AIDE L1 SVT : ÉTUDE DE FONCTION

Cette courte note a pour objet de rappeler brièvement certains points important d'analyse réel lorsque l'on étudie une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ainsi, le discours sera volontairement informel et pourra manquer de rigueur aux yeux de certains ; similairement certains détails seront manquants . Nous donc renvoyons le lecteur vers l'ouvrage de son choix (par exemple, le livre de Dominique Martinais et Franois Liret : Analyse première anne) pour compléter notre propos. Des exercices d'entrainements, « type-bac », sont proposés à la fin de cette courte note.

Les commentaires permettant d'améliorer la qualité de ce bref exposé sont les bienvenus.

1. Quelques rappels

Cette section va rapidement brosser les poids importants du cours et les savoirs faire qu'il faut acquérir.

Supposons que l'on souhaite étudier une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Voici une manière méthodique de procéder.

1.1. **L'ensemble de définition.** La première chose à faire est de déterminer l'ensemble $D_f \subset \mathbb{R}$ pour lequel les calculs intervenant dans la fonction f on du sens. Par exemple, si f est définie comme suit

$$f(x) = x^3 + 2x - 6.$$

On constate que l'on peut choisir n'importe quel réel sans que l'on rencontre un calcul insoluble (une valeur x pour laquelle (x) n'a pas de sens), ainsi $D_f = \mathbb{R}$.

Si jamais $f(x) = \sqrt{x}$, on constate qu'il n'est pas possible de calculer la racine carré d'un nombre négatif. Pour cette raison $D_f = [0, +\infty[= \mathbb{R}_+$. Si f est une fraction rationnelle,

$$f(x) = \frac{3}{(6x-1)} \quad \text{ou} \quad f(x) = \frac{2}{x^2+x-2}$$

il faut donc exclure les réels annulant le dénominateur. Dans le premier exemple, on obtiendrait $D_f = \mathbb{R} \backslash \{1/6\}$, puisque

$$6x - 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{1}{6}.$$

Dans le deuxième exemple, il faudrait résoudre léquation polynômiale $x^2+x-2 = 0$ (à l'aide du discriminant, par exemple) pour exclure les solutions de l'équation du domaine de définition.

Pour conclure, il est important d'avoir à l'esprit les domaines de définitions des fonctions usuelles : $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ avec $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \tan(x)$, $x \mapsto \exp(x), x \mapsto \ln(x)$ ou encore des fractions rationnelles de la forme

$$x \mapsto \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \ldots + b_0}$$

avec $p, n \in \mathbb{N}$ et $a_n, \ldots, a_0, b_p, \ldots, b_0 \in \mathbb{R}$.

De plus, il faut savoir identifier les calculs illicites (diviser par 0, racine carré d'un nombre négatif, logarithme d'une nombre négatif ou nul,. . .).

1.2. **Continuité.** Comme évoqué en TD, la continuité peut s'exprimer, grossièrement, de la manière suivante :

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur D_f si je suis capable de dessiner son graphe sans lever le crayon de ma feuille.

Par exemple : $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$, $x \mapsto x^3$ est continue sur $\mathbb{R}$, tandis que $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est continue sur $\mathbb{R}$ mais l'est sur $\mathbb{R}_* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Une autre manière de comprendre cette notion serait de dire :

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en un point $x \in D_f$ si, lorsque je considère un point y proche de x j'obtiens un point $f(x)$ proche de $f(x)$.

Pour s'en convaincre, nous conseillons de tracer le graphe de la fonction $x \mapsto x^2$ (par exemple) et de comparer avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ en choisissant un point $x > 0$ proche de 0 et un point $y < 0$ proche de 0.

Nous désignerons par $C_0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ étant continues sur $\mathbb{R}$. Il convient alors de connaitre les ensembles de continuité des fonctions usuelles ainsi que les règles suivantes (il s'agit des opérations qui préservent la continuité)

(1) Si $f, g \in C^0(\mathbb{R})$ alors $f + g \in C^0(\mathbb{R})$.

(2) Si $f, g \in C^0(\mathbb{R})$ alors $f \times g \in C^0(\mathbb{R})$.

(3) Si $f, g \in C^0(\mathbb{R})$ et que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors $\frac{f}{g} \in C^0(\mathbb{R})$.

Voici une dernière règle, un peu plus complexe, portant sur la continuité des fonctions composées. Rappelons par ailleurs que la notation $f \circ g$, pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ signifie que

$$f \circ g(x) = f\big[g(x)\big].$$

Autrement dit, on calcule d'abord $g(x)$ puis on calcule l'image de $g(x)$ par f. Voici un exemple de ceci : soit f et g définie comme suit

$$f(x) = 2x^3 + 3x - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \sin(x)$$

alors $f \circ g(x) = f\big[g(x)\big] = 2\sin^3(x) = 3\sin(x) - 1$ tandis que $g \circ f(x) = g\big[f(x)\big] = \sin\big(2x^3 + 3x - 1\big)$.

