SUITES NUMÉRIQUES

KEVIN TANGUY

1. Notion de suite numérique

1.1. **Définition et exemples.**

Définition 1.1. *Une suite numérique* $(u_n)_{n\geq 0}$ *est une liste indexée de nombres. Autrement dit, il s'agit d'une fonction* u *qui associe un nombre réel* u_n *à tout entier naturel* $n \geq 0$*. Formellement,*

$$u \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n \end{array}$$

Exemple 1.1. Débutons par un exemple simple en considérant la suite suivante

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = 4, \quad u_3 = 6, \ldots$$

Cette suite consiste donc à numéroter les nombres entiers pairs.

Il est également possible de générer une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ à l'aide d'une formule explicite.

Exemple 1.2. En reprenant l'exemple précédent, cela revient à définir la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de la manière suivante :

$$u_n = 2n \quad n \geq 0.$$

Ainsi, pour chaque valeur de $n \in \mathbb{N}$ on peut calculer la valeur de u_n à l'aide de la formule précédente.

Exemple 1.3. Bien sûr, on peut également imaginer des formules plus compliquées

$$u_n = \frac{2}{2^n - 1}, \quad n \geq 1.$$

Remarque. On notera le fait suivant : dans l'exemple 1.2, le premier terme de la suite débute à l'indice 1 tandis que dans l'exemple 1.3 la suite débute à l'indice 0.

Exemple 1.4. Il est également possible de définir une suite par une formule de récurrence. Grossièrement cela revient à construire la suite de proche en proche :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 1 \quad n \geq 0, \\ u_0 = 0, \end{cases}$$

Remarque. Cela signifie que l'on peut déterminer u_1 à partir de u_0, puis avec u_1 on peut calculer u_2 etc ...

1.2. **Sens de variation d'un suite.** Tout comme lors de l'étude de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il est possible d'étudier la monotonie d'une suite.

Définition 1.2. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique, une telle suite sera dite*
— *croissante si, pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} \geq u_n$.*
— *décroissante si, pour toutpour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} \leq u_n$.*

Remarque. En remplaçant le symbole $\geq$ par $>$ (resp. $\leq$ par $<$) on peut égalemement définir la notion de suite strictement croissante (resp. strictement décroissante).

Remarque. Il est à noter que l'étude de la monotonie d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ consiste à déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \geq 0$.

Exemple 1.5. Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = \frac{3}{n+2}$, $n \geq 0$. On a donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3}{n+3} - \frac{3}{n+2} \\ &= \frac{3n+6-3n-9}{(n+3)(n+2)} \\ &= -\frac{3}{(n+3)(n+2)} \end{aligned}$$

De plus, puisque $n \in \mathbb{N}$ nous avons immédiatement que $n+2 > 0$ et $n+3 > 0$. Ainsi, nous avons donc montré que $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout $n \geq 0$. Ceci signifiant que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est (strictement) décroissante.

Remarque. Nous verrons plus tard dans le cours qu'il est possible de définir une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ peut-être définie à l'aide d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant $u_n = f(n)$, $n \geq 0$. Nous constaterons que la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ sera liée aux variations de la fonction f.

2. Suites usuelles

Dans cette section nous allons briévement rappeler la définition de certaines suites usuelles.

2.1. **Suites arithmétiques.** Il s'agit probablement d'une des suites les plus simples à étudier : elles se définissent par récurrence et l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant systématiquement le même nombre réel r. Formellement

Définition 2.1. *Une suite arithmétique est définie par le relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + r & n \geq 0, \\ u_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Le réel r est appelé la raison de la suite.

Exemple 2.1. (1) La suite $u_0 = 1$, $u_1 = 6$, $u_2 = 11$, $u_3 = 16, \ldots$ est arithmétique de raison 5.

(2) La suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - 3 & n \geq 0, \\ u_0 = 10 \end{cases}$$

est arithmétique de raison -3.

(3) La suite des entiers naturels impairs est arithmétique de raison 2.

Remarque. Remarquons le fait suivant : une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est arithmétique si et seulement si la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante (ne dépend pas de n) pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, la constante obtenue est la raison de la suite.

Exemple 2.2. (1) Considérons la suite définie par $u_n = 3n - 2$ et montrons qu'il s'agit d'une suite arithmétique de raison 3. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3(n+1) - 2 - (3n-2) \\ &= 3n + 3 - 2 - 3n + 2 = 3. \end{aligned}$$

Nous avons donc bien montré que la suite est arithmétique de raison 3.

