \log \frac{1}{1/\sqrt{I_i(f)}}} \qquad (2)$$

Application : théorème de Kahn-Kalai-Linial

S'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $I_i(f) \geq \frac{C}{\sqrt{n}}$ alors $I_i(f) \geq C\frac{\log n}{n}$.

$$\text{Sinon } \forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad I_i(f) \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \qquad (1)$$

l'inégalité de Talagrand implique alors

$$\exists i \in \{1, \ldots, n\} \quad \text{tel que} \quad \frac{C}{n} \leq \frac{I_i(f)}{1+\log \frac{1}{1/\sqrt{I_i(f)}}} \qquad (2)$$

Il suffit d'utiliser (1) pour en déduire $\frac{C}{n} \leq \frac{I_i(f)}{\log n}$ à partir de (2).

Influence d'ordre 2

$f : \{-1,1\}^n \to \{0,1\}$ on définit

Influence d'ordre 2

$(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$.

$$I_{(i,j)}(f) = \mathbb{P}\big((i,j)\,\text{est pivotale}\big)$$

Influence d'ordre 2

$f\ :\ \{-1,1\}^n \to \{0,1\}$ on définit

Influence d'ordre 2

$(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$.

$$I_{(i,j)}(f) = \mathbb{P}\big((i,j)\,\text{est pivotale}\big)$$

Attention $I_{(i,i)}(f) = I_i(f)$!

Influence d'ordre 2

$f : \{-1,1\}^n \to \{0,1\}$ on définit

Influence d'ordre 2

$(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$.

$$I_{(i,j)}(f) = \mathbb{P}\big((i,j)\,\text{est pivotale}\big)$$

Attention $I_{(i,i)}(f) = I_i(f)$!

Similairement (modulo constantes numériques)

$$I_{(i,j)}(f) = \|D_{ij}f\|_2^2 = \|D_{ij}f\|_1, \qquad (\text{avec } D_{ij} = D_i \circ D_j)$$

Influence d'ordre 2

$f \ : \ \{-1,1\}^n \to \{0,1\}$ on définit

Influence d'ordre 2

$(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$.

$$I_{(i,j)}(f) = \mathbb{P}\big((i,j)\,\text{est pivotale}\big)$$

Attention $I_{(i,i)}(f) = I_i(f)$!

Similairement (modulo constantes numériques)

$$I_{(i,j)}(f) = \|D_{ij}f\|_2^2 = \|D_{ij}f\|_1, \qquad (\text{avec}\ D_{ij} = D_i \circ D_j)$$

Inégalité de Talagrand d'ordre 2 sur le cube ?

Influence d'ordre 2

$f : \{-1,1\}^n \to \{0,1\}$ on définit

Influence d'ordre 2

$(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$.

$$I_{(i,j)}(f) = \mathbb{P}\big((i,j)\,\text{est pivotale}\big)$$

Attention $I_{(i,i)}(f) = I_i(f)$!

Similairement (modulo constantes numériques)

$$I_{(i,j)}(f) = \|D_{ij}f\|_2^2 = \|D_{ij}f\|_1, \qquad (\text{avec}\; D_{ij} = D_i \circ D_j)$$

Inégalité de Talagrand d'ordre 2 sur le cube ? Oui ! (même preuve par semi-groupe à deux détails techniques près)

Sur le cube

Inégalité de Talagrand d'ordre 2 [T.]

$$\mathrm{Var}_{\mu^n}(f) \quad \leq \quad C \sum_{i=1}^{n} \|D_i f\|_p^2 + C \sum_{i \neq j} \frac{\|D_{ij} f\|_2^2}{\left[1 + \log \frac{\|D_{ij} f\|_2}{\|D_{ij} f\|_1}\right]^2}$$

avec $1 < p < 2$.

Sur le cube

Inégalité de Talagrand d'ordre 2 [T.]

$$\mathrm{Var}_{\mu^n}(f) \quad \leq \quad C\sum_{i=1}^{n} \|D_i f\|_p^2 + C\sum_{i\neq j} \frac{\|D_{ij}f\|_2^2}{\left[1+\log\frac{\|D_{ij}f\|_2}{\|D_{ij}f\|_1}\right]^2}$$

avec $1 < p < 2$.

Application : démonstration d'un théorème type KKL à l'ordre 2

KKL d'ordre 2

$f \;:\; C_n \to \{0,1\}$

Théorème KKL d'ordre 2 [T.]

Soit $\exists i \in \{1,\ldots,n\}$

$$I_i(f) \geq c\left(\frac{1}{n}\right)^{1/1+\eta(p)} \qquad 0 < \eta(p) < 1$$

KKL d'ordre 2

$f \ : \ C_n \to \{0,1\}$

Théorème KKL d'ordre 2 [T.]

