CC1 L1 SVT

Calculatrices et documents interdits

Exercice. Soit $a \in \mathbb{R}_+$, montrer l'inégalité suivante par récurrence

$$(1+a)^n \geq 1 + na, \quad n \geq 0$$

Exercice. 1). Soit $u_n = \frac{(-1)^n + n}{n^2+1} + n^3 e^{-2n}, \quad n \geq 0$. Déterminer $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Indication : on pourra d'abord obtenir un encadrement de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ *pour ensuite déterminer la limite.*

2). Soit $v_n = 5^n - 4^n, \quad n \geq 0$. Déterminer $\lim_{n\to\infty} v_n$.

Exercice. Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie comme suit :

$$\begin{cases} u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n & n \geq 0, \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 5 \end{cases}$$

Déterminer une expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice. On considère les deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} & n \geq 0, \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} & n \geq 0, \\ v_0 = 4 \end{cases}$$

1). Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.

Considérons la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $w_n = v_n - u_n$. On admettra par la suite que $w_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2). Montrer que la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

3). Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ lorsque $n \to \infty$.

4). Après avoir étudié le sens de variation de suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$, démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

Indication : on pourra utiliser le résultat obtenu à la question précédente.

On considère à présent la suite $(t_n)_{n\geq 0}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

5). Démontrer que la suite $(t_n)_{n\geq 0}$ est constante.

6). En déduire la limite des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$.

1. Correction du devoir

Comme mentionné en TD, la rédaction est un point très important. Il s'agit d'exposer de manière concise, précise et limpide sa pensée au correcteur.

Exercice. Démontrons par récurrence, que la propriété suivante est vérifiée pour tout $n \geq 0$:

$$P(n) : \quad (1+a)^n \geq 1 + na, \quad a > 0$$

Initialisation : démontrons que $P(0)$ est vraie. D'une part,

$$(1+a)^0 = 1,$$

tandis que d'autre part

$$1 + 0 \times a = 1$$

Ainsi, nous avons bien

$$(1+a)^0 \geq 1 + 0 \times a.$$

$P(0)$ est donc vraie.
Hypothèse de récurrence : on suppose **qu'il existe un entier** $N \in \mathbb{N}$ tel que $P(N)$ soit vraie. Autrement dit, on suppose que l'inégalité suivante est satisfaite :

$$(HR) : \quad (1+a)^N \geq 1 + Na.$$

Hérédité : démontrons alors que $P(N+1)$ est également vraie. D'après l'hypothèse de récurrence (HR), nous avons

$$(1+a)^N \geq 1 + Na,$$

puisque, par hypothèse sur a, nous avons aussi que $1 + a > 0$. Nous en déduisons donc l'inégalité suivante

$$(1+a) \times (1+a)^N \geq (1+Na) \times (1+a) \quad \Longleftrightarrow \quad (1+a)^{N+1} \geq 1 + a + Na + Na^2$$

En outre, observons que $1 + a + Na + Na^2 = 1 + a(N+1) + Na^2 \geq 1 + a(N+1)$ puisque, à nouveau par hypothèse sur a, $Na^2 > 0$. Ceci prouve donc que $P(N+1)$ est vraie.
Conclusion On peut donc conclure, par récurrence, que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

Exercice. Déterminons la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ lorsque $n \to \infty$. Ceci est équivalent à déterminer la limite de

$$\frac{(-1)^n + n}{n^2+1} \quad \text{et de} \quad n^3 e^{-2n} \quad \text{séparément.}$$

D'une part, par croissance comparée,

$$\lim_{n\to\infty} n^3 e^{-2n} = 0.$$

D'autres part, nous obtenons l'encadrement suivant

$$\frac{n-1}{n^2+1} \leq \frac{(-1)^n + n}{n^2+1} \leq \frac{n+1}{n^2+1}$$

De plus, observons que

$$\frac{n \pm 1}{n^2+1} = \frac{1 \pm 1/n}{n(1+1/n^2)}.$$

Ainsi, à l'aide de cette nouvelle expresssion, il est aisé d'en déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \pm 1}{n^2+1} = 0$$

puisque le numérateur converge vers 1, tandis que le dénominateur tend vers $+\infty$. On peut alors invoquer le théorème des gendarmes qui nous assure que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n + n}{n^2+1} = 0$$