(2) Il est important d'avoir à l'esprit que de nombreuses suites ne sont pas arithmétique. Cela consiste à observer que la différence entre u_{n+1} et u_n n'est pas constante et dépend de n. Par exemple, étudions la suite définie par $v_n = n^2$, $n \geq 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (n+1)^2 - n^2 \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$

Cette suite n'est donc pas arithmétique.

Le résultat suivant montre qu'il est possible d'exprimer une suite arithmétique en fonction de n plutôt que par une relation de récurrence.

Proposition 1. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$, alors*

$$u_n = u_0 + nr \quad n \geq 0$$

Exemple 2.3. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison $r = -2$ et de premier terme $u_0 = 7$. D'après la proposition précédente, nous avons l'expression suivante

$$u_n = 7 - 2n, \quad n \geq 0.$$

Notons que cette expression permet de calculer plus facilement la valeur de $u_{50} = 7 - 2 \times 50$ sans avoir à calculer les termes précédents $u_1, \ldots, u_{49}$ à l'aide de la relation de récurrence.

2.2. **Suites géométriques.** Voici un autre exemple de suite usuelle, cette fois-ci le terme suivant est obtenu en multipliant systématiquement le terme précédent par le même nombre réel q. Autrement dit :

Définition 2.2. *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ si*

$$u_{n+1} = q \times u_n, \quad n \geq 0$$

Exemple 2.4. (1) la suite $u_1 = 2$, $u_2 = 2$, $u_3 = 4$, $u_4 = 8, \ldots$ est géométrique de raison 2.

(2) la suite définie par

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n & n \geq 0, \\ u_0 = 3 \end{array} \right.$$

est arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$.

(3) La suite définie par $u_n = (-1)^n$ est géométrique de raison -1.

Remarque. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est géométrique si et seulement si le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant pour tout entier n. Dans ce cas, la constante obtenue est la raison q de la suite.

Exemple 2.5. Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = 5\times 3^{n+2}$. Il est évident que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 3^{n+3}}{5 \times 3^{n+2}} = 3.$$

Nous avons donc montré que la suite est géométrique de raison 3.

Similairement au cas des suites arithmétiques, il est possible d'obtenir une expression en fonction de n d'une suite géométrique. Plus précisément,

Proposition 2. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$, alors l'expression suivante est satisfaite*

$$u_n = u_0 \times q^n, \quad n \geq 0.$$

2.3. **Suites arithmético-géométriques.** Il est également possible mélanger les opérations apparaissant dans les suites arithmétiques et géométriques pour obtenir un objet un peu plus complexe.

Définition 2.3. *Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite arithmético-géométrique s'il existe des réels r et q tels que $(u_n)_{n\geq 0}$ soit définie par la relation de récurrence suivante :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{n+1} = qu_n + r, & n \geq 0, \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Remarque. De telles suites peuvent servir, par exemple, à modéliser (grossièrement) des flux de populations : imaginons qu'une population soit soumise à un apport (fixe) de 10000 personnes par an et une fuite proportionnelle de 5%. Cela pourrait se retranscrire par la formule de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = u_n + 10000 - \frac{5}{100}u_n, \quad n \geq 0$$

où u_n désigne la taille de la population à l'année n. Il n'est pas difficile de montrer que l'expression précédente se réecrit de la manière suivante :

$$u_{n+1} = qu_n + r, \quad n \geq 0$$

avec $q = \frac{95}{100}$ et $r = 10000$.

Il est possible d'exprimer une suite arithmético-géométrique en fonction de n.

