L2 PCAV Examen de Mathématiques du 17/12/2012

Durée : 2h00
Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés.
La notation tiendra compte de la rédaction.

Exercice 1.

(1) On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

(a) Montrer que la droite D d'équation $x + 2y = 2$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

(b) Donner une base de la droite d'équation $x + 2y = 0$.

(2) On considère, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (2, -4, 5)$ et $v_3 = (-1, 8, -13)$.

(a) Montrer que la famille $\{v_1, v_2\}$ est une famille libre. En déduire que le sous espace vectoriel F engendré par $\{v_1, v_2\}$ est de dimension 2 .

(b) Ecrire v_3 comme combinaison linéaire de v_1 et v_2. En déduire que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. On se donne deux réels λ et μ strictement positifs. On considère la variable aléatoire discrète $X : \Omega \to \mathbb{N}$ dont la loi de probabilité est définie par $P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ si $k \in \mathbb{N}$.

(1) De quelle loi s'agit-il ? Donner son espérance et sa variance.

(2) On définit une autre loi discrète $Y : \Omega \to \mathbb{N}$ dont la loi est définie par :

$$P(Y = n) = \begin{cases} 0 & si \quad n \; = \; 2k+1 \\ e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!} & si \quad n = \; 2k \end{cases}.$$

(a) Montrer que $E(Y) = 2\mu$.

(b) Quelle est l'espérance de $X + Y$?

On suppose maintenant que X et Y sont indépendantes.

(c) Calculer $P(X + Y = 0)$, $P(X + Y = 1)$,$P(X + Y = 2)$ et $P(X + Y = 3)$.

(d) En déduire $P(X + Y \geq 4)$.

(e) Montrer que $P(X + Y = 2n) = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{q=0}^{n} \frac{\mu^q}{q!} \frac{\lambda^{2n-2q}}{(2n-2q)!}$.

Exercice 3. Une machine fabrique des pièces cylindriques dont le diamètre exprimé en millimètres, est une variable aléatoire D qui suit une loi normale d' espérance m et de variance $(\sigma)^2$. L'écart-type est fixé à $\sigma = 0,4$ et la moyenne m est réglable. On note U la variable aléatoire centrée réduite associée à D, f la densité de U et F sa fonction de répartition. On donne les valeurs suivantes : $F(1,25) = 0,8944$ et $F(2,5) = 0,9938$. On laissera les résultats des calculs sous forme de fraction ou sous forme décimale.

(1) Rappeler l'expression de la densité f. Ecrivez F en fonction de f.

(2) On suppose que $m = 8$. Calculer $P(D > 9), P(D < 7,5)$ et $P(7,5 < D < 8,5)$.

(3) On vérifie les pièces à l'aide de deux calibres, un de $7,5$ mm et un de $8,5$ mm. La pièce est acceptée si elle passe dans le grand calibre mais pas dans le petit. Calculer la probabilité qu'elle soit refusée pour chacune des valeurs : $m = 7,5$; $m = 8$ et $m = 8,5$.

(4) Si $m = 8$, calculer la probabilité que la pièce soit acceptée sachant qu'elle passe dans le gros calibre.

(5) Si la pièce est trop petite, elle est rejetée et la perte subie est de 10 euros. Si elle est trop grande, on peut la rectifier pour un coût de 3 euros et on admet que la pièce est acceptée aprés vérification. Le coût est nul si la pièce est bonne. On appelle Z la variable aléatoire qui décrit la perte. Montrer que c'est une variable aléatoire finie prenant trois valeurs. Calculer $E(Z)$ en fonction de F et de m.

(6) On pose $g(m) = E(Z)$. Rappeler pourquoi $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Calculer $g'(m)$ en fonction de F' et m.

(7) Résoudre $g'(m) = 0$: montrer que $m_0 = 8 + (0,16)\ln(\frac{10}{3})$ est la seule solution.

(8) En déduire m telle que $E(Z)$ soit minimale, c'est à dire pour que le réglage de la machine soit optimal.
(Pour information $m_0 \simeq 8,19$.)

