Fonctions de plusieurs variables : régularité, dérivées partielles.

Les exercices précédés du symbole ☞ ne seront pas traités en TD. Ces exercices sont similaires à l'exercice qui les précède dans la feuille et il est de ce fait fortement conseillé de les travailler à la maison afin de vérifier que vous avez bien compris les notions abordées et travaillées en TD.

1 Continuité

Exercice 1. Donner le domaine de définition des fonctions ci-dessous. Dans chaque cas, on déterminera si la fonction est prolongeable sur $\mathbb{R}^2$ par continuité.

a) $f(x,y) = \dfrac{x^3+\sin(y^3)}{1+x^2+y^2}$ *b)* $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

c) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ *d)* $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$

e) $f(x,y) = \mid x \mid^y$ *f)* $f(x,y) = \left(\frac{x^2+y^2}{x}\sin x, \dfrac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

g) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\mid x \mid \sqrt{\mid y \mid} + \mid y \mid \sqrt{\mid x \mid}}$ *h)* $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x-y}$

☞ $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$, $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$, $f(x,y) = \dfrac{x^2e^x+y^2}{x^2+y^2}$, $f(x,y) = \dfrac{(x^2-y^2)(y^2-x)}{x+y}$

2 Dérivées partielles

Exercice 2. Justifier l'existence de dérivées partielles des fonctions suivantes. Puis calculer le gradient en $a=(x_0,y_0)$ de ces fonctions et expliciter la différentielle de ces fonctions en a.

$f(x,y) = e^y \sin x$, $g(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)\cos(xy)$, $,h(x,y) = \sqrt{1+e^x\cos^2 y}$, $k(x,y) = \sqrt{1+x^2y^2}$.

☞ $f(x,y) = x^2e^{\ln(y^2+1)} + yx$, $g(x,y) = \dfrac{x^2}{1+x^2+y^2}$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées (éventuellement partielles) des fonctions suivantes :

$$g(x,y) = f(y,x), \quad h(x) = f(x,x), \quad k(x,y) = f(\cos x, e^{yx^2}), \quad \ell(x) = f(x,x^2)$$

$$(*)m(x,y) = f(y, f(-x,x)).$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x).$$

Montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0.$$

3 Fonctions de classes $\mathcal{C}^1$

$\ast$**Exercice 5.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y + 3y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? Justifier la réponse.
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x, à y en $(0,0)$? Donner la ou les valeurs le cas échéant et justifier la réponse.
3. Déterminer les dérivées partielles de f en un point (x_0, y_0).
4. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $F(x,y) = (f(x,y), f(y,x))$. Déterminer la jacobienne de F au point $(1,1)$.

☞**Exercice 6.** Soit $g(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$. On a montré dans l'exercice 1 que g est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que g est une fonction C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ et calculer ses dérivées partielles.
2. Montrer que g n'est pas une fonction C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

$\star$**Exercice 7.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. f est-elle différentiable ?
2. Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent mais ne sont pas égales.

$\star$☞ **Exercice 8.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
2. Montrer que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent mais ne sont pas égales.