Fonctions de plusieurs variables (suite).

Les exercices précédés du symbole ☞ ne seront pas traités en TD. Ces exercices sont similaires à l'exercice qui les précède dans la feuille et il est de ce fait fortement conseillé de les travailler à la maison afin de vérifier que vous avez bien compris les notions abordées et travaillées en TD.

Dérivées partielles d'ordre 1 et 2 intervenant en physique

Exercice 1. Soit $f(x, y) = 2xy^3$.

1. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$.
2. Que constatez-vous par rapport aux deux dernières quantités? Quel théorème du cours peut-on utiliser pour le justifier sans calculs?
3. Donner une expression explicite pour le Laplacien de f noté $\triangle f$.

Exercice 2. Soit $\overrightarrow{V} = (x^2yz, x^3z, x^2 + y^2)$.
Calculer $\mathrm{div}\overrightarrow{V}$ ainsi que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V}$.

Changement de variables et difféomorphismes

Exercice 3. Soit $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ l'application de $D = \mathbb{R}^{+*} \times]-\pi, \pi[$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta).$$

Soit $(r_o, \theta_o) \in D$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On pose $F = f \circ \phi$ et $x_o = r_o \cos\theta_o$, $y_o = r_o \sin\theta_o$.

1. Montrer que le passage en coordonnées polaires définit un C^1 difféomorphisme de D sur un ensemble Ω à préciser.
2. Calculer $\frac{\partial F}{\partial r}(r_o, \theta_o)$ et $\frac{\partial F}{\partial \theta}(r_o, \theta_o)$ en fonction de r_o, θ_o, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)$.
3. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)$ en fonction de x_o, y_o, $\frac{\partial F}{\partial r}(r_o, \theta_o)$, $\frac{\partial F}{\partial \theta}(r_o, \theta_o)$.

Exercice 4. Montrer que les applications suivantes sont des C^1-difféomorphismes:

1. $\phi_1(x, y) = (x, \frac{y}{x})$ de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
2. $\phi_2(u, v) = (\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u}{v})$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.

Equation aux dérivées partielles

Exercice 5. Préciser les domaines de validité des changements de variables proposés, vérifier que cela définit bien des $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et déterminer sur ces domaines les solutions de classe C^1 des EDP suivantes:

1. $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $u = x + y$, $v = x - y$
2. $2x\frac{\partial f}{\partial x} - y(1 + y^2)\frac{\partial f}{\partial y} + f = 0$, $x = (u^2 + v^2)/2$, $y = u/v$,

3. $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} f,$ coordonnées polaires

☞ $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$ $u = x,\ v = \frac{y}{x}$

☞ $y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$ coordonnées polaires.

Exercice 6. Equation des ondes. On considère la fonction

$$\begin{array}{cccl} \phi : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,t) & \mapsto & (x - c\,t, x + c\,t) = (u(x,t), v(x,t)) \end{array}$$

où $c \in \mathbb{R}^*$ est un paramètre fixé.

1. Montrer que ϕ est un changement de variables.
2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit g par

$$f(x,t) = g \circ \phi(x,t) = g(u(x,t), v(x,t)).$$

   (a) Calculer les dérivées partielles premières de f : $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ en fonction des dérivées partielles premières de g : $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}$.

   (b) Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ en fonction des dérivées partielles de g. On calculera aussi pour s'entraîner $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}$.

   (c) En déduire toutes les solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 7. * On se place dans $\mathbb{R}^3$, le changement de coordonnées sphériques est défini par

$$\begin{array}{cccl} f : &]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[\times]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \setminus \Big\{(x,y,z)\,;\ y = 0 \text{ et } x \leq 0\Big\} \\ & (r,\theta,\phi) & \mapsto & (r\,\cos(\theta)\,\sin(\phi), r\,\sin(\theta)\,\sin(\phi), r\,\cos(\phi)) \end{array}$$

Montrer que f est un C^1 difféomorphisme.

Développement de Taylor d'ordre 2 et Extrema locaux.

Exercice 8. Ecrire le développement de Taylor à l'ordre 2 au point (x_0, y_0) des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivantes:

1. $f(x,y) = x^3 + x\,y^2 + y^2$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, où $(x_0,y_0) = (1,2)$,
2. $g(x,y) = (x^4 + y^4)e^{x^2 - y^2}$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, où $(x_0,y_0) = (1,1)$.

☞ $g(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + 1}$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, où $(x_0,y_0) = (1,2)$.

Exercice 9. Déterminer les extrema locaux des applications suivantes :

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + x\,y, \qquad g(x,y) = \frac{x^3 - 3x}{1 + y^2}, \qquad h(x,y) = x^2 - x\,y + \frac{y^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

$$k(x,y) = (x-1)^2 + (x - y^2)^2, \qquad l(x,y) = x^4 y + y^2 + 2y - 2$$

☞ $f(x,y) = y^2 - x^2 + x^4/4, \qquad g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy, \qquad h(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2.$