①

Examen 17/12/2012

Conseil pour l'examen de la semaine prochaine : attention à la rédaction

Ex1 1) a) $\mathcal{D} : x + 2y = 2$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$, en effet $(0,0) \notin \mathcal{D}$.

b). $\dim \mathcal{D}' = 1$, il suffit donc de trouver un vecteur non nul appartenant à $\mathcal{D}'$ pour former une base. $v = \binom{-2}{1}$ convient.

2) a). on montre facilement que $v_1 \not\parallel v_2$ donc $\dim \mathrm{Vect}(v_1, v_2) = 2$ (a priori $1 \leqslant \dim \mathrm{Vect}(v_1, v_2) \leqslant 2$, comme $\{v_1, v_2\}$ est libre cela implique $\dim \mathrm{Vect}(v_1, v_2) > 1$).

b). on remarque $v_3 = 3v_1 - v_2$. $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est donc liée, ainsi $\mathcal{B}$ ne peut être une base de $\mathbb{R}^3$

Ex2

(1) question de cours $X \sim \mathcal{P}o(\lambda)$ $\mathbb{E}[X] = \lambda$, $V(X) = \lambda$

(2). par définition de l'espérance d'une va discrète

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{n \geqslant 0} n\, \mathbb{P}(Y = n) \underset{\substack{\text{def} \\ \text{de } Y}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} 2k\, \mathbb{P}(X = 2k)$$

$$= \sum_{k \geqslant 0} 2k\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k \geqslant 1} 2k\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= 2\lambda\, \underbrace{e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{= 1} = 2\lambda.$$

(b) par linéarité de l'espérance $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
$= \lambda + 2\mu$.

(c) on suppose mtn que $X \perp\!\!\!\perp Y$

$$\mathbb{P}(X+Y=0) = \mathbb{P}(X=0 \cap Y=0) \overset{\text{par } \perp\!\!\!\perp}{=} \mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=0) = e^{-\mu} e^{-\lambda}$$

$$\mathbb{P}(X+Y=1) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \mathbb{P}(X=0)\underbrace{\mathbb{P}(Y=1)}_{0 \text{ déf}} + \mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=0) = \lambda e^{-\lambda} e^{-\mu}$$

$$\mathbb{P}(X+Y=2) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \mathbb{P}(X=2)\,\mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=2)$$

comme $\forall k \quad \mathbb{P}(Y=2k+1)=0$

$$= e^{-\lambda} e^{-\mu}\left(\frac{\lambda^2}{2} + \mu\right)$$

$$\mathbb{P}(X+Y=3) \underset{\text{m̂ arguments}}{=} \mathbb{P}(X=3)\,\mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=2)$$

$$= e^{-\lambda} e^{-\mu}\left(\frac{\lambda^3}{6} + \mu\right)$$

(d) Puisque, pour n'importe quel évènement A, $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$

$$\mathbb{P}(X+Y \geqslant 4) = 1 - \mathbb{P}(X+Y<4) = 1 - \mathbb{P}(X+Y \leqslant 3)$$

$$= 1 - \left[\mathbb{P}(X+Y=0) + \mathbb{P}(X+Y=1) + \mathbb{P}(X+Y=2) + \mathbb{P}(X+Y=3)\right]$$

(e) mq $\forall n \geqslant 0 \quad \mathbb{P}(X+Y=2n) = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{q=0}^{n} \frac{\mu^q}{q!} \frac{\lambda^{2n-2q}}{(2n-2q)!}$

par indépendance $\mathbb{P}(X+Y=2n) = \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}(X=2n-k)\,\mathbb{P}(Y=k)$

on pose $j = \frac{k}{2}$ $\quad = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X=2n-2j)\,\mathbb{P}(Y=2j)$

par déf Y, il reste que les indices paires

(2) $= \sum_{j=0}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2n-2j}}{(2n-2j)!} e^{-\mu} \frac{\mu^{j}}{j!}$ $\square$

Ex3 $D \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ $U = \frac{D-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

(1) question de cours. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(2). $m=8$ Il faut se ramener à une $\mathcal{N}(0,1)$ pour utiliser les valeurs données.

