Séries de Fourier : synthèse de cours

But : Ecrire une fonction f continue par morceaux et 2π-périodique sous la forme :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \frac{a_0}{2} + \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

ou sous la forme :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.$$

1 Coefficients de Fourier et Séries de Fourier

Définition 1 :

Coefficients réels de f : $\boxed{a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt}$, $n \geqslant 0$, $\boxed{b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt}$, $n > 0$

Coefficients complexes de f : $\boxed{c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt}$.

Remarques :

Comme les fonctions sont 2π-périodiques, on peut calculer les intégrales sur n'importe quel intervalle de longueur 2π.

On écrit souvent a_n et b_n au lieu de $a_n(f)$ et $b_n(f)$ s'il n'y a pas de confusion entre plusieurs fontions.

On utilise plutôt a_n et b_n si f est à valeurs réelles, et c_n pour f à valeurs complexes.

Remarque utile pour les calculs :

f paire $\Rightarrow b_n = 0,\ \forall n > 0$ et $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt, n \geqslant 0$.

f impaire $\Rightarrow a_n = 0,\ \forall n > 0$ et $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)dt, n \geqslant 0$.

Définition 2 :

La série $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ ou $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ s'appelle série de Fourier associée à f.

Remarques :

1. La somme partielle de cette série est un polynôme trigonométrique et vaut :

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \text{ ou } S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.$$

$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = \sum_{n=-N}^{N} < f, e^{inx} > e^{inx}$ est le projeté orthogonal de f sur le sous-espace vectoriel engendré par les $(e^{inx})_{n=-N}^{N}$.

2. Si on définit le produit scalaire : $< f, g >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$, alors on a :

$$\| f \|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} | f(t) |^2 \, dt$$

$$< f, 1 >= \frac{a_0}{2},\ \ < f, \cos(nx) >= \frac{a_n}{2},\ \ < f, \sin(nx) >= \frac{b_n}{2},\ \ < f, e^{inx} >= c_n.$$

3. **Inégalité de Bessel**

Soit f **continue**, 2π-périodique . On a pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=-p}^{p} | c_n(f) |^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{p} \frac{| a_n |^2 + | b_n |^2}{2} \leqslant ||f||^2 := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} | f(t) |^2 \, dt.$$

2 Quelques questions à se poser

- Pour quelles fontions f y a-t-il convergence ?
- Y a-t-il convergence vers f ?
- De quelle type de convergence s'agit-il : convergence pour la norme quadratique $||.||$ ou convergence simple et dans ce cas pour quels x a-t-on la convergence ?

3 Convergence des séries de Fourier

3.1 Convergence en norme quadratique

Théorème de Parseval

Si f **continue par morceaux**, 2π-périodique alors

1. Les sommes partielles S_N cv vers f en norme quadratique cad : $\lim\limits_{N\to+\infty} ||f - S_N||^2 = \lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t) - S_N(t)|^2 dt = 0$
2. On a la formule de Parseval

$$\boxed{||f||^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1}(|a_n|^2 + |b_n^2|)}.$$

3.2 Convergence simple

Théorème de Dirichlet

Si f est de classe $\boldsymbol{\mathcal{C}^1}$ **par morceaux**, 2π-périodique (non nécessairement continue) alors en tout point $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f \text{ est continue en } x \\ \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) & \text{si } f \text{ est discontinue en } x \end{cases}$$

On notera que le théorème précédent permet de calculer des séries en prenant des valeurs particulières de x.

Remarque : f est continue par morceaux si sur tout segment elle est continue sauf en un nombre fini de points de discontinuité x_0 où elle admet une discontinuité de 1ère espèce cad $\lim_{x_0^+} f$ et $\lim_{x_0^-} f$ existent mais diffèrent de $f(x_0)$.

4 Que faire en général dans les exercices ?

1. Tracer le graphe de f sur plusieurs périodes
2. Déterminer la classe (= régularité) de f pour connaître la convergence de la série de Fourier
3. Calculer les coefficients de Fourier de f (a_n, b_n, c_n selon le contexte)
4. Appliquer Parseval et/ou Dirichlet selon la classe de f (et possibilités de calculer la valeur de séries particulière à l'aide de ses deux théorémes).

5 Que faire si on ne comprend rien ?

Apprendre le cours, refaire les exercices du TD et poser des questions.