Université PAUL SABATIER

Révisions calcul différentiel : un peu de réflexion

Les questions suivantes ne seront pas traitées en TD, il s'agit simplement de pistes de réflexion pour mieux assimiler certains théorèmes importants du cours. Les points abordés sont en rapport avec les exercices de la feuille de TD.

Sauf mention du contraire, les fonctions $f, g, h, \ldots$ considérées dans la suite sont de classe $C^1(D, \mathbb{R})$, où D est un ouvert de $\mathbb{R}^n, n \geq 1$. Nous noterons également par U un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^d, d \geq 1$.

0.1 En dimension 1

Avant de faire du calcul différentiel en dimension strictement supérieur à 1, il est important d'avoir bien compris le cas d'une seule variable.

1. Quel est l'utilité d'un $DL(1, a)$? Autrement dit, quelle est la signification de $f(a + h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$ lorsque $h \to 0$?
2. Pourquoi calcule-t-on des dérivées ? Pouvez vous l'interpréter physiquement ?
3. Pouvez-vous expliquer la différence entre les notions suivantes : le nombre dérivée $f'(a)$, la fonction dérivée f', la différentielle Df_a de f au point a et l'application différentielle Df ? Relier ces notions à celle de dérivabilité que vous connaissez déjà.
4. Quels sont les liens logiques entre les assertions suivantes : f est dérivable et f est continue ?
5. Quel peut-être l'utilité de regarder un $DL(2, a)$ pour une fonction ? A quoi peuvent servir les dérivées secondes ?
6. En quoi les dérivées successives sont utiles dans l'étude des variations d'une fonction ?
7. Vous souvenez vous de conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admette une fonction réciproque f^{-1} ? A quelle condition f^{-1} est-elle dérivable ? Peut-on exprimer une relation entre la dérivée de f et celle de f^{-1} ?
8. Pouvez vous calculer la dérivée d'une fonction composée $f \circ g$?

0.2 Partie théorique

Il s'agit à présent de se convaincre qu'il y a beaucoup de points communs entre la notion de dérivabilité et celle de différentiabilité. En fait, il s'agit de la même idée ! La seule difficulté peut provenir des notations (qui sont un peu plus lourdes puisque nous sommes en dimension > 1). Il est important de bien saisir la nature des objets que l'on manipule pour commettre moins de fautes.

1. De manière similaire à quoi peuvent être utile les développements limités d'une fonction $f : D \to \mathbb{R}^d, d \geq 1$?
2. Quelle est la nature de Df_a ? (Qui sera noté ∇f_a lorsque $d = 1$).

3. Quels sont les liens logiques entre les assertions suivantes : f est différentiable sur D, f est C^1 sur D, f est C^0 sur D.

4. Quels sont les liens logiques entre les assertions suivantes : les dérivées partielles de f existent en tout point de D, f est différentiable sur D.

5. A quelle condition $f \in C^1(D)$?

6. Savez vous calculer $D(f \circ g)$?
7. Qu'est ce qu'un difféomorphisme ? Quels critères sont à vérifier pour montrer que f est un difféomorphisme de D sur U ? Comparer avec la dimension 1.

8. Quelles conditions connaissez-vous pour montrer qu'une matrice est inversible ?
9. Pouvez vous reconnaitre des analogies entre l'étude des extremums d'une fonction à plusieurs variables et le cas de la dimension 1 ?

10. Quels est la différence entre un extremum global et un extremum local ? En dimension 1, pouvez vous faire des dessins de fonctions présentant ces deux types d'extremums ? Un seul des deux ? Aucun ?
11. Quels est le lien entre le critère de Monge et l'étude des valeurs propres de la matrice symétrique $D^2 f_a$?

12. Que doit-on faire si le critère de Monge n'est pas vérifié (i.e. : $rt = s^2$) pour conclure ? Faire une analogie avec la dimension 1.

0.3 Quelques idées à connaitre

Voici quelques idées vu en TD pour prouver qu'une fonction est prolongeable par continuité ou non en 1 point.

La comparaison des dégrés cumulés du numérateur et du dénominateur peut indiquer si la fonction risque d'être prolongeable ou non. Cela permet ensuite de savoir si l'on va chercher à majorer notre fonction par quelque chose qui tend vers 0 ou bien la minorer par une quantité qui ne tend pas vers 0. On procède de la même manière pour montrer qu'une série/intégrale généralisée converge ou non .
Si l'on souhaite montrer que f est prolongeable par continuité (en $(0,0)$ par exemple)

(Note : dans cette fiche et la plupart des exercices, nous avons choisis arbitrairement de regarder des prolongements en $(0,0)$, quitte a faire des translation tout ce qui précède reste valable pour $(x,y) \to (a,b)$).

1. On cherche un candidat pour l'éventuel prolongement. Regarder $f(x,0)$ ou $f(0,y)$ puis faire tendre $x \to 0$ (resp. $y \to 0$) permet d'obtenir une condition nécessaire sur l'éventuel prolongement.

