Université PAUL SABATIER M2 2015-2016

Intégration

0.1 Espaces $L^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$

Exercice 1 1. *Soient $f, g \in L^1(\Omega)$, a-t-on $fg \in L^1(\Omega)$?*

2. *On considère maintenant deux variables aléatoires X et Y admettant un moment d'ordre 1. A quelle condition sur X et Y, la variable aléatoire $Z = XY$ admet un moment d'ordre 1 ?*

Exercice 2
Soit $\Omega = \mathbb{N}$ muni de μ la mesure de comptage. Pour tout $1 \leq p < +\infty$ on note $l^p(\mathbb{N})$, l'espace des suites complexes $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\|x\|_p^p = \sum_{k\geq 1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty$. L'espace des suites bornées sera noté l^∞.

1. *Pour $q \leq p$ qu'elle est la relation d'inclusion entre l^q et l^p.*

2. *Montrer que cette inclusion est stricte.*

Exercice 3 1. *Considérons μ la mesure de Lebesgue et $q \leq p$. Qu'elle est la relation d'inclusion entre L^p et L^q ?*

2. *Supposons à présent que $\mu(\Omega) < +\infty$, que peut on dire sur L^p et L^q.*

3. *Determiner une relation entre $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$.*
4. *En considérant une mesure de probabilité particulière, montrer que L^∞ est strictement inclus dans $\cap_p L^p$.*

Exercice 4 1. *Considérons $\Omega = \mathbb{R}_+$, μ la mesure de Lebesgue. Soit $f : \Omega \to \Omega$ mesurable telle que $f(x) \to 0$ lorsque $x \to \infty$. A-t-on $f \in L^1(\Omega)$?*

2. *Soit $f \in L^1(\Omega)$, que peut-t-on dire de l'ensemble $\{|f| = +\infty\}$?*

Exercice 5 1. *Soient $1 < p \leq q < +\infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. On considère $f \in L^p$ et $g \in L^q$, montrer que $fg \in L^r$ et $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

2. *Soit $f \in L^p \cap L^q$, montrer que $f \in L^r$ pour tout $p \leq r \leq q$ et que de plus*

$$\|f\|_{r_\alpha} \leq \|f\|_p^{1-\alpha} \|f\|_q^\alpha,$$

pour tout $0 \leq \alpha \leq 1$ et r_α défini par $\frac{1}{r_\alpha} = \frac{1-\alpha}{p} + \frac{\alpha}{q}$.

0.2 Integration

Exercice 6 1. *Quelle est la différence entre les fonctions en escalier de Riemann et les fonctions étagées de Lebesgue ?*

2. *Notons* $\mathcal{R}([0,1])$ *l'ensemble des fonctions qui possèdent une intégrale de Riemann sur* $[0,1]$. *On pose* $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$. *Montrer que* $f_n = 1_{\{x_1,\dots,x_n\}} \in \mathcal{R}([0,1])$ *pour tout* n, $|f_n| \leq 1 \in \mathcal{R}([0,1])$ *mais* $\lim_{n\to\infty} f_n \notin \mathcal{R}([0,1])$. *Comparer avec la notion de mesurabilité.*

Exercice 7 1. $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ *est-t-elle dans* $L^1([1,+\infty[)$ *?*

2. *Que peut-on dire de* $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ *?*

Exercice 8
Determiner la limite, lorsque $n \to \infty$ *de* $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$.

Exercice 9
Pour cet exercice on considère $\Omega = \mathbb{R}$ *muni de sa tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue.*

1. *Soient* $f_n(x) = 1_{[0,n]}$ *et* $f(x) = 1_{[0,+\infty[}$. *La suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est monotone croissante vers* f. *Bien que les fonctions* f_n *soient uniformément borées par* 1 *et que, pour tout* n, $\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| d\mu(x) < +\infty$ *on a :*
$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = +\infty$$
Peut-on appliquer le théorème de convergence monotone ?

2. *Si maintenant on pose* $f_n(x) = \frac{1}{n} 1_{[n,+\infty[}$, *alors la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est monotone décroissante et converge uniformément vers* 0, *mais*
$$0 = \int_{\mathbb{R}} f d\mu \neq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = +\infty$$
Est ce que cela contredit le théorème de convergence monotone ?

3. *Soit à présent* $f_n(x) = \frac{1}{n} 1_{[0,n]}$ *et* $f = 0$. *Montrer que* f_n *converge uniformément vers* f *sur* $\mathbb{R}$ *mais que*
$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu \neq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu$$
Est ce que cela contredit le théorème de convergence monotone ?