Proposition 3. *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite arithmético-géométrique, c'est-à-dire*

$$\begin{cases} u_{n+1} = qu_n + r, \quad n \geq 0, \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$*. Nous excluons le cas trivial* $q = 1$*. Posons* $\alpha = \frac{r}{1-q}$*, alors nous avons l'expression suivante de* $(u_n)_{n\geq 0}$

$$u_n = q^n(u_0 - \alpha) + \alpha, \quad n \geq 0$$

3. Rappels de raisonnement par récurrence

Cette courte section fait office de rappels concernant la notion de raisonnement par récurrence. Voici le schéma de preuve d'un tel raisonnement : on souhaite démontrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, qu'une certaine propriété $P(n)$ est satisfaite pour $n \geq 0$. Pour fixer les idées nous allons travailler sur un exemple concret en démontrant la proposition 2.1. Considérons donc la suite arithmétique $(u_n)_{n\geq 0}$. Autrement dit, pour un certain $r \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in \mathbb{R}$ nous avons l'expression suivante :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + r \quad n \geq 0, \\ u_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Nous souhaitons alors démontrer par récurrence que la propriété $P(n)$ (définie ci-dessous) est satisfaite pour tout $n \geq 0$.

$$P(n) \,:\, u_n = u_0 + nr$$

Le raisonnement se fait en quatre étapes :

(1) **Initialisation** : on vérifie que l'hypothèse est satisfaite au premier rang (ici $n = 0$).

Observons ce que cela signifie dans notre exemple. Par définition de la suite arithmétique, au rang $n = 0$ la suite prend la valeur u_0. Comparons avec la formule donnée par $P(n)$ lorsque $n = 0$, nous obtenons trivialement que $u_0 = u_0 + 0 \times n = u_0$. Les deux formules coïncident bien.

(2) On peut donc établir **l'hypothèse de récurrence** : supposons qu'il existe un certain rang $N \in \mathbb{N}$ (quelconque) tel que $P(N)$ soit vraie.

Dans notre cas cela revient à supposer l'existence d'un nombre $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$u_N = u_0 + Nr. \tag{3.1}$$

Il est fondamental que cet entier N soit **quelconque** et important de comprendre, qu'a priori, la formule précédente est **uniquement valable pour cet entier particulier**.

(3) **Hérédité** : Le but est maintenant de montrer que si la formule est valable au rang N alors elle l'est forcément au rang suivant $N + 1$. Formellement, cela revient a dire que : si $P(N)$ est vraie alors $P(N+1)$ aussi. Signalons au passage qu'il s'agit de l'étape délicate de la démonstration par récurrence.

Revenons à notre exemple : nous avons supposé (hypothèse de récurrence) qu'il existait un entier N tel que $u_N = u_0 + Nr$ et l'on souhaite démontrer que ceci reste vrai au rang suivant (autrement dit $u_{N+1} = u_0 + (N+1)r$). Démontrons-le !

Puisque $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmétique, par définition

$$u_{N+1} = u_N + r.$$

On peut alors utiliser notre hypothèse de récurrence (3.1) et substituer l'expression de u_N dans l'équation précédente. Ainsi,

$$u_{N+1} = u_0 + Nr + r = u_0 + (N+1)r$$

ce qui est exactement ce qui fallait démontrer. **L'hérédité** (si $P(N)$ est vraie alor $P(N+1)$ l'est également) étant démontrée, nous pouvons donc conclure.

(4) **Conclusion** : d'après ce qui précède, nous en déduisons que la propriété $P(n)$ est vraie **pour tout** $n \in \mathbb{N}$.

4. Sommes de termes consécutifs de suites arithmétiques et géométriques

La forme particulière des suites arithmétiques et géométriques permet d'obtenir des formules simples pour l'expression de la somme, que l'on notera S_n, $n \geq 0$, des n premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. C'est à dire, pour $n \geq 0$,

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots, u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Proposition 4. *(1) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$, alors*

$$S_n = (n+1)\frac{(u_0 + u_n)}{2}, \quad n \geq 0$$

(2) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$, alors

$$S_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad n \geq 0$$

Remarque. Bien qu'il s'agisse sûrement d'une légende, on raconte que la mathématicien allemand Gauss avait trouvé une démonstration élémentaire de l'assertion (1) (pour la suite arithmétique de raison $r = 1$ débutant en $u_0 = 0$) à l'âge de 8 ans.

5. Suites récurrentes linéaires d'ordre deux

Nous avons vu précédement qu'une suite pouvait être définie par récurrence en exprimant u_{n+1} à partir d'une fonction du terme précédent u_n. Ceci peut aisément se généraliser et dans ce cours nous allons considérer des suites récurrentes linéaires, à coefficients constants, d'ordre deux. C'est à dire, étant donné $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_1 \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\geq 0}$ est de la forme suivante :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \quad n \geq 0,\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \tag{5.1}$$

Pour obtenir une expression de $(u_n)_{n\geq 0}$ en fonction de n (c'est à dire sans avoir besoin des termes précédents), il est nécessaire de faire un rappel concernant la résolution d'équation polynomiale d'ordre 2.