également.
Déterminons la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$. A cet effet, factorisons par le terme dominant. Autrement dit,

$$v_n = 5^n \left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right].$$

Remarquons alors que $\left(\frac{4}{5}\right)^n = e^{-n\log(5/4)}$ et que $\log(5/4) > 0$. C'est pourquoi $\lim_{n\to\infty} e^{-n\log(5/4)=0}$. Ceci implique que le terme entre crochets converge vers 1 lorsque $n \to \infty$. Par des arguments similaires, on démontre que $\lim_{n\to\infty} 5^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\log 5} = +\infty$. En conclusion, nous avons démontré que

$$\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$$

Exercice. Quelques calculs élémentaires entrainent que

$$u_1 = \frac{7}{2},\ v_1 = \frac{15}{4},\ u_2 = \frac{29}{8}, v_2 = \frac{59}{16}$$

A présent, démontrons que $(w_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{u_{n+1}+v_n}{2} - \frac{u_n+v_n}{2} = \frac{u_{n+1}}{2} - \frac{u_n}{2} \\ &= \frac{u_{n+1}}{2} - \frac{u_n}{2} = \frac{u_n+v_n}{4} - \frac{u_n}{2} = \frac{1}{4}(v_n - u_n) \\ &= \frac{1}{4} w_n \end{aligned}$$

Puisque nous venons de montrer que $(w_n)_{n\geq 0}$ est une suit géométrique, d'après le cours, celle peut s'exprimer comme suit

$$w_n = w_0 \left(\frac{1}{4}\right)^n, \quad n \geq 0$$

avec $w_0 = v_0 - u_0 = 1$ (observons que cette expression justifie le fait que $w_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). De plus, puisque $|q| = \frac{1}{4} < 1$, le cours nous assure que $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$. En d'autres termes, nous venons de montrer que $\lim_{n\to\infty} v_n - u_n = 0$. Ceci nous servira ultérieurement.
Etudions le sens de variations des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{w_n}{2} > 0$$

puisque $w_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous venons donc de démontré que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
Similairement,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - v_n = -\frac{v_n - u_n}{4} = -\frac{w_n}{4} < 0$$

puisque $w_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous venons donc de démontré que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
En résumé, nous avons montré que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et que $\lim_{n\to\infty} v_n - u_n = 0$. Cela revient à dire que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes. Alors, d'après le cours, il existe un nombre réel l tel que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = l$$

Pour déterminer l, démontrons d'abord que la suite $(t_n)_{n/geq0}$ est constante.

$$\begin{aligned}
t_{n+1} - t_n &= \frac{u_{n+1} + 2v_{n+1}}{3} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{u_n + v_n}{6} + \frac{u_{n+1} + v_n}{3} - \frac{u_n + 2v_n}{3} \\
&= \frac{u_n + v_n}{6} + \frac{u_{n+1} + v_n}{3} - \frac{u_n + 2v_n}{3} \\
&= \frac{u_n + v_n}{6} + \frac{u_n}{6} + \frac{3v_n}{6} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(t_n)_{n\geq 0}$ est bien constante. Autrement dit, pour tout $n \geq 0$,

$$t_n = t_0$$

avec $t_0 = \frac{11}{3}$ et donc $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$. Cependant, nous avons aussi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(t_n)_{n\geq 0}$ étant convergente, la suite $(t_n)_{n\geq 0}$ converge également. Plus précisément

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \frac{\lim_{n\to\infty} u_n + 2\lim_{n\to\infty} v_n}{3} = l$$

Par unicité de la limite, nous avons $l = t_0$.