CCI Maths Algo.

Exo1

1). soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Mq P est vraie

i) si n est pair, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tq $n = 2p$

Dans ce cas $n^2 + n = 2(2p^2 + p) = 2k$

où $k = 2p^2 + p \in \mathbb{N}$. Donc P est vraie

ii). si n est impair alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tq $n = 2p+1$

Dans ce cas $n^2 + n = 2(2p^2 + 3p + 1) = 2k'$

où $k' = 2p^2 + 3p + 1 \in \mathbb{N}$. Donc P est vraie

Par Disjonction de cas. P est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

2). mq I est vraie.

si n est impair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tq $n = 2p+1$

alors $n^2 - 1 = 4(p^2 + p)$

or d'après Q1. $\exists k \in \mathbb{N}$ tq $p^2 + p = 2k$

Finalement $n^2 - 1 = 8k$ donc $n^2 - 1$ est un multiple de 8

et I est vraie.

3). La contraposée de I est : n^2-1 n'est pas un multiple de 8

$\Rightarrow$ n est paire

celle-ci est vraie puisque I l'est (d'après Q.2)

4). non I s'écrit : n est impair et n^2-1 n'est pas un multiple de 8.

Puisque I est vraie non I est fausse.

5). La réciproque de I s'écrit : n^2-1 est un multiple de 8

$\Rightarrow$ n est impair

6). La contraposée de la réciproque de I signifie :

n pair $\Rightarrow$ n^2-1 n'est pas un multiple de 8.

⚠ Après avoir repondu à Q.2 il n'y a aucune démonstration à faire pour répondre aux Q.3 et Q.4.

Exo2 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$..

$H(n)$: " $u_n = (-2)^n$ ~~et~~ 3^n et $u_{n+1} = (-2)^{n+1}$ ~~et~~ $(3)^n$ "

⚠ En aucun cas on n'écrit $H(n)$: " $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = \ldots$ " !!

↳ jamais !!

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $H(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $u_0 = 2 = (-2)^0 + 3^0$

et $u_1 = 1 = (-2)^1 + 3^1$

Donc $H(0)$ est vraie.

⚠ il n'est pas correct d'écrire $u_0 = (-2)^0 + 3^0 = 2$

et $u_0 = (-2)^1 + 3^1 = 1$

cela supposerait que la formule que l'on cherche à démontrer est déjà vraie !

Hérédité on suppose que $H(n_0)$ est vraie pour $n_0 \in \mathbb{N}$ fixé

mq $H(n_0+1)$ est vraie.

par définition $u_{n_0+2} = u_{n_0+1} + 6u_{n_0} \overset{H(n_0)}{=} (-2)^{n_0+1} + 3^{n_0+1} + 6(-2)^{n_0} + 6.3^{n_0}$

$\vdots$

$= (-2)^{n_0+2} + 3^{n_0+2}$

Donc $H(n_0+1)$ est vraie.

Conclusion On a donc bien montré par récurrence que

$\forall n \in \mathbb{N}$ $H(n)$ est vraie !

Ex3 ⚠ à la présence d'accolades !!

I. 1) on trouve que $P(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

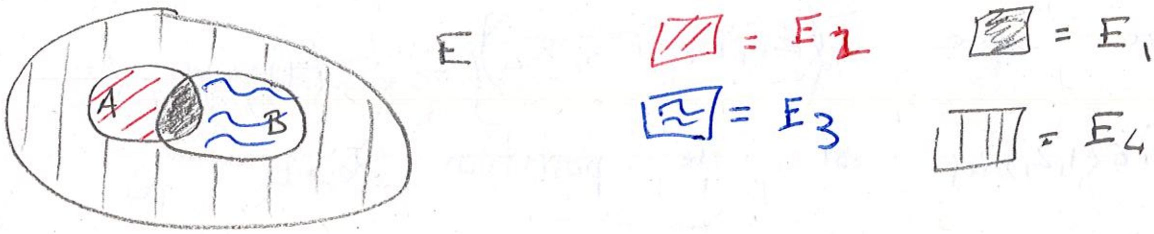
2) Puisque $\bar{A} = \{\{1,2\}, \{2\}\}$ et $\bar{B} = \{\emptyset, \{2\}\}$

on trouve que $E_1 = \{\{1\}\}$ $E_2 = \{\{1,2\}\}$

$E_3 = \{\emptyset\}$ et $E_4 = \{\{2\}\}$

II. Attention, il s'agit du cas général. A, B et E sont quelconques !

1)



2). $A \not\subset B$ est la negation de $A \subset B$: $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$

Donc $A \not\subset B$ signifie $\exists x \in A$ tq $x \notin B$

Autrement dit $A \not\subset B$ entraine $(\exists x \in E)\ (x \in A \cap \bar{B})$.

Donc $E_2 = A \cap \bar{B} \neq \emptyset$

3). On trouve que $E_1 \cap E_2 = A \cap (B \cap \bar{B}) = \emptyset$

puisque $B \cap \bar{B} = \emptyset$

4). Pour les mêmes raisons, on trouve que $E_1 \cap E_4 = A \cap \bar{A} \cap B \cap \bar{B} = \emptyset$

5). Les propriétés sur l'intersection et l'union d'ensembles entrainent que.

$$\bigcup_{i=1}^{4} E_i = A \cap (B \cup \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$$
$$= A \cap E \cup (\bar{A} \cap (B \cup \bar{B})) = A \cup \bar{A} = E$$

puisque $\forall X \subset E$ on a $X \cup \bar{X} = E$ et $X \cap E = X$

6). cf cours ⚠ il est important que $\forall i,j \in I = \{1,2,3,4\}$, $i \neq j$
on ait $E_i \cap E_j = \emptyset$

Ne pas écrire $E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 = \emptyset$! Cela ne suffit pas
(cela signifie qu'au moins un seul des E_i est vide)

Part III. D'après la partie II et I avec $E = \mathcal{P}(\{1,2\})$
et $A = \{\{1\}, \emptyset\}$ et $B = \{\{1,2\}, \{1\}\}$
(qui vérifiant bien $A \neq \emptyset$ $B \neq \emptyset$ $A \cap B \neq \emptyset$ $A \cup B \neq E$ et
$A \not\subset B$ $B \not\subset A$)

on trouve que ~~$\{E_1, E_2, E_3, E_4\} = \{\{1\}, \emptyset, \{2$~~
$(E_i)_{i \in \{1,2,3,4\}}$ est une partition de E, où
$\forall i \in \{1,2,3,4\}$ a été déterminé dans Q2 Part 1.