5.1. **Résolution d'équations polynomiales du second degré.** Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R}_*$ et $b, c \in \mathbb{R}$ un polynôme du second degré. On souhaite déterminer les solutions de l'équation suivante :

$$P(x) = 0.$$

De telles solutions sont appelées racines du polynôme P. Le théorème suivant permet de calculer de manière algorithmique l'expression des racines du polynôme P. Nous noterons le discriminant, associé au polynôme P, par $\Delta = b^2 - 4ac$. Il est assez remarquable que l'expression des racines s'obtiennent en fonction du signe de Δ.

Théorème 5. *Sous le cadre précédent, il convient de distinguer trois cas de figures :*

(1) Si $\Delta > 0$ alors P admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2. De plus, les racines s'expriment comme suit

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

(2) Si $\Delta = 0$ alors P admet une racine dite double x_1 et

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

(3) Si $\Delta < 0$ alors P n'admet pas de racines réelles mais deux racines complexes conjuguées z_1 et z_2. Celles s'expriment de la manière suivante :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

5.2. **Équation caractéristique associée à une récurrence linéaire d'ordre deux.** Revenons à l'étude des suites récurrentes linéaires, à coefficients constants, d'ordre deux. Autrement dit, étant donné $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_1 \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\geq 0}$ est de la forme suivante :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \quad n \geq 0,\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}. \tag{5.2}$$

A cette relation de récurrence, on associe une équation, polynômiale de degré deux, appelée équation caractéristique :

$$x^2 - ax - b = 0 \tag{5.3}$$

Il se trouve que la résolution de cette équation permet de déterminer une expression en fonction de n de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 6. *Trois cas de figures apparaissent :*

(1) Supposons que l'équation (5.3) admette deux racines réelles distinctes x_1 et x_2, alors les suites satisfaisant la relation de recurrence (5.2) sont de la forme suivante :

$$u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n,\ n \geq 0 \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

et les réels λ et μ sont déterminés à partir des équations $u_0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda x_1 + \mu x_2$.

(2) *Si (5.3) possède une racine double x_1 alors les suites vérifiant (5.2) sont de la forme suivante*

$$u_n = (\lambda n + \mu)x_1^n,\ n \geq 0 \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

et λ et μ sont déterminés par les équations suivantes : $u_0 = \mu$ et $u_1 = (\lambda + \mu)x_1$.

(3) *Enfin, si (5.3) admet des racines complexes z_1 et z_2 alors les suites vérifiant (5.2) sont de la forme suivante*

$$u_n = \rho^n\big(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)\big),\ n \geq 0$$

où $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ sont déterminés par l'expression polaire de z_1. C'est à dire $z_1 = \rho e^{i\theta}$. Similairement au cas précédents, on peut déterminer les constantes μ et λ.

6. Convergence de suite

Définition 6.1. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $l \in \mathbb{R}$. On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l si tout intervalle ouvert, centré en l, contient tout les termes de la suite à partir d'un certain rang. On notera ceci de la manière suivante :*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l$$

Remarque. Si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge, sa limite l est unique.

Définition 6.2. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$. On dit qu'une telle suite tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$) si, tout intervalle de la forme $[A, +\infty[$, $A > 0$ (resp. $]-\infty, -A]$, $A > 0$) contient tout les termes de la suite à partir d'un certain rang. On notera ceci par*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \quad \textit{ou} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$$

Définition 6.3. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$. On dira que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge si elle tend vers $\pm\infty$ ou n'admet pas de limite.*

Exemple 6.1. (1) Observons graphiquement ce qui se produit sur l'exemple suivant : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

(2) Ou sur celui-ci : $u_n = n^2$, $n \geq 0$.

(3) Ou encore : $u_n = (-1)^n$, $n \geq 0$.

6.1. Opérations sur les limites.

Considérons deux suites convergentes $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ telles que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l \quad \lim_{n\to\infty} v_n = l' \quad l, l' \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad l, l' = \pm\infty$$

Que peut-on dire de la suite $w_n = v_n + u_n$ ou encore de la suite $t_n = v_n \times u_n$? Convergent-elles ? Vers quelle limite ? Ceci va être élucider par la proposition suivante.

