Révisions
Séries de Fourier, séries de fonctions, séries entières.

0.1 Un peu de réflexion

Les questions suivantes ne seront pas traité en TD, il s'agit simplement de pistes de réflexion pour mieux assimiler certains théorèmes important du cours. Les points abordés sont en rapport avec les exercices de la feuille de TD.

1. Quelle est la différence entre le théorème de Parseval et celui de Jordan-Dirichlet ?

2. Donner des critères assurant le convergence de la série de Fourier $S_n(f)$.
3. Quels types de convergence connaissez vous concernant les suites et séries de fonction ? Y-a-t-il une hiérarchie entre ces différentes notions ?

4. Quels théorèmes du cours assurent qu'une suite/série de fonction préserve sa régularité en passant à la limite ? Par exemple : si $(f_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est une suite de fonction continue (resp. de classe C^1) qui converge vers f, a-t-on f continue ? (resp. $f \in C^1$? comment calculer f' ?).

5. Peut-on toujours intervertir limite (lorsque $n \to \infty$) et intégrale ?

6. Quelles sont les opérations licites sur le disque de convergence d'une série entière ? De quelle manière celle-ci converge-t-elle sur son disque de convergence ?

7. Quels critères connaissez vous pour s'assureer qu'une série à termes positifs/série entière/intégrale généralisée converge ? Que dire des séries dont le terme général change de signe ?
8. Comment prouver qu'une série à termes positifs/intégrale généralisée diverge ?
9. Que dit le thèorème de Cauchy-Lipschitz sur les solutions d'une équation différentielle muni de conditions initiales. Quelles méthodes connaissez vous pour déterminer une solution particulière d'une equation différentielle ? pour déterminer les solutions de l'équation homogène associée ?

10. Quels propriétés doit vérifier l'application $\|\cdot\|$ pour être une norme ? Citer au moins 4 normes différentes dont une sur un espace de dimension infinie.

0.2 Séries de Fourier

Exercice 1 *1. Soient $\epsilon \in]0,\pi[$ et $\sigma_\epsilon(t) = 1$ si $|t| \leq \epsilon$ et $\sigma_\epsilon(t) = 0$ si $\epsilon < |t| \leq \pi$. On prolonge cette fonction par périodicité sur $\mathbb{R}$, déterminer la série de Fourier de σ_ϵ.*

2. En déduire que $\forall a \in]0, 2\pi[$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin na}{n} = \frac{\pi - a}{2}$$

Exercice 2
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue 1-périodique. On suppose que f est également α-périodique avec α un nombre irrationnel (on peut choisir $\alpha = \sqrt{2}$ pour fixer les idées). Montrer que f est constante.

Indication : calculer les coefficients de Fourier $c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i2\pi nt/T}dt$ pour une fonction T-périodique. Après un changement de variable bien choisi, trouver des conditions sur c_n.

Exercice 3

(Lemme de Wirtinger)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 de période 2π et de moyenne nulle.

1. *Déterminer une relation entre $c_n(f)$ et $c_n(f')$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, à l'aide d'une intégration par partie.*
2. *Montrer que*
$$\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt \geq \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt. \tag{1}$$
3. *Montrer que l'égalité a lieu dans (1) si et seulement si :*
$$f(t) = A\cos(t) + B\sin(t),$$
où $A, B \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

(Inégalité isopérimétrique) Enoncé du problème : De toutes les courbes C fermées, simples, de classe C^1 et de longueur 2π, trouver celle qui entoure l'aire maximale a.

Rappel : une courbe simple de longueur L peut se paramêtrer par $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(s) = \big(f(s), g(s)\big)$. On admet que l'on peut imposer la condition suivante $f'(s)^2 + g'(s)^2 = 1$.

Théorème 1 (Green-Riemann, version faible)
L'aire a, délimitée par la courbe γ, est égale à
$$a = \int_0^L g(s)f'(s)ds.$$
si et seulement si la courbe γ est fermée.

Pour l'exercice, on choisira $L = 2\pi$ (le fait que la courbe soit fermée, i.e. $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, justifie l'utilisation des séries de Fourier).

1. *En utilisant le rappel précédent et (1) montrer que*
$$a \leq \pi, \tag{2}$$
où a désigne le domaine entouré par la courbe C.

   Indication : montrer que $2a \leq 2\pi$. On remarquera que pour $t \mapsto \gamma(t) = \big(f(t), g(t)\big)$ la courbe paramétrée représentant C (et vérifiant $f'(s)^2 + g'(s)^2 = 1$ pour tout $s \in [0, 2\pi]$) on peut aussi supposer f et g de moyenne nulle. En effet, une translation dans le plan ne modifie pas le problème considéré.
2. *Montrer que l'on a égalité dans (2) si et seulement si C est un cercle.*

0.3 Série de fonctions

Exercice 5
Etudier la convergence (simple, uniforme,, absolue, normale) sur $\mathbb{R}$ *des séries de fonctions de termes généraux :*

1. $f_n(x) = nx^2e^{-x\sqrt{n}}$.
2. $f_n(x) = \frac{1}{n+n^3x^2}, \quad n \neq 0$

Exercice 6
Montrer que pour tout réel $a > 0$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^a}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+na}$$

Indication : Soit $N \in \mathbb{N}$*, montrer que* $\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{1+na} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^a}dx + R_N$*, où* R_N *est un reste à déterminer.*

Exercice 7
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $t \in \mathbb{R}$*, soit* $f_n(t) = \frac{\arctan(nt)}{n^2}$*. Faire une étude complète de* $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *: domaine de définition, parité, limites, continuité, dérivabilité. On vérifiera que* f *n'est pas dérivable en* 0*, allure du graphe.*

Exercice 8
Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

0.4 Séries entières

Exercice 9
Calculer les sommes suivantes dans leur intervalle ouvert de convergence après avoir déterminé le rayon de convergence de la série proposée.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k})x^n$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+1)2^{n+1}x^n$.

Indication : $n^2+1 = (n+1)(n+2) - 3(n+1) + 2$ *et reconnaitre les dérivées successives d'une série entière de référence.*

Exercice 10
Développer en série entière les fonctions suivantes

1. $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$.

2. $g(x) = (\arcsin x)^2$.

Indication : montrer que g *vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre* 2 *à coefficients non constant. En déduire des conditions sur le terme général d'une solution, de cette équation différentielle, développable en série entière.*