Feuille de TD n^{o}3 - Séries de Fourier

Coefficients de Fourier

Exercice 1. Soit f une fonction à valeurs réelles et continue par morceaux de période 2π. On pose

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\exp(-int)dt \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt \quad \forall n \geqslant 0 \text{ et } b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt \quad \forall n \geqslant 1$$

1. Si f est paire, montrer que $b_n(f) = 0$ et que $a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$.
2. Si f est impaire, montrer que $a_n(f) = 0$ et que $b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$.

Exercice 2. Calculer les coefficients de Fourier (réels ou complexes) de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et 2π périodique, dans les cas suivants (pour $x \in \,]-\pi,\pi]$) :

$$f(x) = |x|, \qquad f(x) = \mathrm{sh}(x), \qquad f(x) = x^2, \qquad f(x) = e^{i\alpha x} \text{ pour } \alpha \notin \mathbb{Z}.$$

Exercice 3. En reprenant les notations de l'exercice 1 montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n(f)(t) := \sum_{k=-n}^{k=n} c_k(f)\exp(ikt) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos(kt) + b_k(f)\sin(kt))$$

Le cours étudie plusieurs modes de convergence de cette série de fonctions.

Mode de convergence des séries de Fourier et application des théorèmes de Parseval et Dirichlet

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, 2π périodique telle que $f(x) = \begin{cases} \pi - x \text{ si } x \in [0;\pi[\\ 0 \text{ si } x \in [\pi; 2\pi[\end{cases}$

1. (a) Tracer le graphe de f sur quelques périodes.
   (b) f est-elle continue par morceaux? Continue? f est-elle C^1 par morceaux? C^1? Justifier brièvement les réponses.
2. (a) Calculer les coefficients de Fourier $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ de f.
   (b) Appliquer le théorème de Dirichlet à f en rappelant ses hypothèses.
      i. En déduire la valeur de la somme de la série $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$.
      ii. Calculer en fonction de la parité de n la valeur de $sin(n\frac{\pi}{2})$ et déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}$.
      iii. Montrer que l'on a pour $x \in \,]0,\pi]$,
      $$\sum_{n\geq 1}\frac{sin(nx)}{n} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{p\geq 0}\frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2}.$$
      En utilisant une autre égalité de ce type montrer que
      $$\sum_{n\geq 1}\frac{sin(nx)}{n} = \frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}$$
      et
      $$\sum_{p\geq 0}\frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi x}{4}.$$

Exercice 5. On considère une fonction f, 2π-périodique, **impaire**, définie sur $[0;\pi]$ par :

$$f(x) = x(\pi - x), \quad \forall x \in [0, \pi].$$

1. Dessiner la courbe représentative de f sur plusieurs périodes. Montrer que f est continue et C^1 par morceaux.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Énoncer le théorème de Dirichlet, et calculer : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.
4. Énoncer le théorème de Parseval, et calculer : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$.
5. En intégrant l'égalité donnée par Dirichlet, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ puis $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = |\sin x|$$

1. (a) Justifier que f est 2π-périodique et tracer le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
   (b) Quelle est la parité de f?
   (c) f est-elle continue par morceaux? continue? f est-elle C^1 par morceaux? Justifier.
2. (a) Calculer les coefficients de Fourier $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ de f.
   (b) Appliquer le théorème de Dirichlet à f en rappelant ses hypothèses.
   (c) En déduire les sommes suivantes $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2-1}$ et $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{4p^2-1}$.
   (d) Montrer que $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2-1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right)$.

Exercice 7.
Soit f la fonction 2π périodique paire définie par $f(x) = x - \pi$ sur $[0; \pi[$.

(a) Dessiner la courbe de f sur plusieurs périodes et calculer les coefficients de Fourier de cette fonction.

(b) Quels théorèmes de convergence peut-on appliquer à la série de Fourier de f?

(c) En déduire la somme de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$

(d) Calculer en appliquant la formule de Parseval la somme $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

Polynômes trigonométriques

Exercice 8. On note $C^0(2\pi)$ l'espace des fonctions continues 2π périodiques à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On munit cet espace du produit scalaire $< f, g >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$ et de la norme $\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt}$.
Pour $n \in \mathbb{Z}$ on note $e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad t \mapsto e^{int}$ et $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré $\leqslant n$ c'est-à-dire l'espace vectoriel $Vect(e_{-n}, \dots, e_n)$.

1. (a) Ecrire la forme générale d'un polynôme trigonométrique de degré $\leqslant n$.
   (b) Montrer que la famille $\mathcal{B}_n = (e_{-n}, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de $\mathcal{P}_n$
   (c) Soit $P \in \mathcal{P}_n$. Exprimer les coordonnées de P dans $\mathcal{B}_n$ à l'aide de produits scalaires. Soit $(P, Q) \in \mathcal{P}_n^2$. Exprimer le produit scalaire $\langle P, Q\rangle$ et la norme de P.

   Pour $f \in C^0(2\pi)$, $S_n(f)$ désigne la somme partielle de la série de Fourier de f.

2. (a) Exprimer $S_n(f)$ dans la base $\mathcal{B}_n$ (coordonnées à l'aide de coefficients de Fourier puis de produits scalaires)
   (b) Montrer que $f - S_n(f)$ est orthogonal à tout polynôme $P \in \mathcal{P}_n$. Que peut-on en déduire concernant $S_n(f)$?
   (c) Pour $P \in \mathcal{P}_n$, exprimer $\|f - P\|^2$ en fonction de $\|f - S_n(f)\|^2$.
   (d) En déduire que $S_n(f)$ est le polynôme trigonométrique de degré $\leqslant n$ le plus proche de f au sens de la distance quadratique définie par $d(f, g) = \|f - g\|_2$.
   (e) En déduire l'inégalité de Bessel.