Intégrales multiples.

1 Introduction

Essayons de comprendre pourquoi il est important de savoir calculer une intégrale double et à quoi cela peut servir.
Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors $\int_a^b f(t)dt$ représente l'aire du domaine du plan xOy limité par les droites d'équations $x = a$,$x = b$, $y = 0$ et par la courbe d'équation $y = f(x)$.
Si maintenant f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et D un domaine du plan xOy, la question naturelle qui se pose est que représente

$$I = \int\int_D f(x,y)dxdy?$$

Voici une liste non exhaustive de ce que cela peut représenter.

1. **Calcul d'aire**. Lorsque $f(x,y) = 1$ pour tout $(x,y) \in D$, $I = \int\int_D dxdy$ représente l'aire de D.

2. **Calcul de masse.** Soit une plaque mince dont l'épaisseur est négligeable, on peut la représenter par un domaine D du plan xOy. Supposons que sa masse surfacique soit égale à $\mu(x,y)$ alors la masse m de la plaque vaut

$$m = \int\int_D \mu(x,y)dxdy.$$

3. **Calcul du centre de gravité d'une plaque.** Les coordonnées (x_G, y_G) du centre de gravité du domaine D précédent sont données par

$$x_G = \frac{1}{m}\int\int_D x\mu(x,y)dxdy, \quad y_G = \frac{1}{m}\int\int_D y\mu(x,y)dxdy.$$

4. **Calcul d'un moment d'inertie.** Sous les mêmes hypothèses que précédemment, le moment d'inertie d'un domaine D par rapport à un axe Δ est défini par

$$I = \int\int_D d(m,\Delta)^2\mu(x,y)dxdy$$

où $d(m,\Delta)$ est la distance du point $M(x,y)$ de D à l'axe Δ.

2 Calcul d'intégrales multiples

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes. On représentera le domaine d'intégration.

$$I_1 = \iint_{\Delta_1} (1+x)dxdy, \text{ où } \Delta_1 = [0,1]\times[0,2]$$

$$I_2 = \iint_{\Delta_2} dxdy, \text{ où } \Delta_2 = \{(x,y) \text{ tels que } 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\}. \quad \text{Que représente } I_2?$$

$$I_3 = \iint_{\Delta_3} x^2\, ydxdy, \text{ où } \Delta_3 = \text{ Triangle de sommets } (0,0), (0,1) \text{ et } (1,0)$$

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable.

$$J_1 = \iint_{\Delta_1} \frac{4}{x^2 - \frac{y^2}{x^2}}dxdy, \text{ où } \Delta_1 = \{(x,y) \text{ tels que } x \ne 0,\ 1 < x + \frac{y}{x} < 2 \text{ et } 3 < x - \frac{y}{x} < 4\}$$

(On pourra poser $u = x + \frac{y}{x}$, $v = x - \frac{y}{x}$)

$$J_2 = \iint_{\Delta_2} (x+y)^2 e^{x^2-y^2} dxdy, \text{ où } \Delta_2 = \{(x,y) \text{ tels que } x \geq 0,\, y \geq 0 \text{ et } x+y < 1\}$$

(On pourra poser $u = x - y$, $v = x + y$)

$$J_3 = \iint_{\Delta_3} x^2 + y^2 dxdy, \text{ où } \Delta_3 = \{(x,y) \text{ tels que } x^2 + y^2 - ax < 0\}, \text{ avec } a > 0$$

$$J_4 = \iint_{\Delta_4} x^3 - 2ydxdy, \text{ où } \Delta_4 = \{(x,y) \text{ tels que } x \geq 0,\, y \geq 0 \text{ et } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\},\ a, b > 0$$

3 Trois applications

Exercice 3. Application à la physique
Soit une plaque mince dont l'épaisseur est négligeable, on peut la représenter par un domaine D du plan xOy. Supposons que sa masse surfacique soit égale à $\mu(x,y)$.

1. Montrer que si la masse surfacique est constante $\mu(x,y) = k$ et si le domaine D est symétrique par rapport à l'axe Ox (resp. Oy), l'ordonnée (resp. abscisse) du centre de gravité est nulle.

2. Calculer les coordonnèes du centre de gravité de la surface qui se trouve dans le demi-plan $y \geq 0$ et qui est limitée par la courbe $y^2 - 4x = 0$, la droite $y = 0$ et la droite $x = h$ avec $h > 0$. Ici, on supposera que la masse surfacique égale 1.

Exercice 4. Intégrale de Gauss
On note $D_M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq M^2\}$, $C_M = [-M, M]^2$, $I_M = \iint_{D_M} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$, $J_M = \iint_{C_M} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$.

1. Calculer I_M. Puis exprimer J_M en fonction de $\int_{-M}^{M} e^{-x^2} dx$.

2. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $I_M \leq J_M \leq I_{\lambda M}$.

3. En déduire que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Exercice 5. Intégrale de Fresnel $\star$ Pour $t > 0$, on pose

$$f(t) = \int_0^t e^{ix^2} dx \text{ et } F(t) = \iint_{[0,t]^2} e^{i(x^2+y^2)} dxdy.$$

1. En effectuant un changement de variable puis une intégration par partie, montrer que f admet une limite finie quand $t \to \infty$, notée φ.

2. Exprimer F en fonction de f.

3. En passant en coordonnées polaires, montrer que

$$F(t) = \frac{i\pi}{4} - i \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp(i \frac{t^2}{cos^2\theta}) d\theta.$$

4. On pose $I(T) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t)dt$. Montrer que

$$I(T) = i\frac{\pi}{4} - \frac{i}{T} \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos\theta f(\frac{T}{cos\theta}) d\theta.$$

5. On admettra le théorème suivant appelé théorème de Césaro:
Soit f intégrable sur $[0, +\infty[$. Supposons que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} a$. Alors $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} a$.
Montrer que $\varphi^2 = i\frac{\pi}{4}$.

6. On admettra que $Im(\varphi) > 0$. En déduire la valeur de l'intégrale de Fresnel $\int_0^\infty e^{ix^2} dx$.