   Une fois, **un candidat $l \in \mathbb{R}$ obtenu**, il faut montrer que $|f(x,y) - l| \to 0$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$.

2. On peut donc majorer directement cette différence en utilisant certaines inégalités pratiques, $\forall x, y \in \mathbb{R}$:
$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$
$$x^2 + y^2 \geq x^2, \quad x^2 + y^2 \geq y^2$$
$$|\sin(x)| \leq |x|$$
etc... L'important est d'obtenir une quantité qui converge vers 0 lorsque $(x, y) \to (0, 0)$. Beaucoup de ces inégalités peuvent être obtenues à l'aide du théorème des accroissements finis.

3. On peut également passer en coordonnées polaires en posant $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta), r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi[$. Et ainsi obtenir une quantité indépendante de θ qui tend vers 0 lorsque $r \to 0$. On pourra utiliser des propriétés connues des fonctions trigonométriques, $\forall \theta \in \mathbb{R}$:
$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$
$$|\cos(\theta)| \leq 1, \quad |\sin(\theta)| \leq 1$$
etc...

Si jamais on souhaite montrer que la fonction **n'est pas prolongeable** par continuité, il suffit d'exhiber une direction pour laquelle la fonction ne possède pas de limites.

L'idée la plus simple est de poser $y = \phi(x)$ (ou le contraire) pour une fonction ϕ bien choisie (voir exemple en TD : $\phi(x) = x, \phi(x) = tx$ avec $t \in \mathbb{R}, \ldots$).

1. Il est important que $\phi(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$ pour avoir $(x, y) \to (0, 0)$ lorsque $x \to 0$.

2. Il faut également que ϕ soit choisie de telle sorte à ce que
$$\lim_{x \to 0} f(x, \phi(, x)) \neq l.$$

Bien entendu il n'y a pas de recette miracle, l'important est chercher les exercices du TD, de se souvenir de certaines astuces ou manière de procéder pour les conserver dans un coin de sa tête et les tester pour voir laquelles risque de fonctionner. Seule, l'expérience permet de juger si une méthode est plus pratique qu'une autre.

Voici deux dernières remarques pour conclure cette feuille. En pratique vous êtes confronté à une fonction $f(x, y)$ définies sur $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine et $f(0, 0) = 0$. On montre facilement que $f \in C^1$ sur $\mathbb{R}^2_*$, il reste ensuite plusieurs questions à élucider :

1. $f \in C^0$ en $(0, 0)$? (Nous avons déjà parlé de ceci plus haut dans la feuille).

2. $f \in C^1$ en $(0, 0)$? Nous avons calculé au préalable les dérivées partielles de f lorsque $(x, y) \neq (0, 0)$, il reste à voir si celles-ci son continues en $(0, 0)$. Pour cela, il est impératif de déterminer $\partial_x f(0, 0)$ et $\partial_y f(0, 0)$ et il **n'y a pas d'autre choix que de revenir à la définition des dérivées partielles ! !**
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \partial_x f(0, 0)$$
et
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \partial_y f(0, 0).$$
il reste enfin à montrer que $|\partial_x f(x, y) - \partial_x f(0, 0)| \to 0$ lorsque $(x, y) \to (0, 0)$ (de même pour $\partial_y f$) pour conclure.

Le dernier point à aborder concerne la différentiabilité des fonctions composées (celui-ci à déjà été vu en CM et en TD). Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ deux fonctions C^1. On a donc

$$(u, v) \mapsto f(u, v)$$

et

$$(x, y) \mapsto h(x, y) = \big(h_1(x, y), h_2(x, y)\big) \in \mathbb{R}^2.$$

La question est de déterminer la différentielle de $g = f \circ h$. On obtient (de manière analogue à la dimension 1) alors

$$\partial_x g(x, y) = \partial_u f\big(h(x, y)\big)\partial_x h_1(x, y) + \partial_v f\big(h(x, y)\big)\partial_x h_2(x, y),$$

de même

$$\partial_y g(x, y) = \partial_u f\big(h(x, y)\big)\partial_y h_1(x, y) + \partial_v f\big(h(x, y)\big)\partial_y h_2(x, y)$$

Ou encore, de manière plus compacte, $D(f \circ h(a)) = Df\big(h(a)\big)Dh(a)$, où $a = (x, y)$ et

$$Df(a) = \big(\partial_u f(a), \partial_v f(a)\big)$$

et

$$Dh(a) = \begin{pmatrix} \partial_x h_1(a) & \partial_y h_1(a) \\ \partial_x h_2(a) & \partial_y h_2(a) \end{pmatrix}$$

Ainsi, dans les exercices, il est important de bien identifier les différentes applications mises en jeu et de calculer leurs matrices Jacobiennes pour enfin effectuer le produit matricielle. (Si l'on est suffisamment à l'aise, ce calcul peut aussi se faire directement).