Université PAUL SABATIER M2 2015-2016

Topologie et Analyse fonctionelle

0.1 Complétude

Exercice 1
La complétude est-t-elle une notion métrique ou topologique ? Donner un exemple illustrant votre réponse.

Exercice 2
On considère la distance sur $\mathbb{R}$ *définie par* $d(x,y) = |\exp x - \exp y|$. $(\mathbb{R}, d)$ *est il complet ? Indication, considerer la suite* $u_n = -n$.

Exercice 3
Soit $E =]0, +\infty[$ *muni de la distance usuelle* $|\cdot|$. *On définit l'application* d *par* $d(x,y) = |\ln x - \ln y|$ *pour tout* $x, y \in E$.

1. *Montrer que* d *est une distance topologiquement equivalentes à* $|\cdot|$.
2. *Montrer que* (E, d) *est complet.*
3. *Les distances* d *et* $|\cdot|$ *sont elles uniformément équivalentes.*

Exercice 4
Soit E *un espace vectoriel normé de dimension infinie et* K *un compact de* E. *Montrer que* $\overset{\circ}{K} = \emptyset$

Exercice 5
Soit $X = C^1([a,b])$.

1. *Est-ce un espace complet si l'on muni* X *de la norme uniforme* $\|\cdot\|_\infty$ *?*
2. *Considérons la norme sur* X *définie par*

$$N(f) = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)| + \sup_{t \in [a,b]} |f'(t)|,$$

   X *muni de cette norme est il complet ?*

Exercice 6
Soit $X = \left(C^1([0,1]), \|\cdot\|\right)$, *où* $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

1. *Montrer qu'il existe une unique fonction* $f \in X$ *qui est point fixe de l'opérateur* T *donné par*

$$Tf(x) = 1 + \int_0^x f(t - t^2) dt$$

2. *Utiliser ceci pour établir l'existence d'une unique fonction* $f \in X$ *qui vérifie* $f(0) = 1$ *et* $f'(x) = f(x - x^2)$.

Exercice 7

1. *Montrer que* $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable en raisonnant par l'absurde et en considerant des ouverts* O_n *bien choisis.*
2. *L'espace vectoriels* $\mathbb{R}[X]$ *des polynômes à coefficients réels peut-il être muni d'une norme qui le rende complet ?*

0.2 Analyse fonctionelle

Exercice 8

Soit E un espace vectoriel normé. On suppose que la boule unité fermée B est compacte.

1. *Montrer qu'il existe $x_1, \dots, x_n \in B$ tels que $B \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, \frac{1}{2})$*

2. *On appelle F l'espace vectoriel engendré par les $(x_i)_{i=1\dots,n}$. Soit f une forme linéaire continue qui s'annule sur F. Montrer que $f(B) \subset \frac{1}{2} f(B)$.*

3. *En déduire que f est nulle et que E est de dimension finie.*

Exercice 9

Reflechissez à l'utilisation du Théorème de Banach Steinhaus dans les séries de Fourier.

Exercice 10

Considerons une fonction $\alpha \geq 0$ Höldérienne, que dire d'une telle fonction si $\alpha > 1$?
Peut-on obtenir des résultat de convergence de série de Fourier pour ce type de fonction ?

Exercice 11

Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues, telle que $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f.

1. *f est-elle continue ?*

   On pose, pour tout $n \geq 0$,

$$U_n = \{x \in \mathbb{R} \quad \exists \delta \quad \forall x, z \in \mathbb{R} \quad |y - z| + |z - x| \leq \delta \Rightarrow |f(y) - f(z)| < 1/n\}$$

2. *Determiner $\cup_n U_n$.*

3. *Si U_n est dense dans $\mathbb{R}$ que peut-on en conclure ?*

   Soit $W \neq \emptyset$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et $[a, b] \subset W$. On considère, pour tout $k \geq 0$

$$V_k = \{x \in [a, b] \quad \exists j > k \quad |f_j(x) - f_k(x)| > \frac{1}{3n}\}$$

4. *Montrer que V_k est un ouvert.*

5. *Montrer que $\cap_k V_k = \emptyset$.*

6. *Que peut-on en déduire ?*

7. *Monter qu'il existe un intervalle $I \subset [a, b]$ sur lequel*

$$|f_j(x) - f_k(x)| \leq \frac{1}{3n}, \quad j > k$$

   et

$$|f(x) - f_k(x)| \leq \frac{1}{3n}$$

8. *Si $x \in W$ est le centre de I et $\delta > 0$ suffisament petit, monter que $|x - y| + |z - x| < \delta$ implique*

$$|f(y) - f(z)| < \frac{1}{n}$$

9. *Conclure.*

0.3 Compacité

Exercice 12
La compacité est-t-elle une notion métrique ou topologique ? Donner un exemple illustrant votre réponse.

Exercice 13
Soit X un espace métrique compact.