Soit $\exists i \in \{1,\ldots,n\}$

$$I_i(f) \geq c\left(\frac{1}{n}\right)^{1/1+\eta(p)} \qquad 0 < \eta(p) < 1$$

ou bien $\exists i \neq j \in \{1,\ldots,n\}$

$$I_{(i,j)}(f) \geq c\left(\frac{\log n}{n}\right)^2$$

avec $c > 0$ constante numérique.

Démonstration : même type de preuve que celle du théorème KKL (Fonction tribus optimales pour la deuxième alternative)

Quelques perspectives

Questions ouvertes

- Comparaison entre les inégalités Talagrand d'ordre 1 et 2 ?
- Application en superconcentration ?
- Inégalité de concentration ?
- Théorème de Friedgut-Kalai d'ordre 2 sur le cube discret pour des mesures biaisées ?

Merci pour votre attention

Superconcentration et transport optimal

Rappels

μ_n mesure exponentielle symétrique sur $\mathbb{R}^n$, γ_n mesure gaussien standard $\mathbb{R}^n$.

Transport monotone

$$\mu_n \xrightarrow{T} \gamma_n$$

où $T(x_1, \ldots, x_n) = \big(t(x_1), \ldots, t(x_n)\big)$ avec $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\int_{-\infty}^{x} d\mu_1 = \int_{-\infty}^{t(x)} d\gamma_1$$

Note : $\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) = \mathrm{Var}_{\mu_n}(f \circ T)$.

Inégalité de Poincaré à poids

Inégalité Poincaré mesure exponentielle

$$\mathrm{Var}_{\mu_n}(f) \leq 4 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\mu_n$$

Inégalité de Poincaré à poids

Inégalité Poincaré mesure exponentielle

$$\mathrm{Var}_{\mu_n}(f) \leq 4 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\mu_n$$

alors

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) = \mathrm{Var}_{\mu_n}(f \circ T) \leq 4 \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i f)^2 \circ T(x) t'^2(x_i) d\mu_n(x)$$

.

Rappelons que $\mu_n \xrightarrow{T} \gamma_n$ avec $T(x_1, \ldots, x_n) = \big(t(x_1), \ldots, t(x_n)\big)$

Inégalité de Poincaré à poids

Inégalité Poincaré mesure exponentielle

$$\mathrm{Var}_{\mu_n}(f) \leq 4 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\mu_n$$

alors

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) = \mathrm{Var}_{\mu_n}(f \circ T) \leq 4 \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i f)^2 \circ T(x) t'^2(x_i) d\mu_n(x)$$

.

Rappelons que $\mu_n \xrightarrow{T} \gamma_n$ avec $T(x_1, \ldots, x_n) = \big(t(x_1), \ldots, t(x_n)\big)$

Contrôle de $t' \circ t^{-1}$ pour majorer variance de f sous γ_n ?

Inégalité de Poincaré à poids

Exemple mesure gaussienne [T.]

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) \leq C \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i f(x))^2 \left(\frac{1}{1+|x_i|} \right)^2 d\gamma_n(x)$$

- Mise en application (superconcentration) étude théorique des inégalités Poincaré à poids (travaux Gozlan)

Inégalité de Poincaré à poids

Exemple mesure gaussienne [T.]

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) \leq C \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i f(x))^2 \left(\frac{1}{1+|x_i|} \right)^2 d\gamma_n(x)$$

- Mise en application (superconcentration) étude théorique des inégalités Poincaré à poids (travaux Gozlan)
- Large choix de mesures (log-concave, uniforme,...), de fonctions (médiane, maximum, norme l^p, rayon spectral modèle Ginibre ...).

Inégalité de Poincaré à poids

Exemple mesure gaussienne [T.]

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) \leq C \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i f(x))^2 \left(\frac{1}{1+|x_i|} \right)^2 d\gamma_n(x)$$

- Mise en application (superconcentration) étude théorique des inégalités Poincaré à poids (travaux Gozlan)
- Large choix de mesures (log-concave, uniforme,...), de fonctions (médiane, maximum, norme l^p, rayon spectral modèle Ginibre ...).
- Extension au niveau exponentiel pour inégalité de déviation (similaires travaux de Boucheron/Thomas).

Inégalité de Poincaré à poids

Exemple mesure gaussienne [T.]

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) \leq C \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i f(x))^2 \left(\frac{1}{1+|x_i|} \right)^2 d\gamma_n(x)$$

- Mise en application (superconcentration) étude théorique des inégalités Poincaré à poids (travaux Gozlan)
- Large choix de mesures (log-concave, uniforme,. . .), de fonctions (médiane, maximum, norme l^p, rayon spectral modèle Ginibre . . .).
- Extension au niveau exponentiel pour inégalité de déviation (similaires travaux de Boucheron/Thomas).
- Transport d'inégalités isopérimétriques pour obtenir inégalités de déviations à gauche plus fine .