i) $\mathbb{P}(D>9) = \mathbb{P}\left(\frac{D-m}{\sigma} > 2{,}5\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{D-m}{\sigma} \leq 2{,}5\right)$

$= 1 - F(2{,}5) = 0{,}0062$

ii) $\mathbb{P}(D<7{,}5) = \mathbb{P}\left(\frac{D-m}{\sigma} < -1{,}25\right) \underset{\text{symétrie de } f}{=} \mathbb{P}\left(\frac{D-m}{\sigma} > 1{,}25\right)$

$= 1 - F(1{,}25) = 0{,}1056$

iii) $\mathbb{P}(7{,}5 < D < 8{,}5) = \mathbb{P}\left(-1{,}25 < \frac{D-m}{\sigma} < 1{,}25\right)$

$= \mathbb{P}\left(\frac{D-m}{\sigma} < 1{,}25\right) - \mathbb{P}\left(\frac{D-m}{\sigma} < -1{,}25\right)$

$= F(1{,}25) - \mathbb{P}\left(\frac{D-m}{\sigma} > 1{,}25\right)$

$= 2F(1{,}25) - 1 = 0{,}7988$

3). Soit A la va qui vaut 1 si la pièce est acceptée
0 sinon.

$\mathbb{P}(A=1) = \mathbb{P}(7{,}5 < D \leq 8{,}5)$

$\mathbb{P}(A=0) \underset{\text{evenements disjoints}}{=} \mathbb{P}(D \leq 7{,}5) + \mathbb{P}(D > 8{,}5)$

i). si $m = 7,5$

calculons $\mathbb{P}(A=0)$.

$$\mathbb{P}\left(\frac{D-m}{\sigma} \leq 0\right) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\frac{D-m}{\sigma} > 2,5\right) = 1 - F(2,5)$$
$$= 0,0062$$

donc $\mathbb{P}(A=0) = 0,5062$

ii), iii) m̂ type de calculs.

4) - $m = 8$
$$\mathbb{P}(A=1 \mid D \leq 8,5) \overset{\text{def proba conditionnelle}}{=} \frac{\mathbb{P}(A=1 \cap D \leq 8,5)}{\mathbb{P}(D \leq 8,5)}$$
$$= \frac{\mathbb{P}(7,5 < D \leq 8,5)}{F(1,25)} = \frac{0,7988}{0,8944}$$

5). $Z \in \{0,3,10\}$.
$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{P}(Z=0) = \mathbb{P}(7,5 < D \leq 8,5) \\ \mathbb{P}(Z=3) = \mathbb{P}(D > 8,5) \\ \mathbb{P}(Z=0) = \mathbb{P}(D \leq 7,5) \end{array}\right\} \text{loi de } Z$$

$$E[Z] = 0 \times \mathbb{P}(Z=0) + 3\,\mathbb{P}(Z=3) + 10\,\mathbb{P}(Z=10)$$
$$= 3\left[1 - F\left(\frac{8,5-m}{\sigma}\right)\right] + 10\,F\left(\frac{7,5-m}{\sigma}\right) \qquad (*)$$

6). $F'(x) = \left(\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\right)' = f(x) - \underbrace{\lim_{y \to -\infty} f(y)}_{\overset{\text{ii}}{0}} = f(x)$

on dérive g à partir de $(*)$
$$g'(m) = \frac{3}{\sigma} f\left(\frac{8,5-m}{\sigma}\right) - \frac{10}{\sigma} f\left(\frac{7,5-m}{\sigma}\right)$$

7) on montre simplement (calculs) que. $g'(m) = 0 \iff m = 8 + 0,16 \ln\left(\frac{10}{3}\right)$

on en déduit (m̂ calculs) $g'(m) > 0 \iff \ln\left(\frac{3}{10}\right) > 50 - 6,25m$ (⚠ $x \mapsto \ln x$ est ↗)

$\iff m > m_0$.

(3) on en déduit le tableau de variation suivant

m	0		m_0		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$g(m_0)$	$\nearrow$	

Ainsi $\mathbb{E}[Z] = g(m) \geq g(m_0)$
$\forall m \geq 0$

$g(m_0)$ est la valeur minimale prise par $\mathbb{E}[Z]$.