1. *Comment peut-on étendre le thèorème de Stone-Weiertrass aux fonctions $C^0(X,\mathbb{C})$?*
2. *Enoncé deux théorèmes d'approximation uniforme de fonction $C^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 2π-périodique.*
3. *Connaissez vous une version mesurable du théorème de Stone-Weierstrass ? Donner un exemple d'application.*
4. *Soit $f \in L^2$ en quel sens $S_n(f)$ la serie de Fourier associée à f est-elle une approximation de f ?*

Exercice 14
Soit $f \in C[0,1]$, on définit $B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ pour tout $x \in [0,1]$. On définit également le module de continuité de f par $\omega(f,\delta) = \sup\{|f(x)-f(y)|, \quad x,y \in [0,1], \quad |x-y| \leq \delta\}$ pour tout $\delta > 0$.

1. *Donner une interpretation probabiliste de $B_n(f)(x)$, pour tout $x \in [0,1]$.*
2. *Montrer que dans le cadre de l'exercice $\omega(f,\delta)$ est fini pour tout $\delta > 0$.*
3. *Montrer que $B_n(f)$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.*
4. *Estimer la vitesse de convergence lorsque f est une fonctione α-Höldérienne.*

Exercice 15
Montrer qu'une suite convergente et sa limite forment un ensemble compact.

Exercice 16
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Elle est dite propre si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, l'image réciproque $f^{-1}(K)$ est compact.

1. *Montrer, que si f est propre, alors l'image de f par tout fermé de $\mathbb{R}^n$ est un fermé.*
2. *Etablir l'équivalence suivante : l'application est propre si et seulement si elle a la propriété*

$$\|f(x)\| \to \infty \quad \text{quand} \quad \|x\| \to \infty$$

Exercice 17
1. *Montrer (sans le Théorème de Riesz) que tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ est compact.*
2. *Montrer que si K est un compact d'un espace metrique (X,d) alors K est fermé et borné.* ‘

Exercice 18
Soit E, F deux espace métriques et $f : E \to F$. Le graphe de f est $G(f) = \{(x, f(x)) \in E \times F, \quad x \in E\}$

1. *Si f est continue, montrer que $G(f)$ est fermé dans $E \times F$.*
2. *Montrer que si F est compact et si $G(f)$ est fermé , alors f est continue.*

Exercice 19
Soit E un espace metrique compact et $f : E \to E$ telle que

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad (x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x,y))$$

1. *f est elle uniformément continue ?*

2. *Prouver que si f admet un point fixe, celui-ci est unique.*

3. *En utilisant $\phi : E \to \mathbb{R}_+$ telle que $\phi(x) = d(f(x), x)$, démontrer que f admet un point fixe*

Maintenant $E = [0, \frac{\pi}{2}]$ et $f(x) = \sin x$.

1. *Montrer que f vérifie la propriété donnée. Quel est son point fixe ?*

2. *L'application f est-elle contractante ?*

Exercice 20
Soit $f \in C^0([a,b], \mathbb{R})$ telle que

$$\int_a^b f(t)t^n dt = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer que $f = 0$.

Réflexion : que se passe-t-il si l'on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)t^n e^{-t^2/2} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}?$$

Exercice 21

1. *Soit $k > 0$ et $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions différentiables $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telles que $|f'(t)| \leq k$ pour tout $t \in [a,b]$. Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille equicontinue.*

2. *Si $L > 0$ et $f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une suite d'application L-Lipschitzienne avec $\|f_n(0)\| = \sqrt{2}$, alors montrer que l'on peut extraire une sous-suite convergente de $(f_n)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.*

Exercice 22
Soit $K : C^0([a,b]) \to C^0([a,b])$ donné par

$$(Kf)(s) = \int_a^b k(s,t)f(t)dt, \quad k \in C^0([a,b] \times [a,b])$$

et soit f_n une suite borné de $X = \big(C^0([a,b]; \|\cdot\|_\infty\big)$

1. *Rappeler pourquoi k est uniformément continue.*

2. *En déduire l'équicontinuité de (Kf_n).*

3. *Montrer que (Kf_n) contient une sous suite convergente dans X.*

0.4 Espace de Hilbert

.

Exercice 23
Soient H un espace de Hilbert et $(x_n)_n$ une suite de H qui converge faiblement vers $x \in H$: i.e.

$$< x_n, y > \to < x, y >, \quad n \to \infty \quad \forall y \in H$$

Montrer que $(x_n)_n$ est bornée.

Exercice 24
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^1, 2π périodique et de moyenne nulle.

1. *Montrer que*
$$\int_0^{2\pi} |f(t)|dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(f)|dt \tag{1}$$
2. *Montrer que l'égalité a lieu dans* (1) *si et seulement si*
$$f(t) = A\cos t + B\sin(t), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Exercice 25
Quelle est la différence entre les énoncés suivants ?

1. $f \in L^2([0, 2\pi[)$ *et la série de Fourier de* f *converge vers* f.

2. $f \in C^1$ 2π *périodique et la série de Fourier de* f *converge vers* f.