Proposition 7. *Soient* $(u_n)_{n\geq 0}$ *et* $(v_n)_{n\geq 0}$ *des suites numériques et* $l, l' \in \mathbb{R}$. *Alors les règles suivantes sont valables.*

(1) Addition :

$\lim_{n\to\infty} u_n$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n\to\infty} u_n + v_n$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	-∞	*F.I.*

(2) Produit :

$\lim_{n\to\infty} u_n$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{n\to\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n\to\infty} u_n \times v_n$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*F.I.*

(3) Quotient :

$\lim_{n\to\infty} u_n$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$l>0$ *ou* $+\infty$	$l<0$ *ou* $-\infty$
$\lim_{n\to\infty} v_n$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$\pm\infty$	0^+	0^+
$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	*F.I.*	$+\infty$	$-\infty$

$\lim_{n\to\infty} u_n$	$l>0$ *ou* $+\infty$	$l<0$ *ou* $-\infty$	0
$\lim_{n\to\infty} v_n$	0^-	0^-	0
$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$-\infty$	$+\infty$	*F.I.*

Remarque. F.I. est l'abréviation de « Forme Indéterminée », celles-ci sont au nombre de quatre : « $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $+\infty - \infty$ ».

6.2. **Limites de suites usuelles.**

Proposition 8. *Les limites suivantes sont celles que nous rencontrerons le plus souvent durant ce cours. Remarquons que certaines d'entres elles permettent de lever des formes indéterminées, on parle alors de croissance comparées.*

(1) Soit $p > 0$, *alors* $\lim_{n\to\infty} n^p = +\infty$ *et* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

(2) Soit $\alpha > 0$ *alors* $\lim_{n\to\infty} e^{\alpha n} = +\infty$ *et* $\lim_{n\to\infty} e^{-\alpha n} = 0$.

(3) Soit $\alpha > 0$ *alors* $\lim_{n\to\infty} \big(\log n\big)^{\alpha} = +\infty$ *et* $\lim_{n\to\infty} \big(\log n\big)^{-\alpha} = 0$.

(4) Soient $p > 0, \alpha > 0$ *alors* $\lim_{n\to\infty} n^p e^{-\alpha n} = 0$.

(5) Soient $p > 0, \alpha > 0$ *alors* $\lim_{n\to\infty} n^{-p}\big(\log n\big)^{\alpha} = 0$.

Remarque. Ces limites sont énoncées avec la variable $n \in \mathbb{N}$, nous verrons plus tard dans ce cours qu'lles restent valables lorsque l'on remplace n par $x \in \mathbb{R}$. Toutefois, il faudra considérer certains cas de figures supplmentaires : $x \to 0$, $x \to -\infty, \ldots$.

La proposition précise le comportement d'une suite géométrique lorsque $n \to \infty$.

Proposition 9. *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite géométrique de raison* $q \in \mathbb{R}$.

(1) Si $|q| < 1$ *alors* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

(2) *Si* $q = 1$ *alors la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *est constante et* $\lim_{n\to\infty} u_n = u_0$.

(3) *Si* $q > 1$ *alors* $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

(4) *Si* $q < -1$ *la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *n'admet pas de limite et donc diverge.*

7. Convergence de suites et monotonie

Parfois il peut-être difficile de calculer explicitement une limite. Sous certaines hypothèses de monotonie et de majoration (ou minoration), il est tout de même possible de prouver que la suite converge (sans nécessairement savoir vers quelle limite).

7.1. **Suites minorée et majorée.**

Définition 7.1. *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$.

(1) *On dit qu'une telle suite est majorée s'il existe un réel* M *(indépendant de* $n \in \mathbb{N}$*) tel que,* ***pour tout*** $n \in \mathbb{N}$*,*

$$u_n \leq M$$

(2) *On dit qu'une telle suite est minorée s'il existe un réel* m *(indépendant de* $n \in \mathbb{N}$*) tel que,* ***pour tout*** $n \in \mathbb{N}$*,*

$$m \leq u_n$$

(3) *On dit qu'une telle suite est bornée si elle est à la fois minorée est majorée.*

Le théorème suivant est un moyen pratique de justifier la convergence d'une suite. Nous verrons que ce genre de résultat pourra s'avérer utile pour des suites définies par récurrence dont nous n'avons pas une formule explicite.

Théorème 10. *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$.

