Remise à niveau : suites numériques

Kevin Tanguy

7 Novembre 2017, Angers

Cette feuille propose une série d'exercices portant sur la notion de suite numériques. Voici quelques rappels permettant de résoudre les exercices qui vont suivre.

1 Rappels

1.1 Sens de variation d'un suite

Une suite est famille de nombres indexée par des entiers. Un tel objet est souvent désigné par u_n ou $u(n)$ et correspond à un cas particulier de fonctions où n parcours les entiers plutôt que les nombres réels. Tout comme lors de l'étude de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il est possible d'étudier la monotonie d'une suite. Nous allons voir que cette étude est plus simple à mettre en place que l'étude des variations d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que nous aborderons dans le chapitre suivant.

Définition 1.1. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique, une telle suite sera dite*

- *croissante si, pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} \geq u_n$.*
- *décroissante si, pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} \leq u_n$.*

Remarque. En remplaçant le symbole $\geq$ par $>$ (resp. $\leq$ par $<$) on peut également définir la notion de suite strictement croissante (resp. strictement décroissante).

Remarque. Il est à noter que l'étude de la monotonie d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ consiste à déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \geq 0$.

Exemple 1.1. Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = \frac{3}{n+2}$, $n \geq 0$. On a donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3}{n+3} - \frac{3}{n+2} \\ &= \frac{3n+6-3n-9}{(n+3)(n+2)} \\ &= -\frac{3}{(n+3)(n+2)} \end{aligned}$$

De plus, puisque $n \in \mathbb{N}$ nous avons immédiatement que $n+2 > 0$ et $n+3 > 0$. Ainsi, nous avons donc montré que $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout $n \geq 0$. Ceci signifiant que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est (strictement) décroissante.

Remarque. Nous verrons plus tard dans le cours qu'il est possible de définir une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ peut-être définie à l'aide d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant $u_n = f(n)$, $n \geq 0$. Nous constaterons que la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ sera liée aux variations de la fonction f.

1.2 Suites usuelles

Dans cette section nous allons briévement rappeler la définition de certaines suites usuelles.

1.2.1 Suites arithmétiques

Il s'agit probablement d'une des suites les plus simples à étudier : elles se définissent par récurrence et l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant systématiquement le même nombre réel r. Formellement

Définition 1.2. *Une suite arithmétique est définie par le relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + r \quad n \geq 0, \\ u_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Le réel r est appelé la raison de la suite.

Exemple 1.2.

1. La suite $u_0 = 1$, $u_1 = 6$, $u_2 = 11$, $u_3 = 16, \ldots$ est arithmétique de raison 5.

2. La suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - 3 \quad n \geq 0, \\ u_0 = 10 \end{cases}$$

   est arithmétique de raison -3.

3. La suite des entiers naturels impairs est arithmétique de raison 2.

Remarque. Remarquons le fait suivant : une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est arithmétique si et seulement si la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante (ne dépend pas de n) pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, la constante obtenue est la raison de la suite.

Exemple 1.3.

1. Considérons la suite définie par $u_n = 3n - 2$ et montrons qu'il s'agit d'une suite arithmétique de raison 3. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3(n+1) - 2 - (3n - 2) \\ &= 3n + 3 - 2 - 3n + 2 = 3. \end{aligned}$$

   Nous avons donc bien montré que la suite est arithmétique de raison 3.

2. Il est important d'avoir à l'esprit que de nombreuses suites ne sont pas arithmétique. Cela consiste à observer que la différence entre u_{n+1} et u_n n'est pas constante et dépend de n. Par exemple, étudions la suite définie par $v_n = n^2$, $n \geq 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n =& (n+1)^2 - n^2 \\ =& 2n + 1 \end{aligned}$$

   Cette suite n'est donc pas arithmétique.

Le résultat suivant montre qu'il est possible d'exprimer une suite arithmétique en fonction de n plutôt que par une relation de récurrence.

Proposition 1. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$, alors*

arith

$$u_n = u_0 + nr \quad n \geq 0$$

Exemple 1.4. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison $r = -2$ et de premier terme $u_0 = 7$. D'après la proposition précédente, nous avons l'expression suivante

$$u_n = 7 - 2n, \quad n \geq 0.$$

Notons que cette expression permet de calculer plus facilement la valeur de $u_{50} = 7 - 2 \times 50$ sans avoir à calculer les termes précédents $u_1, \ldots, u_{49}$ à l'aide de la relation de récurrence.

1.2.2 Suites géométriques

Voici un autre exemple de suite usuelle, cette fois-ci le terme suivant est obtenu en multipliant systématiquement le terme précédent par le même nombre réel q. Autrement dit :

Définition 1.3. *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ si*

$$u_{n+1} = q \times u_n, \quad n \geq 0$$

Exemple 1.5.

1. la suite $u_1 = 2$, $u_2 = 2$, $u_3 = 4$, $u_4 = 8, \ldots$ est géométrique de raison 2.

2. la suite définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n & n \geq 0, \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

   est arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$.

3. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ est géométrique de raison -1.

Remarque. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est géométrique si et seulement si le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant pour tout entier n. Dans ce cas, la constante obtenue est la raison q de la suite.

Exemple 1.6. Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = 5 \times 3^{n+2}$. Il est évident que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 3^{n+3}}{5 \times 3^{n+2}} = 3.$$

Nous avons donc montré que la suite est géométrique de raison 3.