Lorsque l'on étudie le domaine de définition ou l'ensemble de continuité d'une fonction composée il faut être prudent. Voyons ceci sur un exemple :

$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad g(x) = x^2 + 1 \quad \text{et} \quad h(x) = 3x - 1$$

Notons que $D_f = [0, +\infty[$. Ainsi, si l'on souhaite calculer $f \circ g(x)$ (ou $f \circ h(x)$) il convient de s'assurer que $g(x) \in D_f$ pour tout $x \in D_g$ (ou $h(x) \in D_f$ pour tout $x \in D_h$) ! Sans quoi le calcul n'aurait pas de sens.

Plus précisément, il n'est pas très dur de se convaincre que $D_g = \mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in R$,

$$g(x) = x^2 + 1 > 0$$

puisque $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Nous pouvons donc en conclure que $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$ et que $f \circ g \in C^0(\mathbb{R})$ puisque $f \in C^0(\mathbb{R})$, $g \in C^0(\mathbb{R})$ et $g(x) \in D_f$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En revanche, si l'on s'intéresse à la fonction $x \mapsto f \circ h(x)$ la situation est différente. En effet, f est continue et définie sur $[0, +\infty[$ et g est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Cependant, la fonction h change de signe : lorsque $x < \frac{1}{3}$ nous avons $h(x) < 0$. Pour de tels réels ($x < \frac{1}{3}$) l'opération $f \circ h$ n'a pas de sens. Il convient d'imposer une restriction supplémentaire pour obtenir le domaine définition de $f \circ h$, à savoir

$$g(x) \in D_f \iff 3x - 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{3}$$

C'est pourquoi $D_{f\circ h} = [\frac{1}{3}, +\infty[$ (la fonction est également continue sur cet ensemble).

1.3. **Calculs de limites au bord du domaine de définition/continuité.** Une fois que l'ensemble de continuité/ définition est déterminé, il est fréquent que l'on cherche à déterminer les limites de la fonction lorsque x s'approche du bord de l'ensemble de continuité/ définition.

Par exemple, si $f(x) = \frac{1}{x}$, la fonction f est continue et définie sur $\mathbb{R}_*$. Il faut donc calculer

$$\lim_{x\to 0^+} f(x), \quad \lim_{x\to 0^-} f(x), \quad \lim_{x\to\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x)$$

Ici, nous avons $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.

Au vu de ce qui précède, il est donc primordial de connaitre les limites des fonctions usuelles au bord de lors domaine de définition/continuité. Ceci permettra de déterminer les limites de fonctions, plus complexes, pouvant s'écrire comme une somme, un produit, un quotient, ou encore une composition de fonction usuelles. Bien évidemment, pour cela il faudra appliquer les règles classiques d'opérations sur les limites : « $+\infty + \infty = \infty$, $-3 \times +\infty = -\infty, 1/\infty = 0, \ldots$ ». Bien entendu, il faudra se méfier des formes indeterminées. Celles-ci peuvent se lever de différentes manières :

(1) En factorisant par le terme dominant (le plus « gros ») lorsque x se rapproche de la limite d'intêret.

(2) En invoquant des théorèmes de croissances comparées.

Entrainez vous sur les exemples suivants :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 5x - 1}{x^2 + 1} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + 5x - 1}{x^2 + 1} \quad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) \quad \lim_{x\to\infty} x^3 e^{-2x}$$

1.4. **Etude de la dérivée.** La séconde partie lorsque l'on étudie une fonction (ou plutôt ses variations) est de déterminer sa dérivée f'. Faisons quelques rappels à ce propos.

Par définition, le nombre dérivée $f'(x_0)$ (s'il existe) correspond à un taux d'accroissement :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{1.1}$$

Géométriquement, ce nombre correspond au coéfficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point x_0. Rappelons à ce propos la formule permettant d'obtenir l'équation de la tangente T_{x_0} à la courbe C_f au point x_0 :

$$T_{x_0} : \quad y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \iff y = ax + b$$

avec $a = f'(x_0)$ et $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$. A l'aide d'un dessin, on observe facilement qu'une fonction (suffisamment régulière) est croissante si et seulement le coefficient directeur de sa tangente est positif (autrement dit, graphiquement, la courbe « monte »). De même, la fonction est décroissante si et seulement si le coefficient directeur est négatif (autrement dit, graphiquement, la courbe « descend »). Enfin, un coefficient directeur nul, entraine que la fonction est constante (graphiquement, la courbe « stagne »).

Après ce bref préambule, il est naturel de se poser les questions suivantes :

(1) De quelle manière peut-on savoir si une fonction est dérivable ou non ?

