L2 Préparation aux Concours - Feuille de TD n^{o}1

Équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2

Exercice 1 : (Equations linéaires d'ordre 1)
Pour chacunes des EDO (équation différentielle ordinaire) suivantes, déterminer sur quels intervalles, elles peuvent être résolues puis déterminer leur solution générale. Lorsque ceci est possible, déterminer les solutions qui vérifient $y(0) = 1$.

1. $(E_1)\quad y'(x) + 2\,y(x) = (x+1)\,e^{ax},$ pour a réel
2. $(E_2)\quad (1+x^2)\,y'(x) + x\,y(x) = 2\,x^2 + 1,$
3. $(E_3)\quad 2\,y'(x) - y(x) = \dfrac{1}{2+e^x},$
4. $(E_4)\quad x\,(x-1)\,\ln(x)\,y'(x) - (2\,x\,\ln(x) - x + 1)\,y(x) = x,$
5. $(E_5)\quad \sqrt{|x|}\,y'(x) - y(x) = 1,$
6. $(E_6)\quad x\,(x^2-1)\,y'(x) + 2\,y(x) = x^2,$
7. $(E_7)\quad x\,(x-1)^2\,y'(x) + (x^2-1)\,y(x) = 1 + x.$

Exercice 2 : Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes en précisant si nécessaire les intervalles de définition de ces solutions:
   (a) $(E_8)\quad y''(x) + y(x) = e^x,$
   (b) $(E_9)\quad y''(x) + 3y'(x) = e^x - x + 1 + 5\sin x,$
   (c) $(E_{10})\quad y'' - 4y'(x) + 4y(x) = (2x+1)e^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{R},$
   (d) $(E_{11})\quad y''(x) + y'(x) + y(x) = e^{-2x}\sin x,$
   (e) $(E_{12})\quad y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+x^2},$
   (f) $(E_{13})\quad y''(x) + y(x) = \frac{1}{\cos x}.$
2. Déterminer les solutions de (E_{10}) qui vérifient respectivement
   (a) $y(0) = 1,\ y'(0) = v_0$ où $v_0 \in \mathbb{R}.$
   (b) $y(0) = 1,\ y(2\pi) = a$ où $a \in \mathbb{R}$

Exercice 3 : Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients non constants
On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E_{14})\quad x(x^2+1)y''(x) - 2(x^2+1)y'(x) + 2xy(x) = 0.$$

a) Rechercher une solution polynomiale (de degré 2) de (E_{14}).

b) En déduire l'ensemble des solutions de (E_{14}) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Exercice 4 : Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients non constants
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$(E_{15})\quad (t^2+1)^2y''(t) - 2t(t^2+1)y'(t) + 2(t^2-1)y(t) = (1+t^2).$$

a) Rechercher une solution polynomiale de degré 2 de l'équation sous forme homogène.

b) Trouver une deuxième solution de l'equation homogène.

c) Trouver une solution particulière de (E_{15})

d) Décrire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation.

Exercice 5 : Equations d'Euler : deux méthodes de résolution

a) On cherche les solutions réelles sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(E_{16}) \quad x^2 y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^4 \cos x - 1.$$

Rechercher les solutions de l'équation homogène correspondante en les posant sous la forme x^α, où $\alpha \in \mathbb{R}^*$. En déduire les solutions de (E_{16}).

b) On cherche les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(E_{17}) \quad x^2 y''(x) - 2xy'(x) + 3y(x) = 0.$$

Pour cela on effectue le changement de variable $t = \ln x$ et on posera $z(t) = y(x)$.

Exercice 6 * : Lemme de Gronwall

1. Le but de cette question est démontrer le Lemme de Gronwall

   Lemme 1 *Soit I un intervalle, $a \in I$ et f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $C, L > 0$ telles que*

   $$f(t) \leq C + L \int_a^t f(s)\, ds, \qquad \forall\, t \in I.$$

   Alors

   $$f(t) \leq C\, e^{L\,(t-a)}, \qquad \forall\, t \in I. \tag{1}$$

   Pour cela, on introduit la fonction ψ de I dans $\mathbb{R}$ définie par

   $$\psi(t) = C + L \int_a^t f(s)\, ds, \quad \text{pour tout } t \in I.$$

   (a) Montrer que ψ est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

   (b) Montrer que sous les hypothèses du Lemme de Gronwall

   $$\psi'(t) \leq L\, \psi(t), \quad \text{pour tout } t \in I.$$

   (c) En calculant, la dérivée de $\psi(t)\, e^{-L\,(t-a)}$, montrer que

   $$\psi(t) \leq C\, e^{L\,(t-a)}$$

   (d) Déduire (1) de (a) et (c).

2. On considère l'équation différentielle linéaire homogène

   $$(E_8) \quad y'(t) + c(t)\, y(t) = 0, \qquad t \in]-1, 1[,$$

   où c est une fonction continue sur $[-1, 1]$. Soit y_1 une solution non nulle de (E_8). On considère y une autre solution non nulle de (E_8). Et on note $\alpha = y(0)/y_1(0)$

   (a) Expliquer pourquoi $y_1(t) \neq 0$ pour tout $t \in]-1, 1[$. On pose $\alpha = y(0)/y_1(0)$.

(b) On introduit la fonction f de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(t) = (y(t) - \alpha\, y_1(t))^2$. Montrer que

$$f(t) = \int_0^t f'(s)\, ds \leq L \int_0^t f(s)\, ds,$$

où $L > 0$ sera précisée.

On pourra remarquer que c (continue sur $[-1,1]$) est bornée.

(c) En utilisant le Lemme de Gronwall, montrer que

$$f(t) \leq 0$$

(d) Déduire des questions précédentes que l'ensemble des solutions de (E_8) est dimension 1.