Similairement au cas des suites arithmétiques, il est possible d'obtenir une expression en fonction de n d'une suite géométrique. Plus précisément,

Proposition 2. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$, alors l'expression suivante est satisfaite*

$$u_n = u_0 \times q^n, \quad n \geq 0.$$

1.3 Convergence de suite

Cette partie s'interroge sur le comportement limite des suites : que se passe-t-il pour une suite donnée $(u_n)_{n\geq 0}$ lorsque n tend vers l'infini ?

1.3.1 Limites de suites usuelles

Les limites suivantes sont celles que nous rencontrerons le plus souvent durant ce cours.

Proposition 3. *Soit $p > 0$, alors $\lim_{n\to\infty} n^p = +\infty$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.*

La proposition précise le comportement d'une suite géométrique lorsque $n \to \infty$.

Proposition 4. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $|q| < 1$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.*

2. *Si $q = 1$ alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est constante et $\lim_{n\to\infty} u_n = u_0$.*

3. *Si $q > 1$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n = \mathrm{sgn}(u_0)\infty$.*

4. *Si $q \leq -1$ la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ n'admet pas de limite et donc diverge.*

1.4 Convergence de suites et monotonie

Parfois il peut-être difficile de calculer explicitement une limite. Sous certaines hypothèses, il est tout de même possible de prouver que la suite converge (sans nécessairement savoir vers quelle limite).

Par exemple, certains résultats d'encadrement (par des suites plus simples) peuvent s'avérer utile pour déterminer la limite d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ donnée.

Théorème 5 (Gendarmes)**.** *Soit $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ trois suites telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$v_n \leq u_n \leq w_n$$

et

$$\lim_{n\to\infty} v_n = l \quad et \quad \lim_{n\to\infty} w_n = l$$

alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et $\lim_{n\to\infty} u_n = l$.

Exemple 1.7. Considérons la suite $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Il n'est pas difficile de montrer que , pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n \leq u_n \leq w_n$$

avec $v_n = -\frac{1}{n}$ et $w_n = \frac{1}{n}$. De plus $\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = 0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Remarque. Ce théorème peut aussi s'utiliser de la manière suivante : supposons que l'on souhaite montrer qu'une suite diverge vers $+\infty$. On peut minorer notre suite par une suite plus simple qui tend de manière évidente vers $+\infty$. Par exemple, considérons la suite $u_n = (-1)^n + n$. Il n'est pas difficile de montrer que, pour tout $n \geq 0$,

$$u_n \geq n - 1.$$

Posons alors $v_n = n - 1$. Il est évident que $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$, par suite $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Voici un dernier résultat concernant la convergence de suite. Pour cela nous devons définir la notion de suite adjacentes.

Définition 1.4. *Soient $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites. On dit que ces suites sont adjacentes si*

1. *$(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante.*

2. *$(b_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante.*

3. *$\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = 0$*

Théorème 6 (Adjacentes)**.** *Soient $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites adjacentes. Alors il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = l$$

Remarque. En fait ce théorème fournit un résultat un peu plus précis et peut s'avérer utile pour exhiber une approximation d'un nombre réel. En effet, si l'on suppose que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante adjacente à la suite $(b_n)_{n\geq 0}$ décroissante et si l'on note par l leur limite mutuelle alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \leq l \leq b_n.$$

Il suffit donc de déterminer à partir de quel rang $n \in \mathbb{N}$ l'inégalité suivante est satisfaite $b_n - a_n \leq 10^{-3}$, pour obtenir un encadrement à 10^{-3} (par exemple, ce choix est arbitraire) de la limite l.

Notons que de nombreux points n'ont pas été abordé dans ce cours : notion de majoration ou de minoration d'une suite, raisonnement par récurrence, ... Nous encourageons le lecteur à explorer ces notions, pour compléter ses connaissances, à l'aide d'un ouvrage de son choix.

2 Exercices

Exercice 1. Etudier le sens de variations des suites définies, pour $n \geq 0$, ci-dessous :

$$u_n = n^2, \qquad u_n = -2n + 3, \qquad u_n = (-1)^n, \qquad u_n = \frac{1}{n+2}.$$

Lorsque cela est possible, préciser le comportement de la suite lorsque $n \to \infty$.

Exercice 2. Chaque année la production d'une usine baisse de 5%. Au cours de l'année 2000 la production de cette usine était de 25000 unités. Nous noterons $P_0 = 25000$ et P_n désignera la production prévue au cours de l'année $2000 + n$.

1. Montrer que $(P_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique et déterminer sa raison q.

2. Calculer la production prévue au cours de l'année 2015.

Exercice 3. Les suites suivantes sont-elles arithmétiques, géométriques ? Justifier votre réponse

$$u_n = 2n - 3, \qquad u_n = \frac{1+n}{n+2}, \qquad u_n = 4 \times 2^n \qquad n \geq 0$$

Que se produit-il lorsque $n \to \infty$?

Exercice 4. Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique telle que $u_5 = 5$ et $u_{11} = 11$. Déterminer la raison r ainsi que u_0. Que dire de la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 5. On considère les deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} & n \geq 0, \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} & n \geq 0, \\ v_0 = 4 \end{cases}$$

1). Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.

Considérons la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $w_n = v_n - u_n$. On admettra par la suite que $w_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2). Montrer que la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

3). Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ lorsque $n \to \infty$.

4). Après avoir étudié le sens de variation de suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$, démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
***Indication** : on pourra utiliser le résultat obtenu à la question précédente.*

On considère à présent la suite $(t_n)_{n\geq 0}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

5). Démontrer que la suite $(t_n)_{n\geq 0}$ est constante.

6). En déduire la limite des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$.