On définit les quantités suivantes $e_k(t) = e^{ikt}, \quad k \in \mathbb{Z}, t \in [0, 2\pi]$. On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré $\leq n$, i.e. $f \in \mathcal{P}_n$ est de la forme $f(t) = \sum_{|k|\leq n} a_k e_k(t), \quad a_k \in \mathbb{C}$.

Exercice 26
Soit $f \in L^2([0, 2\pi])$. *En quel sens* $S_n(f) = \sum_{|k|\leq n} < e_k, f > e_k$ *est un minimiseur ?*

Exercice 27
Pour $f \in L^2([0, 2\pi])$ *nous notons ses coefficients de Fourier par* $c_k(f) =< e_k, f >$. *Notons* Ψ *l'application définie par* $\Psi(f) = c_n(f)$.

1. *Montrer qu'il sagit d'une application linéaire continue de* $L^2([0, 2\pi])$ *dans* $l^2(\mathbb{Z})$.

2. *Peut-t-on en dire plus ?*

Exercice 28
Soit $f(z) = \sum_{k\geq 0}^{\infty} a_k z^k$ *une fonction analytique bornée sur* $\mathbb{C}$. *Soit* $r > 0$, *en considérant* $f_r(t) = f(re^{it})$ *sur le disque fermé* $D(0, r)$

1. *Calculer ses coefficients de Fourier* c_k

2. *Soit* $F = \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|$, *en appliquant le Théorème de Parseval, montrer que* f *est constante.*

Exercice 29
Soit $(H, \|\cdot\|)$ *un espace de Hilbert. Notons* $(x_j)_{j\ J}$ *une famille normée de* H. *Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. $(x_j)_{j\in J}$ *est une base Hilbertienne de* H.

2. $\forall x \in H$, *on a* $x = \sum_j < x, x_j > x_j$.

3. $\forall x \in H$ *on a* $\|x\|^2 = \sum_j | < x, x_j > |^2$.

Donner une base Hilbertienne de $L^2([0, 2\pi])$ *et de* $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 30
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $\mathcal{B}$ *une sous tribu de* $\mathcal{A}$. *Le but de l'exercice qui va suivre est de construire l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire intégrable.*

Théorème 1
Soit X *une variable aléatoire réelle sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *intégrable. Alors il existe une unique (p.s.) variable aléatoire , appelée espérance conditionelle de* X *sachant* $\mathcal{B}$, *notée* $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$, *telle que*

1. $\omega \mapsto \mathbb{E}[X|\mathcal{B}](\omega)$ *est* $\mathcal{B}-$*mesurable.*

2. *pour tout* $B \in \mathcal{B}$ $\int_B \mathbb{E}[X|\mathcal{B}]d\mathbb{P} = \int_B X d\mathbb{P}$.

Nous admetterons l'unicité d'un tel objet et chercherons à prouver son existence.

1. *Si* $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*, considerer la projection orthogonale* Q *sur* $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.

2. *Si* $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et* $X \geq 0$ *p.s. que peut-t-on dire de* $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ *?*

3. *Si* X *est seulement intégrable et positive p.s., considerer* $X_n = \min(X, n)$ *pour construire* $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ *à partir de ce qui précède.*

4. *Conclure.*

0.5 Connexité

Exercice 31
Soit (X, d) *un espace métrique*

1. *Montrer que* X *est connexe si et seulement si toute application continue* $f : X \to \{0, 1\}$ *est constante.*

2. *Soit* A *une partie connexe de* X*. Montrer que toute partie* $B \subset X$ *telle que* $A \subset B \subset \bar{A}$ *est connexe.*

Exercice 32
Quels sont les parties connexes de $\mathbb{R}$ *? de* $\mathbb{Q}$ *de* $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *?*

Exercice 33
Soit I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *et soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une application dérivable. Notons*

$$A = \{(x, y) \in I^2 \,;\, x < y\}.$$

1. *Montrer que* A *est une partie connexe de* $\mathbb{R}^2$.

2. *Pour* $(x, y) \in A$*, posons* $g(x, y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$*. Montrer que* $g(A) \subset f'(I) \subset g(\bar{A})$.

3. *Monter que* $f'(I)$ *est un intervalle.*

Exercice 34
' Dans $\mathbb{R}^2$ *on considère l'ensemble* $A = \{(x, \sin(1/x)) \,;\, x > 0\}$.

1. *Montrer que* A *est une partie connexe et connexe par arcs de* $\mathbb{R}^2$.

2. *Determiner* $\bar{A}$ *et justifier que* $\bar{A}$ *est connexe.*

3. *Monter que* $\bar{A}$ *n'est pas connexe par arcs.*

Les exercices proposés dans cette feuille sont soit inventés soit tirés des ouvrages suivants :

Bibliographie

[1] Barbe, Ledoux *Probabilité*

[2] Faraut *Calcul intégral*

[3] Candelpergher *Calcul intégral*

[4] Tao *An epsilon of room*

[5] Auliac-Caby *Topologie et analyse*

[6] Brezis *Analyse fonctionelle*

[7] Rudin *Principe d'analyse mathématique*

[8] Gourdon *Analyse*