Correction Examen terminal 9 mai 2017

question de cours

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et désignons par P_A son polynôme caractéristique.
Nous allons procéder par équivalence.

A est inversible $\underset{\text{thm du Rang}}{\Longleftrightarrow}$ A injectif $\underset{\text{A est une appli. lin.}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$ $\underset{\text{def vp}}{\Longleftrightarrow}$ 0 n'est pas valeur propre

$\underset{\text{caractérisation des vp en dim finie}}{\Longleftrightarrow}$ 0 n'est pas racine de P_A.

2) **Thm** Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dim finie et $f \in \mathrm{End}(E)$.
si P_f désigne le polynôme caract. de f
alors $P_f(f) = 0$

3) D'après l'énoncé, $P_A(X) = X^4 - 3X^3 + 2X^2 - X + 1$
Puisque $P_A(0) = 1 \neq 0$ 0 n'est pas vp. D'après Q1 A est donc inversible. Déterminons A^{-1}.

D'après Q2, le thm de Hamilton-Cayley nous assure que
$$P_A(A) = A^4 - 3A^3 + 2A^2 - A + Id = 0$$

donc $$-A^4 + 3A^3 - 2A^2 + A = Id$$
$$\Longleftrightarrow A(-A^3 + 3A^2 - 2A + Id) = Id.$$

par unicité de l'inverse $A^{-1} = -A^3 + 3A^2 - 2A + Id$.

Rappel prop soit E un $\mathbb{K}$-eV, $f \in End(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tq $P(f) = 0$.

si λ vp de f alors $P(\lambda) = 0$

Rq 1) Ceci fournit des CN sur les vps.

2) Attention la réciproque est fausse. En effet, si $f = 1d_E$ le polynôme $P(X) = X(1-X)$ annule bien f mais f n'admet pas 0 comme vp.

exo2 Soit $u \in End(\mathbb{R}^n)$ tq $u^3 = u$.

1) Posons $P(X) = X(X+1)(X-1)$ et observons que l'hypothèse $u^3 = u \Leftrightarrow u(u^2-1) = 0 \Leftrightarrow P(u) = 0$

d'après le rappel les vp de u sont contenu dans l'ensemble des racines de P, i.e. $Spec\, u \subset \{0, 1, -1\}$

2) i). mq $y \in E_0 \Leftrightarrow y \in Ker\, u$

calculons $u(y)$. Par def de y on trouve que

$$u(y) = u(x) - u^3(x) = 0 \quad \text{donc } y \in E_0$$

car $u^3 = u$ par hyp.

ii) - mq $z \in E_1 \Leftrightarrow z \in Ker(u - id) \Leftrightarrow (u - id)(z) = 0$
$\Leftrightarrow u(z) = z$

par def de z, on trouve $u(z) = \frac{1}{2}\left(u^2(x) + u^3(x)\right)$
$= z$ car $u^3 = u$ par hyp.

iii) - mq $t \in E_{-1} \Leftrightarrow t \in Ker(u + id) \Leftrightarrow u(t) = -t$

On a $u(t) = \frac{1}{2}\left[u^3(x) - u^2(x)\right] = -t$ puisque $u^3 = u$

iv) - un calcul direct mq $y + z + t = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

(2)

3). D'après ce qui précède, u est diagonalisable ssi $\mathbb{R}^n = E_0 \oplus E_1 \oplus E_{-1}$

rappelons que ~~les~~ l'intersection d'espaces propres associés à des vp $\neq$ est réduite au vecteur nul. En d'autres termes, E_0, E_1, E_{-1} sont en somme directe.

Pour conclure, il suffit donc de mq $\mathbb{R}^n = E_0 + E_1 + E_{-1}$
~~Autrem~~ C'est à dire $\forall x \in \mathbb{R}^n \ \exists y \in E_0 \ \exists z \in E_1 \ \exists t \in E_{-1}$ tq $x = y + z + t$

Il s'agit du contenu de la Q2 donc u est diagonalisable.

<u>Rq</u> on a prouvé que $\mathbb{R}^n = E_0 \oplus E_1 \oplus E_{-1}$
cependant il est possible que certains des espaces propres du membre de droite soit réduit à $\{0\}$.
par ex si $u = id$ on a bien $u^3 = u$
et dans ce cas précis $\mathbb{R}^n = E_1$

4). on suppose à présent que $n = 3$ et $\det(u) = 1$

Rappelons que le déterminant est invariant par changement de base. D'après Q3 u est diagonalisable, notons λ_1, λ_2 et λ_3 ses valeurs propres (celles ne sont pas forcément $\neq$)

on doit donc avoir $\underset{\substack{\| \text{hyp} \\ 1}}{\det(u)} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ (expression de u dans une base de vp)

on sait également que $\lambda_i \in \{0, 1, -1\}$ $i = 1 \dots 3$

Ainsi la relation $\prod_{i=1}^{3} \lambda_i = 1$ entraîne que $\lambda_i \neq 0$ $\forall i = 1 \dots 3$

il ne reste plus que 2 cas de figures

1 est vp triple (ie $U = id$)

ou 1 vp simple et -1 vp double.

La trace étant également invariante par chg^t de base

on a donc $tr(U) = 3$ ou $tr(U) = 1$

Problème

I

1) - des calculs directs montrent que $AV_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 V_1$

$AV_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 V_2$ et $AV_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 V_3$

ainsi $spec(A) = \{0 ; 2 ; 4\}$ et $\chi_A(\lambda) = -\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 4)$

2) - χ_A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable dans une base de vp. D'après la Q1 V_i $i = 1 \cdots 3$ sont des vp associés (respectivement) aux vp $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 2$ $\lambda_3 = 4$. Donc $\tilde{B} = \{V_1 ; V_2 ; V_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

3) Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; il n'est pas difficile de

voir $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (cette matrice nous servira ultérieurement)

et donc, par construction,

$$P^{-1} A P = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

③

II - 1) Notons par $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

le système (E) se réécrit sous la forme.

$$X' = A\,X$$ (la variable t est omise pour plus de lisibilité)

2) - Notons $Y = P^{-1}X$ avec $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

$X' = AX \iff P^{-1}X' = P^{-1}AX \iff P^{-1}X' = P^{-1}A\overbrace{PP^{-1}}^{Id}X$

multiplication par P^{-1} à gauche $\iff Y' = DY$

par définition de Y et Part I.

Ainsi X sol de $X' = AX$ ssi Y sol de $Y' = DY$

3) - la relation $Y = P^{-1}X$ permet d'obtenir les CI du deuxième système différentiel à partir des CI de $X' = AX$.

Autrement dit $Y(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

4) - Résolvons $\begin{cases} Y' = DY \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases} \iff \begin{cases} u' = 0 \\ v' = 2v \\ w' = 4w \end{cases}$ et $Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} u(t) = 0 \\ v(t) = e^{2t} \\ w(t) = 2e^{4t} \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

résolution ED linéaire d'ordre 1

5). il ne reste plus qu'à utiliser la relation

$Y = P^{-1} X$ pour obtenir une expression de

X la solution de (E).

i.e. $X_{(t)} = P\,Y_{(t)} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{4t} \\ e^{2t} + 2e^{4t} \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$