(2) Y-a-t-il des règles préservant la dérivabilité ?

(3) Comment calculer des dérivées ?

(4) Quelles informations, sur la fonction sous-jacente, puis-je obtenir d'une dérivée ?

(5) Quel est le lien entre continuité et dérivée ?

(6) ...

Tout d'abord, une fonction est dérivable en un point si la limite (1.1) existe. Cependant, tout comme la définition rigoureuse de la continuité, ceci est difficilement manipulable en pratique ! Il est donc essentiel de connaitre (et donc de revoir) les domaines de dérivabilité des fonctions usuelle. Par exemple, considérons les fonctions suivantes :

$$x \mapsto \sqrt{x}, \qquad x \mapsto x^2 + 3x - 1, \qquad \sin(x)$$

Bien que $x \mapsto \sqrt{x}$ soit continue sur $\mathbb{R}_+$, elle n'est dérivable que sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme tout les polynômes, $x \mapsto x^2 + 3x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Les fonctions trigonométriques $x \mapsto \sin(x)$ (ou $x \mapsto \cos(x)$) sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Tout comme la continuité, les mêmes règles préservent la dérivabilité : si f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable, ...

Une fois que l'on a attester qu'une fonction était dérivable, il est alors possible de calculer sa dérivée. Pour cela, il faut utiliser certaines règles (que l'on doit connaitre sur le bout des doigts). Considérons f, g deux fonctions dérivables et $\lambda \in R$, alors

(1) $(f + g)' = f' + g'$.

(2) $(\lambda f)' = \lambda f'$.

(3) $(fg)' = f'g + fg'$.

(4) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

(5) $\left[f \circ g\right]' = g' \times f' \circ g$.

Comme nous l'avons esquissé plus tôt, le signe de la dérivée f' d'une fonction f permet d'obtenir des informations sur la monotonie de cette dernière. Il s'agit donc de la second étape à effectuer lorsque l'on cherche à déterminer les variations d'une fonction f. Pour cela, il est bien souvent nécessaire de dresser le tableau de signe de f' pour en déduire les variations de f.

Il est à noter que certains cas de figures sont plus simples que d'autres, notamment lorsque la dérivée est un polynôme de second degré ou une fraction rationelle de polynôme de second degré. Dans ce cas de figures, le signe de tels objets est directement fournit par le discriminant Δ. Malheureusement, il n'est pas possible de donner une méthode générale et il faut procéder au « cas par cas ». Toutefois, nous pouvons proposer le conseil suivant : essayer de se ramener à un produit ou un quotient pour dresser le tableau de signe (ainsi, il est souvent essentiel de savoir factoriser).

1.5. **Questions annexes.** Bien entendu, il est possible de poursuivre l'étude de la fonction en cherchant une éventuelle asymptote, puis la position relative de la courbe à celle-ci, des calculs d'aires, ... Nous n'entrerons pas, pour l'instant, dans ce genre de considération.

2. Exercices d'entrainement

Nous proposons une série d'exercice, de niveau 1ère S/Terminale S, permettant à l'étudiant de s'entrainer et de mieux appréhender ces notions. Il est primordial de **chercher** sérieusement ces exercices, afin que la solution soit utile au niveau de la compréhension. La meilleure façon d'apprendre est de se tromper, pour comprendre son erreur et ne plus la reproduire.

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie comme suit :

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + \pi \quad x \in \mathbb{R}$$

(1) Déterminer le domaine de définition et de continuité de f.

(2) Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.

(3) Justifier que f est dérivable, calculer f' et étudier son signe.

(4) En déduire les variations de la fonction f.

(5) Donner l'équation de la tangente à la courbe C_f en 0.

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2+1}{6-3x}$$

(1) Déterminer le domaine de définition D_f de f.
(2) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

(3) La fonction f admet-elle des minimum ou maximum (locaux) sur $\mathbb{R}$? Si oui, lesquels ? Sont-ils globaux ?

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}$$

Soit g la fonction définie par $g(x) = e^x - x - 1$.

(1) Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de g.

(2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - x$ est strictement positif.

(3) Calculer les limites de la fonctions f en $\pm\infty$.

(4) Après avoir justifier son existence, calculer f'.

(5) Dresser le tableau de variation de f.

(6) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

(7) A l'aide des questions 1 et 2, étudier la position de la courbe C_f par rapport à T. *Indication : on pourra étudier le signe de $f(x) - y(x)$ avec $y(x)$ désignant l'équation de la tangente T.*

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = (x - 1)(2 - e^{-x})$$

(1) Etudier la limite de f en $+\infty$.

(2) Calculer f' et montrer que $f'(x) = xe^{-x} + 2(1 - e^{-x})$.

(3) En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) > 0$.

(4) Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de f.