(1) *Si la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *est croissante et majorée alors elle converge vers une réel* $l \in \mathbb{R}$.

(2) *Si la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *est décroissante et minorée alors elle converge vers une réel* $l \in \mathbb{R}$.

Remarque. Implicitement, le théorème précédent fournit une information supplémentaire. Considérons la première assertion : soit M un majorant de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, alors la limite l satisfait l'inégalits suivante $l \leq M$. Nous obtenons un résultat similaire pour la deuxième assertion.

Exemple 7.1. Considérons la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Il est aisé de montrer qu'une telle suite est croissante. Puis en remarquant que, pour tout $j \geq 1$,

$$\frac{1}{(j+1)^2} \leq \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1},$$

il n'est pas difficile de montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est majorée par 2. En effet,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{(j+1)^2} \\ &\leq 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right) \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2 \end{aligned}$$

Puique la somme $\sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right)$ est téléscopique. Ainsi, par le théorème précédent, la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ elle converge (il est même possible de montrer que sa limite vaut $\frac{\pi^2}{6}$).

Certains résultats d'encadrement peuvent s'avérer utile pour déterminer la limite d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Théorème 11 (Gendarmes)**.** *Soit $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ trois suites telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$v_n \leq u_n \leq w_n$$

et

$$\lim_{n\to\infty} v_n = l \quad et \quad \lim_{n\to\infty} w_n = l$$

alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et $\lim_{n\to\infty} u_n = l$.

Exemple 7.2. Considérons la suite $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Il n'est pas difficile de montrer que , pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n \leq u_n \leq w_n$$

avec $v_n = -\frac{1}{n}$ et $w_n = \frac{1}{n}$. De plus $\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = 0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Remarque. Ce théorème peut aussi s'utiliser de la manière suivante : supposons que l'on souhaite montrer qu'une suite diverge vers $+\infty$. On peut minorer notre suite par une suite plus simple qui tend de manière évidente vers $+\infty$. Par exemple, considérons la suite $u_n = (-1)^n + n$. Il n'est pas difficile de montrer que, pour tout $n \geq 0$,

$$u_n \geq n - 1.$$

Posons alors $v_n = n-1$. Il est évident que $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$, par suite $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Voici un dernier résultat concernant la convergence de suite. Pour cela nous devons définir la notion de suite adjacentes.

Définition 7.2. *Soient $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites. On dit que ces suites sont adjacentes si*

(1) $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante.

(2) $(b_n)_{n\geq 0}$ *est une suite décroissante.*

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = 0$

Théorème 12 (Adjacentes)**.** *Soient* $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ *deux suites adjacentes. Alors il existe* $l \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = l$$

Remarque. En fait ce théorème fournit un résultat un peu plus précis et peut s'avérer utile pour exhiber une approximation d'un nombre réel. En effet, si l'on suppose que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante adjacente à la suite $(b_n)_{n\geq 0}$ décroissante et si l'on note par l leur limite mutuelle alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \leq l \leq b_n.$$

Il suffit donc de déterminer à partir de quel rang $n \in \mathbb{N}$ l'inégalité suivante est satisfaite $b_n - a_n \leq 10^{-3}$, pour obtenir un encadrement à 10^{-3} (par exemple, ce choix est arbitraire) de la limite l.

Erratum (**Correction exercice 1, feuille 2 , question 3**). Notons $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et désignons par n_0 la partie entière de x_2. On considère la suite

$$u_n = \frac{n}{n^2+1}, \quad n \geq n_0 + 1$$

Montrons que cette suite est décroissante, pour cela étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$. On trouve, pour tout $n \geq n_0 + 1$,

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{n^2+n-1}{\left[(n+1)^2+1\right]\left[n^2+1\right]}. \tag{7.1}$$

n étant un entier naturel, il est facile de montrer que le dénominateur de la fraction précédente est strictement positif. Il ne reste plus qu'à déterminer le signe du polynôme $P(x) = x^2 - x + 1$ pour conclure. En calculant le déterminant de ce dernier, nous trouvons les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \qquad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

en dressant le tableau de signe du polôme P, nous obtenons que

$$P(x) \geq 0 \quad \iff \quad x \in]-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[$$

Ainsi, pour tout $n \geq n_0 + 1$, le dénominateur (valant $-P(n)$) de (7.1) est négatif. La suite est donc décroissante.