Révisions calcul différentiel (suite) : un peu de réflexion

Les questions suivantes ne seront pas traitées en TD, il s'agit simplement de pistes de réflexion pour mieux assimiler certains théorèmes importants du cours. Les points abordés sont en rapport avec les exercices de la feuille de TD.

Sauf mention du contraire, les fonctions $f, g, h, \ldots$ considérées dans la suite sont de classe $C^1(D, \mathbb{R})$, où D est un ouvert de $\mathbb{R}^n, n \geq 1$. Nous noterons également par U un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^d, d \geq 1$.

0.1 En dimension 1

Avant de faire du calcul différentiel en dimension strictement supérieur à 1, il est important d'avoir bien compris le cas d'une seule variable.

1. A quelles conditions sur f existe-t-il un fonction réciproque ? Sous quelles conditions f^{-1} est-t-elle dérivable ?

2. Quel est l'utilité d'un $DL(2, a)$? Quelles informations les dérivées d'ordre deux peuvent-elles nous apporter ?

3. Comparer les formules de Taylor -Young à l'ordre 2 en dimension un et en dimension supérieur.

4. Pouvez vous exhiber une fonction qui présente un point critique n'étant pas un extremum ?

0.2 Difféomorphisme

En CM et en TD nous avons étudié la notion de difféomorphisme, voici les deux types de cas que nous avons rencontré :

1. La fonction f est relativement simple (par exemple $f(x, y) = (x + y, x - y)$) et l'on peut facilement calculer f^{-1} qui sera C^1 de manière évidente.

2. La fonction est plus compliquée (par exemple, le changement de coordonnées polaires). On se retrouve alors à utiliser le théorème d'inversion globale :
   - On restreint l'espace de départ à un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ sur lequel f est **injective**. Ce qui fournit une **bijection** de U sur $\mathbf{V} = \mathbf{f}(\mathbf{U})$ (i.e. l'existence de f^{-1}).

   - On montre que la matrice jacobienne de f, $Jf_{(x)}$, est **inversible** $\forall x \in U$.

   Alors le Théorème d'inversion globale, nous assure que $f^{-1} \in C^1(V)$.

Comme application, nous avons vu que des changements de variables bien choisis permettaient de transformer une EDP en une EDO que nous savons résoudre.

0.3 Extremums

Tout comme en dimension un, les dérivées partielles d'ordres 2, peuvent fournir un **critère suffisant** pour déterminer la nature des extremums locaux d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2,

1. En calculant les dérivées partielles d'ordre 1, on determine les points critiques de f en résolvant le système
$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 0 \\ \partial_y f(x,y) = 0 \end{cases}$$
Attention, les points obtenus comme solutions du système précédent ne sont pas forcément des extremums. Être un point critique n'est qu'une **condition nécessaire** pour être un extremum.

2. On calcule ensuite la matrice Hessienne (pour quelle raison cette matrice est-t-elle **symétrique** ?) de f aux points critiques (x,y) :
$$\mathrm{Hessf}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) & \frac{\partial^2}{\partial y^2 f}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

Il reste ensuite à appliquer le critère de Monge :

— si $\mathbf{rt - s^2 > 0}$ et $\mathbf{r < 0}$ il s'agit d'un **maximum local**.

— si $\mathbf{rt - s^2 > 0}$ et $\mathbf{r > 0}$ il s'agit d'un **minimum local**.

— si $\mathbf{rt - s^2 < 0}$ il s'agit d'un point selle et ce n'est **pas un extremum local**.

— si $\mathbf{rt - s^2 = 0}$, **on ne peut pas conclure**.

Quelques remarques sur le critère de Monge :

1. Pour se souvenir du critère, on peut comparer avec la dimension un et la fonction $x \mapsto x^2$. En effet, sa dérivée seconde vaut $x \mapsto 1 > 0$ et nous avons un minimum local en 0. Similairement, avec la fonction $x \mapsto -x^2$, nous avons sa dérivée seconde égale à $x \mapsto -1 < 0$ et un maximum local en 0.

2. Le point selle correspond vraiment (localement) à une selle de cheval : suivant un certaine direction notre point sera un minimum local, tandis que pour une autre direction il s'agira d'un maximum local (faire un dessin).

3. Dans le dernier cas on ne peut conclure : la Hessienne est dégénérée. Il faudrait faire un développement de Taylor à un ordre supérieur pour conclure (comme en dimension un).

4. Pour aller un peu plus loin, le calcul $rt - s^2$ permet de determiner (seulement en dimension deux) si la matrice Hessienne est definie positive (ou définie négative) en tant représentation matricielle d'une forme quadratique dans une base.

Il resterait ensuite à déterminer si les éventuels extremum locaux obtenus ne sont pas globaux !