Intégrales généralisées, intégrales à paramètres.

Les exercices précédés du symbole ☞ ne seront pas traités en TD.

1 Révisions sur les intégrales généralisées

Exercice 1. Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x+e^x}\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-x^2)\,dx$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-x)}{\sqrt{x}}\,dx$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}\,dx$

☞

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(x)e^{-x}\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln 1+x}{x^{3/2}}\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(\ln x)^2}\,dx$

2 Intégrales à paramètres

Exercice 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{t^2+1}dt, \qquad \text{et} \qquad G(x) = \left(\int_0^x e^{-u^2}du\right)^2.$$

1. Montrer que F et G sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
2. Comparer leurs dérivées.
3. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.
4. En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$.

Exercice 3. On pose : $F(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1-\cos(xt)}{t^2}\right) e^{-t}dt$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer F'' et en déduire l'expression de F.

Exercice 4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, e^{i\,t\,x}\,dt.$$

1. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt,$$

est convergente.

2. En déduire que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que F est de classe C^1 et donner sa dérivée.
4. En utilisant le changement de variable $t = u^2$, montrer que

$$F(0) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du.$$

   On rappelle que dans ce cas $F(0) = \sqrt{\pi}$.
5. En intégrant l'expression de F' par partie, montrer que F satisfait l'équation différentielle

$$F'(x) = \frac{i - x}{2\,(x^2+1)}\, F(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

6. Calculer la valeur de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

☞ **Exercice 5.** Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ par

$$h(x,y) = \frac{\exp(-yx^2)}{1+x^2},$$

et

$$H(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)dx.$$

1. Montrer que H est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que H est C^1 sur tout intervalle de la forme $]\varepsilon, +\infty[$, où ε est un réel strictement positif.
3. En déduire que H est C^1 sur $]0; +\infty[$ et donner une expression de sa dérivée.

3 Extraits du concours DEUG polytechnique

Exercice 6. (Extrait du concours DEUG Polytechnique 2011)
On considère la fonction Dilogarithme définie pour tout $x \in [-1, 1[$ par :

$$Li(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt.$$

On définit sur $[-1, 1]$ la fonction f par $f(t) = -\dfrac{\ln(1-t)}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 1$.

1. Démontrer que la fonction f est continue sur $[-1, 1]$.
2. Justifier que la fonction Li est de classe C^1 sur $[-1, 1[$ et déterminer sa dérivée.
3. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$ est convergente. En déduire que Li est prolongeable par continuité sur $[-1, 1]$.

Exercice 7. (Extrait du concours DEUG Polytechnique 2006)

1. Soit x un réel strictement positif, justifier l'existence d'un réel A strictement positif, tel que pour tout réel t strictement supérieur à A, on ait $e^{-t}t^{x-1} < \dfrac{1}{t^2}$, puis montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ est convergente.

   On peut donc définir sur $]0, +\infty[$, la fonction Gamma d'Euler notée Γ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$.

2. Calculer $\Gamma(1)$ puis montrer la relation suivante: $\forall x \in]0,+\infty[\,, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire $\Gamma(2)$. Soit n un entier naturel non nul, donner une expression simple de $\Gamma(n)$.

3. *Dérivabilité de la fonction Gamma.*
   Soient a et b des réels tels que $0 < a < b$.

   (a) Pour tout t strictement positif, on définit sur $]0,+\infty[$, la fonction h_t par $h_t(x) = t^{x-1}$.
   Déterminer les variations de h_t. On pourra discuter selon la valeur de t.
   En déduire que $\forall x \in [a,b]\,,\ \forall t \in]0,+\infty[\,, 0 \leq t^{x-1} \leq (t^{a-1} + t^{b-1})$.

   (b) Pour cette question, on pourra utiliser librement le résultat suivant: pour tout réel r strictement supérieur à -1, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^r \mid \ln t \mid dt$ est convergente.
   Montrer avec soin que la fonction Γ est dérivable sur $[a,b]$ et déterminer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.