L1 SN — Mathématiques CC1

21 octobre 2013, Durée : 1 heure

- *Il vous est demandé de répondre aux questions sur cette feuille.*
- *Le polycopié des notes de cours non annoté est autorisé.*
- *Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.*
- *Sauf indication contraire du sujet, il faut réaliser les calculs «à la main».*
- *Le barème indiqué n'est qu'approximatif et pourra éventuellement légèrement évoluer.*
- *La qualité des justifications et de la rédaction sera prise en considération dans la note.*
- *Les exercices sont indépendants.*

NOM : Prénom : Groupe de TD :

Exercice 1 (5 points) : Empaqueteuses en panne

Deux empaqueteuses fonctionnent de manière indépendante dans une usine. Chaque jour, l'empaqueteuse 1 peut tomber en panne avec une probabilité de 0,4 et l'empaqueteuse 2 peut tomber en panne avec une probabilité de 0,2.

On note A l'événement «l'empaqueteuse 1 tombe en panne» et B l'événement «l'empaqueteuse 2 tombe en panne».

1. Quelles est la probabilité que les deux empaqueteuses tombent en panne en même temps ?

   Solution

   Comme les empaqueteuses fonctionnent de manière indépendante, les événements A et B sont indépendants.
   $$Pr(A \cap B) = Pr(A) \times Pr(B) = 0,4 \times 0,2 = 0,08$$

2. Donner les probabilités des événements suivants.

   (a) Au moins une des deux empaqueteuses est en panne.

   Solution
   $$Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B) = 0,4 + 0,2 - 0,08 = 0,52$$

   (b) Aucune des deux empaqueteuses n'est en panne.

   Solution

   Comme les événements A et B sont indépendants, leurs négations le sont aussi
   $$Pr(\bar{A} \cap \bar{B}) = Pr(\bar{A}) \times Pr(\bar{B}) = 0,6 \times 0,8 = 0,48$$

   (c) L'empaqueteuse 1 est en panne, mais pas l'empaqueteuse 2.

   Solution
   $$Pr(A \cap \bar{B}) = Pr(\bar{B}) - Pr(\bar{B} \cap \bar{A}) = 0,8 - 0,48 = 0,32$$

3. Quelle est la probabilité qu'au moins une des empaqueteuses fonctionne ?

Solution

L'événement «au moins une des empaqueteuses fonctionne» est équivalent à la négation de «Les deux empaqueteuses sont simultanément en panne», donc

$$Pr(\overline{A \cap B}) = 1 - Pr(A \cap B) = 1 - 0,08 = 0.92$$

Exercice 2 (5 points) : Chomage

Dans un groupe formé de 45% de femmes et de 55% d'hommes, on étudie les taux de chomage. Les résultats des questionnaires montrent que 10 % des femmes interrogées sont au chomage, et que 20% des hommes le sont.

1. On choisit un homme au hasard. Quelle est la probabilité qu'il soit actif ?

Solution

Notons H l'événement «la personne choisie est un homme», F l'événement «la personne choisie est une femme» et C l'événement «La personne choisie est au chomage».

$$Pr(\bar{C}/H) = 1 - 0,2 = 0,8$$

2. On prend une personne au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit au chomage ?

Solution

La formule des probabilités totales donne :

$$Pr(C) = Pr(C/H)\,Pr(H) + Pr(C/F)\,Pr(F) = 0,55 \times 0,2 + 0,45 \times 0,1 = 0,11 + 0,045 = 0,155$$

3. Est-ce-que, pour ce groupe de personnes, le fait d'être au chomage est indépendant du sexe ?

Solution

$$Pr(C/H) = 0,2 \neq 0,155 = Pr(C)$$

donc il n'y a pas indépendance.

4. Si l'on prend un chomeur au hasard, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une femme ? (Posez seulement l'opération, il n'est pas nécessaire de calculer une valeur approchée.)

Solution

$$Pr(F/C) = \frac{Pr(F)}{Pr(C)} \times Pr(C/F) = \frac{0,45}{0,155} \times 0,1 \simeq 0,29$$

Exercice 3 (5 points) : Machine à café défectueuse

La machine à café est déréglée, et une fois sur cinq le café est froid. Un enseignant en grand besoin décide de commander 3 cafés. On note X le nombre de cafés froids qui lui sont servis par la machine.

1. Expliquer pourquoi la variable aléatoire X suit une loi binomiale, et indiquer ses paramètres.

Solution

On répète $n = 3$ fois, de manière indépendante, la même expérience aléatoire consistant à commander un café. Les deux issues possibles sont «Le café est froid» et «Le café est chaud» avec $Pr($ «Le café est froid» $) = 0.2$. Ainsi le nombre de cafés froids suit une loi $\mathcal{B}(3; 0.2)$.

2. Quelle est la probabilité que tous ses cafés soient froids ?

Solution

$$Pr(X=3) = \left(\begin{array}{c} 10 \\ 10 \end{array} \right) 0,2^3(1-0,2)^{3-3} = 0,2^3 = 0,008$$

3. Quelle est la probabilité qu'au moins un de ses cafés soit froid ? (Posez seulement l'opération)

Solution

$$Pr(X \geq 1) = 1 - Pr(X=0) = 1 - 0,8^3 = 1 - 0,512 = 0,488$$

4. Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X (Pour l'écart type, posez seulement l'opération)

Solution

Comme X suit une loi binomiale $B(3; 0,2)$, on a

$$E(X) = n\,p = 3 \times 0,2 = 0,6 \text{ et } V(X) = n\,p\,(1-p) = 3 \times 0,2 \times 0,8 = 3 \times 0,16 = 0,48$$

on a donc

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,48} \simeq 0,69$$

Exercice 4 (5 points) : Inégalités

Déterminer l'ensemble des réels x tels que

1.

$$\ln(\frac{x}{2}) \geq 1$$

Solution

En appliquant la fonction exponentielle de chaque coté de l'inégalité

$$\frac{x}{2} \geq e$$

puis

$$x \geq 2e$$

2.

$$(x+3)(e^x - 2) < 0$$

Solution

Le tableau de signes du memebre de gauche donne

x	$-\infty$		-3		$\ln(2)$		∞
$x+3$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$e^x - 2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$(x+3)(e^x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d'où la solution $-3 < x < \ln(2)$.

3.

$$(x-1)^2 > 9$$

Solution

En retranchant le membre de droite, on obtient la troisième identité remarquable

$$(x-1)^2 - 9 = (x-1)^2 - 3^2 = (x-1+3)(x-1-3) = (x+2)(x-4) > 0$$

Le tableau de signes du membre de gauche est

x	$-\infty$		-2		4		∞
$x+2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-4$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$(x+2)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d'où la solution $x < -2$ ou $x > 4$.