Exercice 10
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonction mesurables positives définies sur un espace mesuré* $(X, \mathcal{T}, \mu)$. *On suppose que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers* f μ*-p.p. et que*
$$\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu < +\infty,$$
lorsque $n \to \infty$. *Montrer que* $\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$ *lorsque* $n \to \infty$. *Indication : on pourra considerer la suite* $g_n = f + f_n - |f - f_n|$.

0.3 Probabilités

On considére dans la suite $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Exercice 11
Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $\mu = \mathcal{L}(X)$ et $\nu = \mathcal{L}(Y)$. Comment s'écrit la loi de (X, Y) ? Que dire de la réciproque ?

Exercice 12
Notons X un variable aléatoire telle que $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(0,1)$, soit également Z une variable aléatoire telle que $\mathcal{L}(Z) = \mu$ quelconque.

1. *Soit $f \in C_b^1$ montrer que $\mathbb{E}[Xf(X)] = \mathbb{E}[f'(X)]$.*
2. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, determiner $\phi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$.*
3. *Montrer que si Z vérifie l'équation $\mathbb{E}[Zf(Z)] = \mathbb{E}[f'(Z)]$, pour toutes fonctions $f \in C_b^1$. Alors $\mathcal{L}(Z) = \mathcal{N}(0,1)$.*

Exercice 13

1. *Rappeler la définition d'une variable aléatoire réelle.*
2. *Comment utilise-t-on le théorème du transfert (ou transport, suivant les ouvrages) en probabilité ?*
3. *Quelles sont les relations entre les différentes notions de convergences : en loi, presque sûrement, en probabilité , dans L^p ?*
4. *Si X_n, une suite de v.a.r définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, converge en probabilité vers X, que peut -on dire p.s. ?*

Exercice 14
Soit X une v.a.r. positive.

1. *Montrer la formule suivante, pour $0 < p < \infty$, $\mathbb{E}[X^p] = p \int_0^\infty t^{p-1} \mathbb{P}(X > t) dt$.*
2. *S'il existe $C > 0$ et $p \in \mathbb{N}_*$ tels que $\mathbb{P}(X > t) \leq \frac{C}{t^p}, \quad t \geq 0$, que peut-on dire des moments de X ?*
3. *Si maintenant X admet un moment d'ordre $p \in \mathbb{N}_*$ que peut-on dire de $\mathbb{P}(X > t), \quad t \geq 0$?*

Exercice 15
Soit F la fonction de répartion d'une loi $\mathbb{P}$, donnée par

$$F(t) = \begin{cases} 0 \quad t \leq 0, \\ t/4 \quad 0 \leq t < 1, \\ 1/2 \quad 1 \leq t < 2, \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(1 - e^{-(t-2)}) \quad t \geq 2. \end{cases}$$

Determiner la loi $\mathbb{P}$. Quelle autre fonctionnelle caractérise un loi de probabilité ?

0.4 Convolution et transformée de Fourier

On désigne par C_0 les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues qui tendent vers 0 en l'infini.

Exercice 16 1. *Montrer que si $g \in C_0$ alors g est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

2. *Soient $f \in L^1$ et $g \in C_0$, quelle est la régularité de $f * g$? Où,*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Estimer $\|f * g\|_\infty$.

Exercice 17
On définit la transformée de Fourier sur L^1 par $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} f(x)dx$.

1. *Résoudre dans L^1 l'equation suivante (en n'utilisant que des calculs élémentaires).*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-a|x-t|} f(t)dt = e^{-x^2}, \quad a > 0$$

On pourra utiliser les résultats suivants $\hat{\phi}(t) = e^{-t^2/4}\sqrt{\pi}$ et $\hat{g}(t) = \frac{2a}{a^2+t^2}$.

2. *Rappeler la relation entre la régularité de $\hat{f}$ et l'intégrabilité de f.*

3. *Y-a-t-il une relation analogue entre la sommabilité des coefficients de Fourier d'une fonction et la régularité de cette même fonction ?*

Exercice 18 1. *Comment est définie la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$?*

2. *Determiner une formule permettant de calculer cette transformée de Fourier lorsque f est continue.*

Exercice 19 1. *Démontrer le Lemme de Riemann-Lebesgue.*

2. *En quoi la transformée de Fourier d'une fonction est une opération régularisante ?*

3. *Donner la définition d'une transformée de Fourier d'une mesure bornée.*

4. *Calculer la transformée de Fourier de $\mu_\lambda = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \delta_n$*

5. *Donner deux applications (essentielles) de la transformée de Fourier en probabilité.*

Les exercices proposés dans cette feuille sont soit inventés soit tirés des ouvrages suivants :

Bibliographie

[1] Barbe, Ledoux *Probabilité*

[2] Faraut *Calcul intégral*

[3] Candelpergher *Calcul intégral*

[4] Tao *An epsilon of room*

[5] Auliac-Caby *Topologie et analyse*