Université PAUL SABATIER

L2 Préparation aux Concours - feuille de TD n^{o}2

I) Solutions développables en série entière et équations différentiels

Exercice 1
Trouver une solution DSE en 0 des équations différentielles. On précisera l'intervalle de validité de la solution.

1. $2xy'(x) + y(x) = \dfrac{1}{1-x}$
2. $xy''(x) - y(x) = 1$
3. $x^2y''(x) - 6xy'(x) + (12 + x^2)y(x) = 0$
4. $2x^2y''(x) - 3xy'(x) - 3y(x) = 1 + x^2$
5. $2x^2y''(x) - 3xy'(x) - 3y(x) = 1 + x^3$

Exercice 2
Soit la série entière
$$\sum \frac{x^{3n}}{(3n)!}$$
a) Déterminer son rayon de convergence. On note f sa somme.
b) Ecrire f' et f'' comme somme de séries entières. En déduire la valeur de $f(x)+f'(x)+f''(x)$ à l'aide d'une fonction élémentaire.
c) Résoudre l'équation différentielle $y''(x) + y'(x) + y(x) = e^x$ et en déduire la valeur de f (on utilisera par exemple la valeur de $f(0)$ et $f'(0)$).

Exercice 3

1. En recherchant les séries entières solutions, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation
$$(1 + t^2)y''(t) + 4t\,y'(t) + 2y(t) = 0$$
2. Résoudre
$$(1 + t^2)y''(t) + 4t\,y'(t) + 2y(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

Exercice 4
Résoudre sur $]0, 1[$ l'équation
$$x(1 - x)y'' + (1 - 3x)y' - y = 1$$

1. Rechercher une solution développable en série entière au voisinage de 0.
2. Trouver une deuxième solution de l'équation homogène.
3. Décrire l'ensemble des solutions de l'équation sur $]0, 1[$.

Exercice 5

Soit l'équation différentielle

$$(E) \quad xy'' + 3y' - 4x^3y = 0$$

1. Chercher une solution non nulle y_1 développable en série entière au voisinage de 0. Préciser le rayon de convergence puis exprimer $y_1(x)$ à l'aide des fonctions usuelles, pour $x \in]0, +\infty[$.

2. Trouver une solution y_2 de E sur $]0, +\infty[$ non colinéaire à y_1.

3. Décrire l'ensemble des solutions de E sur $]0, +\infty[$.

II) Systèmes différentiels à coefficients constants

Exercice 6

Résoudre le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et pour la condition initiale } X(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ avec } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

Exercice 7

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x_1'(t) & = 2x_2(t) + \dfrac{e^t}{1+e^{-t}} \\ x_2'(t) & = -x_1(t) + 3x_2(t) + \dfrac{2e^t}{1+e^{-t}} \end{cases}$$

Exercice 8

Résoudre:

$$\begin{cases} x'(t) & = & x(t) + y(t) \\ y'(t) & = & -x(t) + y(t) \end{cases}$$

Exercice 9

Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = x_1(t) + x_3(t) \end{cases}$$